

1.4 EXPRESIONES RACIONALES (Expresiones Fraccionarias)

Dominio de una expresión algebraica ► Simplificación de expresiones racionales ► Multiplicación y división de expresiones racionales ► Suma y resta de expresiones racionales ► Fracciones compuestas ► 
 ► Evitar errores comunes

El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina expresión fraccionaria. A continuación vemos algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \quad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \quad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una expresión racional es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios. Por ejemplo, las siguientes son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \quad \frac{x}{x^2+1} \quad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección aprendemos a ejecutar operaciones algebraicas de expresiones racionales.

▼ Dominio de una expresión algebraica

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

EJEMPLO 1 | Hallar el dominio de una expresión

Encuentre los dominios de las siguientes expresiones.

(a) $2x^2 + 3x - 1$ (b) $\frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ (c) $\frac{\sqrt{x}}{x - 5}$

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
\sqrt{x}	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

SOLUCIÓN

(a) Este polinomio está definido para toda x . Entonces, el dominio es el conjunto \mathbb{R} de números reales.

(b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{x}{(x - 2)(x - 3)}$$

El denominador sería 0 si
 $x = 2$ o $x = 3$

Como el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3 , la expresión no está definida para estos números. El dominio $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

$$\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$$

(c) Para que el numerador esté definido, debemos tener $x \geq 0$. Tampoco podemos dividir entre 0, de modo que $x \neq 5$.

Asegúrese de tener $x \geq 0$
para tomar la raíz cuadrada

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador
sería 0 si $x = 5$

Entonces, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$.

 **AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11**

$$\rightarrow \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$$

▼ Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar expresiones racionales**, factorizamos el numerador y el denominador y usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A\cancel{C}}{B\cancel{C}} = \frac{A}{B}$$

Esto nos permite **cancelar** factores comunes del numerador y el denominador.

EJEMPLO 2 | Simplificación de expresiones racionales por cancelación

Simplifique: $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$$

$$\frac{2x - 1}{x + 3}$$

$$6x - 3 + 2x^2 - x$$

$$2x^2 + 5x - 3$$

simplifique la expresión:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{6 - x - x^2} = \frac{x(2x^2 + 5x - 3)}{-(x^2 + x - 6)} = \frac{x(2x - 1)\cancel{(x + 3)}}{-(x - 2)\cancel{(x + 3)}} = \frac{x(2x - 1)}{x - 2}$$

▼ Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales**, usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones multiplicamos sus numeradores y multiplicamos sus denominadores.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1}$

SOLUCIÓN Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)(x + 4)} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} = \frac{\cancel{3(x - 1)}(x + 3)\cancel{(x + 4)}}{\cancel{(x - 1)}(x + 4)\cancel{(x + 4)}} = \frac{3(x + 3)}{(x + 4)}$$

▼ Suma y resta de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales**, primero encontramos un denominador común y a continuación usamos la siguiente propiedad de fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A + B}{C}$$

Aun cuando funcionará cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador (MCD)**. El MCD se encuentra al factorizar cada denominador y tomar el producto de los distintos factores, usando la potencia superior que aparezca en cualquiera de los factores.

MCD

EJEMPLO 5 | Sumar y restar expresiones racionales

Ejecute las operaciones indicadas y simplifique:

$$(a) \frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2}$$

$$(b) \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

SOLUCIÓN

(a) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x-1)(x+2)$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} &= \frac{3(x+2) + x(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \\ &= \frac{3x+6 + x^2-x}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$(b) \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{1(x + 1) - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)^2} =$$

$$= \frac{-x + 3}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)^2} = 3 - x$$

MCD de $x^2 - 1$ es $(x - 1)(x + 1)$
 $(x + 1)^2$ es $(x + 1)^2$

SOLUCIÓN

(b) Aquí el MCD es simplemente el producto de $(x - 1)(x + 2)$.

$\frac{3}{x - 1} + \frac{x}{x + 2} = \frac{3(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} + \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)}$ Escribe fracciones usando el MCD

$= \frac{3x + 6 + x^2 - x}{(x - 1)(x + 2)}$ Suma fracciones

$= \frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x + 2)}$ Combina los términos del numerador

SOLUCIÓN

(b) El MCD de $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ y $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$ es $(x + 1)$.

$\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} = \frac{1}{(x - 1)(x + 1)} - \frac{2}{(x + 1)(x + 1)}$ Escritura de fracciones usando el MCD

$= \frac{x + 1 - 2(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)(x + 1)}$ Propiedad Distributiva

$= \frac{x + 1 - 2x + 2}{(x - 1)(x + 1)^2}$ Combina los términos del numerador

$= \frac{-x + 3}{(x - 1)(x + 1)^2}$

... AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 41 Y 46

$x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$

EJEMPLO 7 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h}$

SOLUCIÓN Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{a - 1(a+h)}{(a+h)a} \cdot \frac{1}{h} = \frac{\cancel{a} - \cancel{a} - 1h}{(a+h)a\cancel{h}} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

$$\frac{\frac{1}{(a+h)^2} - \frac{1}{a^2}}{h} =$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} &= \frac{1(a) - 1(a+h)}{a(a+h)} = \\ &= \frac{a - a - h}{a(a+h)} = \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \\ \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} &= -\frac{1}{a(a+h)} \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 | Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique:
$$\frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2}$$

SOLUCIÓN 1 Factorice $(1 + x^2)^{-1/2}$ del numerador.

$$\begin{aligned} \frac{(1 + x^2)^{1/2} - x^2(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} &= \frac{(1 + x^2)^{-1/2} (1 + \cancel{x^2} - \cancel{x^2})}{1 + x^2} = \frac{(1 + x^2)^{-1/2}}{1 + x^2} \\ &= \frac{1}{(1 + x^2)^1 \cdot (1 + x^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

$(1+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$

$(1+x^2)^{1/2} = (1+x^2)^{1/2}$
 $(1+x^2)^{-1/2} = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$

Recordemos que:

Racionalización del numerador y denominador.

$$A + B\sqrt{C} \rightarrow A - B\sqrt{C}$$

Ejemplo-Racionalización del denominador.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1 //$$
$$- \left(\frac{1 - \sqrt{2}}{1} \right) = -1 + \sqrt{2}$$

▼ Evitar errores comunes

- ❌ No cometa el error de aplicar propiedades de la multiplicación a la operación de adición. Muchos de los errores comunes en álgebra son por esta razón. La tabla siguiente indica varias propiedades de la multiplicación e ilustra el error al aplicarlas a la adición.

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$$

Propiedad correcta de multiplicación	Error común con la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a + b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a + b}{a} \neq b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \neq (a + b)^{-1}$

Para verificar que las ecuaciones de la columna derecha están en error, simplemente sustituya los números a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si tomamos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

mientras que el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

1.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. De lo siguiente, ¿cuáles son expresiones racionales?

(a) $\frac{3x}{x^2 - 1}$ (b) $\frac{\sqrt{x+1}}{2x+3}$ (c) $\frac{x(x^2 - 1)}{x+3}$

2. Para simplificar una expresión racional, cancelamos *factores* que son comunes al _____ y _____. Por tanto, la expresión

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+2)}$$

se simplifica a _____.

3. Para multiplicar dos expresiones racionales, multiplicamos sus _____ y multiplicamos sus _____. Por

tanto, $\frac{2}{x+1} \cdot \frac{x}{x+3}$ es lo mismo que _____.

4. Considere la expresión $\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}$.

- (a) ¿Cuántos términos tiene esta expresión?
(b) Encuentre el mínimo común denominador de todos los términos.
(c) Ejecute la adición y simplifique.

HABILIDADES

5-12 ■ Encuentre el dominio de la expresión.

5. $4x^2 - 10x + 3$

6. $-x^4 + x^3 + 9x$

7. $\frac{2x+1}{x-4}$

8. $\frac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

9. $\sqrt{x+3}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$

11. $\frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$

12. $\frac{\sqrt{2x}}{x+1}$

13-22 ■ Simplifique la expresión racional.

$$13. \frac{3(x+2)(x-1)}{6(x-1)^2}$$

$$14. \frac{4(x^2-1)}{12(x+2)(x-1)}$$

$$15. \frac{x-2}{x^2-4}$$

$$16. \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$$

$$17. \frac{x^2+6x+8}{x^2+5x+4}$$

$$18. \frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$$

$$19. \frac{y^2+y}{y^2-1}$$

$$20. \frac{y^2-3y-18}{2y^2+5y+3}$$

$$21. \frac{2x^3-x^2-6x}{2x^2-7x+6}$$

$$22. \frac{1-x^2}{x^3-1}$$

23-38 ■ Ejecute la multiplicación o división y simplifique.

$$23. \frac{4x}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{16x}$$

$$24. \frac{x^2-25}{x^2-16} \cdot \frac{x+4}{x+5}$$

$$25. \frac{x^2-2x-15}{x^2-9} \cdot \frac{x+3}{x-5}$$

$$26. \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} \cdot \frac{3-x}{3+x}$$

$$27. \frac{t-3}{t^2+9} \cdot \frac{t+3}{t^2-9}$$

$$28. \frac{x^2-x-6}{x^2+2x} \cdot \frac{x^3+x^2}{x^2-2x-3}$$

$$29. \frac{x^2+7x+12}{x^2+3x+2} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^2+6x+9}$$

$$30. \frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2-xy-y^2}{x^2-xy-2y^2}$$

$$31. \frac{x+3}{4x^2-9} \div \frac{x^2+7x+12}{2x^2+7x-15}$$

$$32. \frac{2x+1}{2x^2+x-15} \div \frac{6x^2-x-2}{x+3}$$

$$33. \frac{2x^2+3x+1}{x^2+2x-15} \div \frac{x^2+6x+5}{2x^2-7x+3}$$

$$34. \frac{4y^2-9}{2y^2+9y-18} \div \frac{2y^2+y-3}{y^2+5y-6}$$

$$35. \frac{\frac{x^3}{x+1}}{x}$$

$$36. \frac{\frac{2x^2-3x-2}{x^2-1}}{2x^2+5x+2}$$

$$37. \frac{x/y}{z}$$

$$38. \frac{x}{y/z}$$

39-58 ■ Ejecute la adición o sustracción y simplifique.

$$39. 2 + \frac{x}{x+3}$$

$$40. \frac{2x-1}{x+4} - 1$$

$$41. \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-3}$$

$$42. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$$

$$43. \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$44. \frac{x}{x-4} - \frac{3}{x+6}$$

$$45. \frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}$$

$$46. \frac{5}{2x-3} - \frac{3}{(2x-3)^2}$$

$$47. u + 1 + \frac{u}{u+1}$$

$$48. \frac{2}{a^2} - \frac{3}{ab} + \frac{4}{b^2}$$

$$49. \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$50. \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$51. \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x^2+7x+12}$$

$$52. \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2}$$

$$53. \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2-9}$$

$$54. \frac{\frac{x}{x^2+x-2}}{\frac{2}{x^2-5x+4}}$$

$$55. \frac{2}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{4}{x^2-x}$$

$$56. \frac{\frac{x}{x^2-x-6}}{\frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-3}}$$

$$57. \frac{\frac{1}{x^2+3x+2}}{\frac{1}{x^2-2x-3}}$$

$$58. \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{3}{x^2-1}$$

 .43. $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} =$

 .45. $\frac{x}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1} =$

 17.
$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 5x + 4}$$

59-68 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

$$59. \frac{x + \frac{1}{x+2}}{x - \frac{1}{x+2}}$$

$$61. \frac{\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x-2}}{x+2}$$

$$63. \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}$$

$$65. \frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$$

$$67. 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$60. \frac{1 + \frac{1}{c-1}}{1 - \frac{1}{c-1}}$$

$$62. \frac{\frac{x-3}{x-4} - \frac{x+2}{x+1}}{x+3}$$

$$64. x - \frac{y}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}$$

$$66. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$$

$$68. 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

75-80 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la “regla del cociente”.)

$$75. \frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$$

$$76. \frac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$$

$$77. \frac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$$

$$78. \frac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1-x^2}$$

$$79. \frac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$$

$$80. \frac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7-3x}$$

69-74 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas aparecen en cálculo.)

$$69. \frac{\frac{1}{1+x+h} - \frac{1}{1+x}}{h}$$

$$70. \frac{\frac{1}{\sqrt{x+h}} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{h}$$

$$71. \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h}$$

$$72. \frac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$$

$$73. \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$$

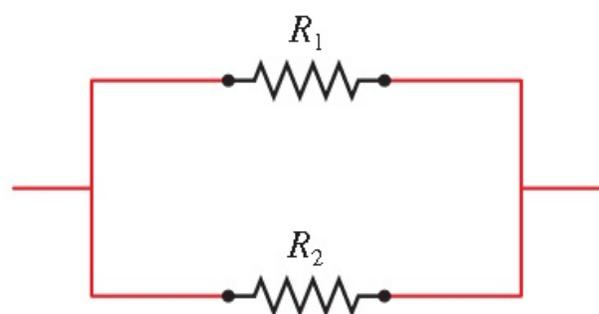
$$74. \sqrt{1 + \left(x^3 - \frac{1}{4x^3}\right)^2}$$

APLICACIONES

101. **Resistencia eléctrica** Si dos resistores eléctricos con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (vea la figura), entonces la resistencia total R está dada por

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

- (a) Simplifique R de la expresión.
(b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia R total?



105. **Errores algebraicos** La columna de la izquierda en la tabla de la página siguiente es una lista de algunos errores algebraicos comunes. En cada caso, dé un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este tipo, que muestra que un enunciado es falso, se llama *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$	
$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$	
$\frac{a+b}{a} \neq b$	
$(a^3 + b^3)^{1/3} \neq a + b$	
$a^m/a^n \neq a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \neq \frac{1}{a^n}$	

SECCIÓN 1.4 ■ PÁGINA 41

1. (a), (c) 2. numerador; denominador; $\frac{x+1}{x+3}$
3. numeradores; denominadores; $\frac{2x}{x^2+4x+3}$
4. (a) 3 (b) $x(x+1)^2$ (c) $\frac{-2x^2+1}{x(x+1)^2}$
5. \mathbb{R} 7. $x \neq 4$ 9. $x \geq -3$ 11. $\{x \mid x \neq -1, 2\}$
13. $\frac{x+2}{2(x-1)}$ 15. $\frac{1}{x+2}$ 17. $\frac{x+2}{x+1}$ 19. $\frac{y}{y-1}$
21. $\frac{x(2x+3)}{2x-3}$ 23. $\frac{1}{4(x-2)}$ 25. $\frac{x+3}{x-3}$ 27. $\frac{1}{t^2+9}$
29. $\frac{x+4}{x+1}$ 31. $\frac{x+5}{(2x+3)(x+4)}$ 33. $\frac{(2x+1)(2x-1)}{(x+5)^2}$
35. $x^2(x+1)$ 37. $\frac{x}{yz}$ 39. $\frac{3(x+2)}{x+3}$ 41. $\frac{3x+7}{(x-3)(x+5)}$
43. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ 45. $\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ 47. $\frac{u^2+3u+1}{u+1}$
49. $\frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ 51. $\frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}$ 53. $\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$
55. $\frac{5x-6}{x(x-1)}$ 57. $\frac{-5}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ 59. $\frac{(x+1)^2}{x^2+2x-1}$
61. $\frac{4x-7}{(x-2)(x-1)(x+2)}$ 63. $-xy$ 65. $\frac{y-x}{xy}$ 67. $\frac{1}{1-x}$
69. $-\frac{1}{(1+x)(1+x+h)}$ 71. $-\frac{2x+h}{x^2(x+h)^2}$ 73. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

75. $\frac{(x+2)^2(x-13)}{(x-3)^3}$ 77. $\frac{x+2}{(x+1)^{3/2}}$ 79. $\frac{2x+3}{(x+1)^{4/3}}$
81. $2 + \sqrt{3}$ 83. $\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5}$ 85. $\frac{y\sqrt{3}-y\sqrt{y}}{3-y}$
87. $\frac{-4}{3(1+\sqrt{5})}$ 89. $\frac{r-2}{5(\sqrt{r}-\sqrt{2})}$ 91. $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$
93. Verdadera 95. Falsa 97. Falsa 99. Verdadera
101. (a) $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (b) $\frac{20}{3} \approx 6.7$ ohms