Algunas ecuaciones que a primera vista no parecen cuadráticas, se pueden convertir a esta forma efectuando simples operaciones algebráicas como multiplicar ambos lados por un denominador común, o elevar al cuadrado. Debe tenerse el cuidado de evitar soluciones extrañas que pudieran introducirse al manipular las ecuaciones.

Ejemplo 1: Cómo tratar soluciones extrañas.

$$x+3 = \frac{-2x^2+7x-3}{x-3} \qquad (x \neq 3)$$

$$(x+3)(x-3) = \left(\frac{-2x^2+7x-3}{\cancel{x-3}}\right)\cancel{x-3}$$

$$x^2-9 = -2x^2+7x-3$$

$$3x^2-7x-6 = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x+2 \\ x-3 \\ \hline -9x-6 \\ 3x^2+2x \\ \hline 3x^2-7x-6 \end{array}$$

$$(3x+2)(x-3) = 0$$

$$3x+2=0 \quad \text{ó} \quad (x-3)=0$$

$$\boxed{x = -\frac{2}{3}} \qquad x = 3$$

Verificación:

$X = -\frac{2}{3}$;

$$x + 3 = \frac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}$$

$$LI = \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{7}{3}$$

$$LD = \frac{-2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 7\left(-\frac{2}{3}\right) - 3}{-\frac{2}{3} - 3} =$$

$$= \frac{-\frac{8}{9} - \frac{14}{3} - \frac{3}{1}}{-\frac{11}{3}} = \frac{\frac{-8 - 42 - 27}{9}}{-\frac{11}{3}} = \frac{-\frac{77}{9}}{-\frac{11}{3}} = \frac{77}{9} \cdot \frac{3}{11} = \frac{7}{3}$$

$X = 3$

$$LI = 3 + 3 = 6$$

$$LD = \frac{-2(3)^2 + 7(3) - 3}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

LD no está definida, por lo tanto X= 3 NO es solución !!!

Ejemplo 11: Una ecuación de tipo cuadrático.

Determinar las soluciones reales de

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0$$

$\underbrace{\text{Si } w = x^2:}$

$$w^2 - 2w - 2 = 0$$

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 8}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \Bigg\} \; 2^2 \cdot 3$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\to x^2 = w$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{w}$$

$$x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{3}} \quad \to \quad x = \pm\sqrt{1 + \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{3}} \quad 1 - \sqrt{3} < 0 \quad \times$$

por lo tanto solo estas dos son soluciones

Ejemplo 12: Solución de una ecuación que involucra exponentes fraccionarios.

Determine todas las soluciones de la ecuación:

$$x^{5/6} + x^{2/3} = 2x^{1/2}$$

Solución:

$$x^{5/6} + x^{2/3} - 2x^{1/2} = 0$$

Factorizo la expresión de x con portencia mas baja: $x^{1/2}$

$$x^{1/2}\left(x^{1/3} + x^{1/6} - 2\right) = 0$$

Si $w = x^{1/6}$:

$$w^3(w^2 + w - 2) = 0$$

$$w^3(w-1)(w+2) = 0$$

$w^3 = 0 \rightarrow w = 0$

$x^{1/6} = 0$

$x = 0$

$w = 1$

$x^{1/6} = 1$

$x = 1^6 = 1$

$w = -2$

$x^{1/6} = -2$

$x = (-2)^6 = 64$

verificamos las respuestas:

$x = 0$

$LI = 0^{5/6} + 0^{2/3} =$

$= 0$

$LD = 2 \cdot 0^{1/2} =$

$= 0$

$LI = LD$ ✓

$x = 1$

$LI = 1^{5/6} + 1^{2/3} =$

$= 2$

$LD = 2 \cdot 1^{1/2} =$

$= 2$

$LI = LD$ ✓

$x = 64$

$LI = 64^{5/6} + 6^{2/3}$

$= 32 + 16$

$= 48$

$LD = 2 \cdot 64^{1/2}$

$= 2 \cdot 8$

$= 16$

$LI \neq LD$

Ejemplo 13: Una ecuación de valor absoluto.

Resolver la ecuación:

$$|2x - 5| = 3$$

solución.

$$|2x - 5| = 3$$

utilizando la definición de valor absoluto, tenemos:

$$\boxed{2x - 5 = 3} \quad \text{ó} \quad \boxed{2x - 5 = -3}$$

$$2x = 8 \qquad\qquad 2x = 2$$

$$\boxed{x = 4} \qquad\qquad \boxed{x = 1}$$

(Las soluciones son: X=1 y X=4)

EJEMPLO 9 | Trayectoria de un proyectil

Un objeto lanzado o disparado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará una altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas por la fórmula

$$\boxed{h = -16t^2 + v_0 t}$$

$h = -\frac{1}{2} g t^2$

$g = 9.8\ m/s^2$

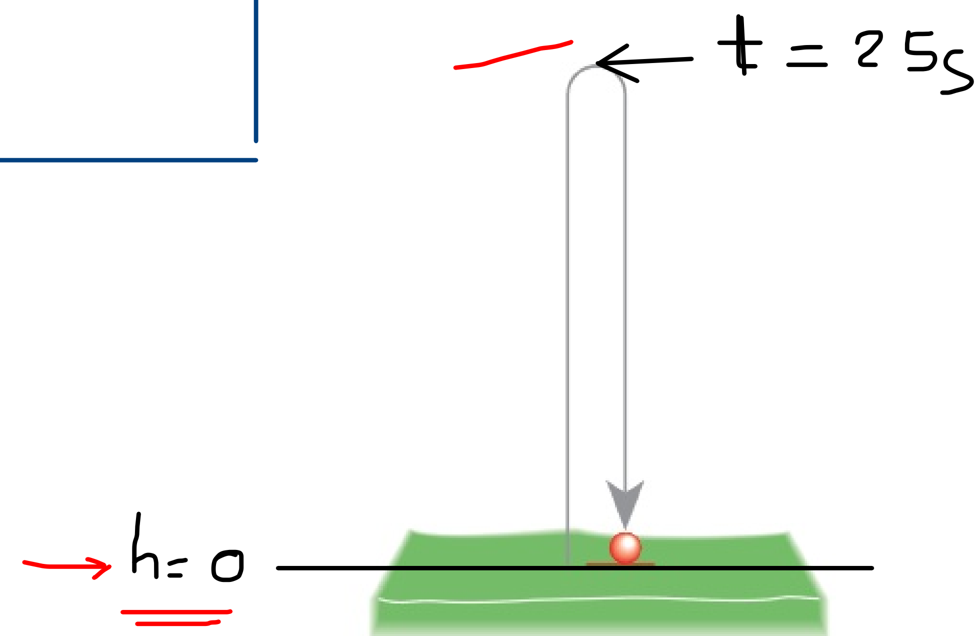
Suponga que se dispara una bala verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se ilustra en la Figura 2.

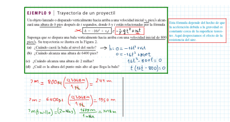
(a) ¿Cuándo caerá la bala al nivel del suelo?

(b) ¿Cuándo alcanza una altura de 6400 pies?

(c) ¿Cuándo alcanza una altura de 2 millas?

(d) ¿Cuál es la altura del punto más alto al que llega la bala?





Solución

a) $-16t^2 + 800t = 0$

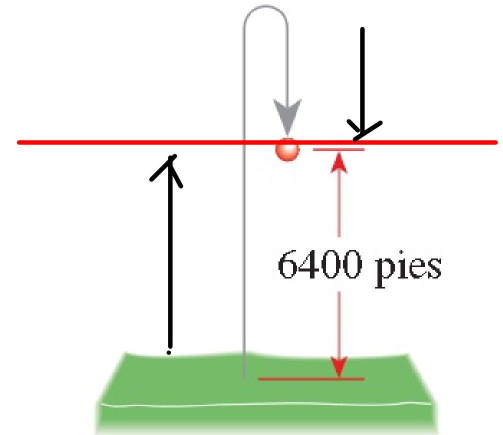
$-16t(t - 50) = 0$

$-16t = 0$ ó $t - 50 = 0$

$t = 0$ $t = 50$

Seite 65

b) $\boxed{h = -16t^2 + v_0 t}$



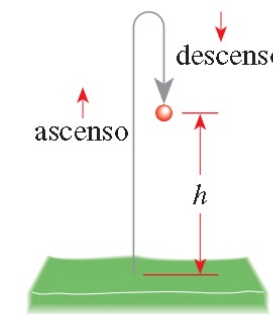


FIGURA 2

$$-16t^2 + 800t = 6400$$

$$-\left(-16t^2 + 800t - 6400\right) = 0$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0$$

$\div 16$:

$$\boxed{t^2 - 50t + 400 = 0}$$

$$(t-10)(t-40) = 0$$

$$t = 10\text{ s} \quad ó \quad t = 40\text{ s}$$

---

c) Dos millas equivalen a 10560 pies.

$$-16t^2 + 800t = 10560$$

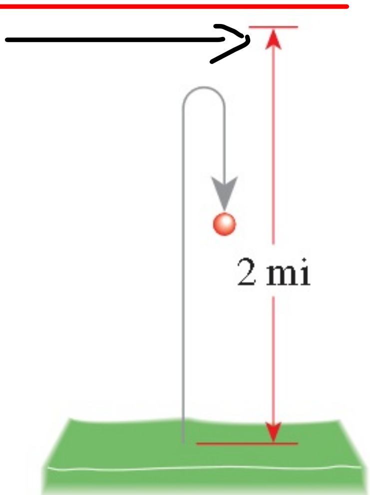
$$16t^2 - 800t + 10560 = 0$$

$\div 16$:

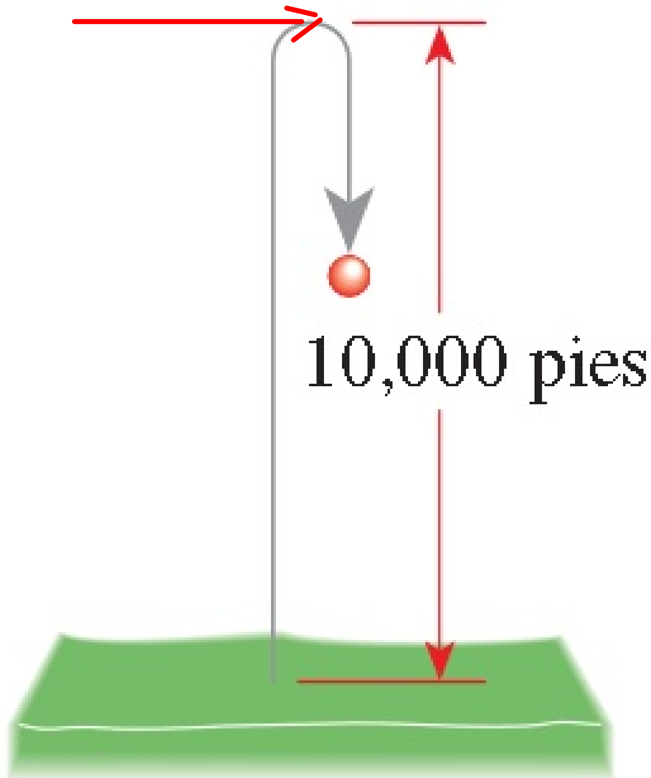
$$\boxed{t^2 - 50t + 660 = 0}$$

$$D = b^2 - 4ac = (-50)^2 - 4(1)(660)$$

$$= -140$$



d)



$$h = -16t^2 + 800t$$

$$16t^2 - 800t + h = 0$$

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0 \longrightarrow$$

$$640000 - 64h = 0$$

$$\boxed{h = 10000}$$

!!

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $\boxed{2x = 1 - \sqrt{2 - x}.}$

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

!!

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, debe tener especial cuidado para verificar sus respuestas finales. El siguiente ejemplo demuestra el porqué.

EJEMPLO 11 | Una ecuación que contiene un radical

Resuelva la ecuación $\boxed{2x = 1 - \sqrt{2 - x}}$.

SOLUCIÓN Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un lado del signo igual y luego elevamos al cuadrado:

$$2x - 1 = -\sqrt{2 - x} \qquad \text{Reste 1}$$

$$(2x - 1)^2 = 2 - x \qquad \text{Eleve al cuadrado cada lado}$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x \qquad \text{Expanda el lado izquierdo}$$

$$4x^2 - 3x - 1 = 0 \qquad \text{Sume } -2 + x$$

$$(4x + 1)(x - 1) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \qquad \text{Propiedad de Producto Cero}$$

$$x = -\tfrac{1}{4} \qquad x = 1 \qquad \text{Resuelva}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Debemos verificarlas para ver si satisfacen la ecuación original. De *Verifique sus respuestas* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91**

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{LI} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)}$$

$$= 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}}$$

$$= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}$$

$$\text{LI} = \text{LD} \quad ✔$$

$x = 1$:

$$\text{LI} = 2(1) = 2$$

$$\text{LD} = 1 - \sqrt{2 - 1}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

$$\text{LI} \neq \text{LD} \quad ✗$$

Cuando resolvamos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas,** es decir, soluciones potenciales que no satisfacen la ecuación original. En el Ejemplo 11 el valor $x = 1$ es una solución extraña. Las soluciones extrañas pueden ser introducidas cuando elevamos al cuadrado cada lado de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede convertir una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Entonces, la ecuación elevada al cuadrado puede ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que siempre deben verificarse las respuestas para asegurarse que cada una de ellas satisfaga la ecuación original.

1.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. *¿Verdadero o falso?*

   (a) Sumar el mismo número a cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

   (b) Multiplicar cada lado de una ecuación por el mismo número siempre da una ecuación equivalente.

   (c) Elevar al cuadrado cada lado de una ecuación siempre da una ecuación equivalente.

2. Explique cómo usaría cada método para resolver la ecuación $x^2 - 4x - 5 = 0$.

   (a) Por factorización:________

   (b) Completando el cuadrado:_______

   (c) Usando la fórmula cuadrática:______

3. (a) Las soluciones de la ecuación $x^2(x - 4) = 0$ son_________.

   (b) Para resolver la ecuación $x^3 - 4x^2 = 0$, _________el lado izquierdo.

4. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x} + x = 0$ con los siguientes pasos.

   (a) Aislar el radical:____________.

   (b) Elevar al cuadrado ambos lados:____________.

   (c) Las soluciones de la ecuación cuadrática resultante son________.

   (d) La(s) solución(es) que satisface la ecuación original es (son)_________.

5. La ecuación $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 = 0$ es del tipo__________. Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ ____. La ecuación cuadrática resultante es _________.

6. La ecuación $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ es del tipo________.

   Para resolver la ecuación, hacemos $W =$ _____.

   La ecuación cuadrática resultante es __________.

HABILIDADES

7-10 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

7. $4x + 7 = 9x - 3$

   (a) $x = -2$ (b) $x = 2$

8. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$

   (a) $x = 2$ (b) $x = 4$

9. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 4} = 1$

   (a) $x = 2$ (b) $x = 4$

10. $\dfrac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$

    (a) $x = 4$ (b) $x = 8$

11-28 ■ La ecuación dada es lineal o equivalente a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

11. $2x + 7 = 31$

12. $5x - 3 = 4$

13. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$

14. $3 + \frac{1}{3}x = 5$

15. $-7w = 15 - 2w$

16. $5t - 13 = 12 - 5t$

17. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

18. $\frac{z}{5} = \frac{3}{10}z + 7$

19. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

20. $\frac{2}{3}y + \frac{1}{2}(y - 3) = \frac{y + 1}{4}$

21. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

22. $2x - \frac{x}{2} + \frac{x + 1}{4} = 6x$

23. $\frac{1}{x} = \frac{4}{3x} + 1$

24. $\frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{4}{5}$

25. $\frac{3}{x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3x + 3}$

26. $\frac{4}{x - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{35}{x^2 - 1}$

27. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

28. $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \frac{x + 5}{\sqrt{3}}$

29-42 ■ De las siguientes ecuaciones, despeje la variable indicada.

29. $PV = nRT$; despeje R

30. $F = G\frac{mM}{r^2}$; despeje m

31. $P = 2l + 2w$; despeje w

32. $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$; despeje R_1

33. $\frac{ax + b}{cx + d} = 2$; despeje x

34. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; despeje x

35. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; despeje x

36. $\frac{a + 1}{b} = \frac{a - 1}{b} + \frac{b + 1}{a}$; despeje a

37. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; despeje r

38. $F = G\frac{mM}{r^2}$; despeje r

39. $a^2 + b^2 = c^2$; despeje b

40. $A = P\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2$; despeje i

41. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; despeje t

42. $S = \frac{n(n + 1)}{2}$; despeje n

43-54 ■ Resuelva la ecuación por factorización.

43. $x^2 + x - 12 = 0$

44. $x^2 + 3x - 4 = 0$

45. $x^2 - 7x + 12 = 0$

46. $x^2 + 8x + 12 = 0$

47. $4x^2 - 4x - 15 = 0$

48. $2y^2 + 7y + 3 = 0$

49. $3x^2 + 5x = 2$

50. $6x(x - 1) = 21 - x$

51. $2x^2 = 8$

52. $3x^2 - 27 = 0$

53. $(3x + 2)^2 = 10$

54. $(2x - 1)^2 = 8$

55-62 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

55. $x^2 + 2x - 5 = 0$

56. $x^2 - 4x + 2 = 0$

57. $x^2 - 6x - 11 = 0$

58. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

59. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

60. $3x^2 - 6x - 1 = 0$

61. $4x^2 - x = 0$

62. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

63-78 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

63. $x^2 - 2x - 15 = 0$

64. $x^2 + 5x - 6 = 0$

65. $x^2 - 7x + 10 = 0$

66. $x^2 + 30x + 200 = 0$

67. $2x^2 + x - 3 = 0$

68. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

69. $3x^2 + 6x - 5 = 0$

70. $x^2 - 6x + 1 = 0$

71. $z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{9}{16} = 0$

72. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

73. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

74. $0 = x^2 - 4x + 1$

75. $w^2 = 3(w - 1)$

76. $3 + 5z + z^2 = 0$

77. $10y^2 - 16y + 5 = 0$

78. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

79-84 ■ Use el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación.

79. $x^2 - 6x + 1 = 0$

80. $3x^2 = 6x - 9$

81. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

82. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

83. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

84. $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

85-108 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

85. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{4}$

86. $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$

87. $\dfrac{x^2}{x+100} = 50$

88. $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

89. $\dfrac{x+5}{x-2} = \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{28}{x^2-4}$

90. $\dfrac{x}{2x+7} - \dfrac{x+1}{x+3} = 1$

91. $\sqrt{2x+1} + 1 = x$

92. $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$

93. $2x + \sqrt{x+1} = 8$

94. $\sqrt{\sqrt{x-5} + x} = 5$

95. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$

96. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

97. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

98. $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

99. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$

100. $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

101. $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

102. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

103. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$

104. $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

105. $|3x + 5| = 1$

106. $|2x| = 3$

107. $|x - 4| = 0.01$

108. $|x - 6| = -1$

Ecuación de los gases ideales (ver ejercicio 29)

$$T = t(^\circ C) + 273$$

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T \longrightarrow \text{Temperatura (K)}$$

Presión (atm)

1 atm =760 mm Hg

Volumen (L)

$$1\,L = 1\,dm^3$$
$$1\,mL = 1\,cm^3$$

Nº de moles (moles)

$$n = \frac{m}{MM}$$

$$R = 0'082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}$$

APLICACIONES

109-110 ■ Problemas de cuerpos en caída Suponga que un cuerpo se deja caer desde una altura h_0 sobre el suelo. Entonces su altura después de t segundos está dada por $h = 16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies. Use esta información para resolver el problema.

109. Si una pelota se deja caer desde 288 pies sobre el suelo, ¿cuánto tarda en llegar al nivel del suelo?

110. Una pelota se deja caer desde lo alto de un edificio de 96 pies de alto.

(a) ¿Cuánto tardará la pelota en caer la mitad de la distancia al nivel del suelo?

(b) ¿Cuánto tardará en caer el suelo?

111-112 ■ Problemas de cuerpos en caída Use la fórmula $h = -16t^2 + v_0t$ que se estudia en el Ejemplo 9.

111. Una pelota se lanza directamente hacia arriba a una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

(a) ¿Cuándo llega la pelota a una altura de 24 pies?

(b) ¿Cuándo llega a una altura de 48 pies?

(c) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

(d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

(e) ¿Cuándo cae al suelo?

112. ¿Con qué rapidez debe ser lanzada hacia arriba una pelota para que alcance una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* Use el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0t + h = 0$.]

113. Contracción en vigas de concreto A medida que el concreto se seca, se contrae; cuanto más alto es el contenido de agua, mayor es la contracción. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m^3, entonces se contraerá con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10{,}000}$$

donde S es la fracción de la longitud original de la viga que desaparece debido a la contracción.

(a) Una viga de 12.025 m de largo es vaciada en concreto que contiene 250 kg/m^3 de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Qué largo tendrá la viga cuando se haya secado?

(b) Una viga mide 10.014 m de largo cuando está húmeda. Deseamos que se contraiga a 10.009 m, de modo que el factor de contracción sea $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua dará esta cantidad de contracción?

114. La ecuación de lentes Si F es la longitud focal de un lente convexo y un objeto se coloca a una distancia x desde el lente, entonces su imagen estará a una distancia y del lente, donde F, x y y están relacionadas por la *ecuación de lentes*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que un lente tiene una longitud focal de 4.8 cm y que la imagen de un objeto está 4 cm más cerca del lente que el objeto mismo. ¿A qué distancia del lente está el objeto?

115. Población de peces La población de peces de cierto lago sube y baja de acuerdo con la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

Aquí F es el número de peces en el tiempo t, donde t se mide en años desde el 1 de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por primera vez.

(a) ¿En qué fecha la población de peces será otra vez la misma de como era el 1 de enero de 2002?

(b) ¿Antes de qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

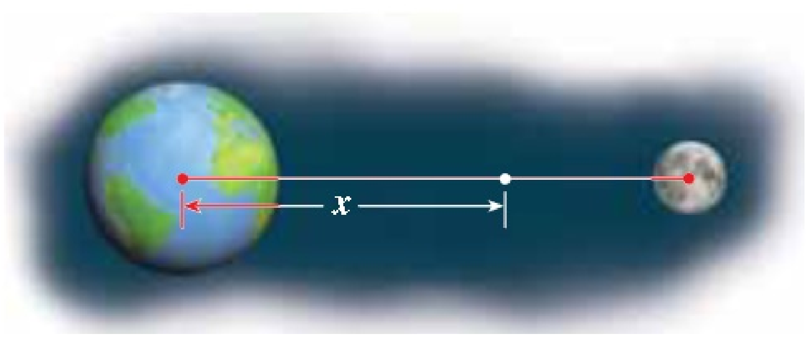
116. Población de peces Un gran estanque es abastecido de peces. La población P de peces está modelada con la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde t es el número de días desde que los peces fueron introducidos en el estanque. ¿Cuántos días tardará la población de peces en llegar a 500?

117. Utilidades Un fabricante de aparatos pequeños encuentra que la utilidad P (en dólares), generada por producir x hornos de microondas por semana, está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos deben ser fabricados en una semana determinada para generar una utilidad de $1250?

118. Gravedad Si un segmento imaginario de recta se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza F gravitacional neta que actúa sobre un objeto situado sobre este segmento de recta es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

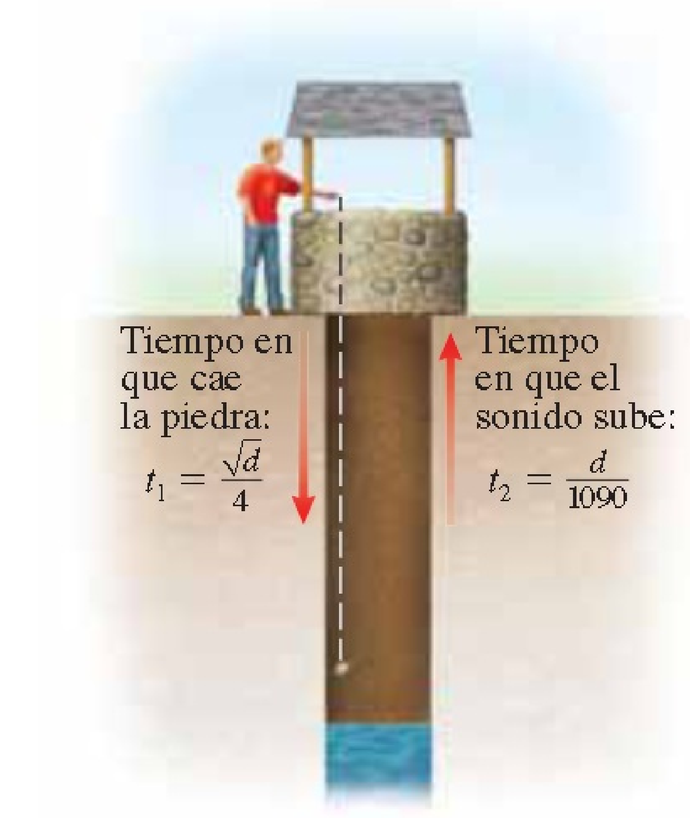
donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medida en miles de millas. ¿A qué distancia del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde no hay fuerza gravitacional neta que actúe sobre el objeto? (Exprese su respuesta a las mil millas más cercanas.)



119. Profundidad de un pozo Un método para determinar la profundidad de un pozo es dejar caer en él una piedra, y luego medir el tiempo que tarda la caída hasta que se escucha el ruido de la piedra al tocar el agua. Si d es la profundidad del pozo (en pies) y t_1 es el tiempo (en segundos) que tarda la piedra en caer, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Ahora, si t_2 es el tiempo que tarda el sonido en regresar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Por lo tanto, $t_2 = d/1090$. Así, el tiempo total transcurrido entre dejar caer la piedra y escuchar el ruido cuando cae es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Cuál es la profundidad del pozo si su tiempo total es 3 s?



124. Resolver una ecuación en formas diferentes En esta sección hemos aprendido varias formas diferentes de resolver una ecuación. Algunas ecuaciones pueden abordarse en más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático. Podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando. O bien, podríamos despejar $\sqrt{x}$, elevar al cuadrado cada lado y luego resolver la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las siguientes ecuaciones usando ambos métodos indicados, y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

(a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje el radical y eleve al cuadrado

(b) $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplique por el MCD

Respuestas a ejercicios impares:

SECCIÓN 1.5 ■ PÁGINA 54

1. (a) Verdadero **(b)** Falso (porque la cantidad podría ser 0) **(c)** Falso **2. (a)** Factorizar en $(x+1)(x-5)$ y usar la Propiedad del Producto Cero. **(b)** Sumar 5 a cada lado, entonces completar el cuadrado sumando 4 a ambos lados. **(c)** Insertar coeficientes en la Fórmula Cuadrática **3. (a)** 0, 4 **(b)** Factorizar **4. (a)** $\sqrt{2x} = -x$ **(b)** $2x = x^2$ **(c)** 0, 2 **(d)** 0 **5.** Cuadrático; $x + 1$; $W^2 - 5W + 6 = 0$ **6.** Cuadrático; x^3; $W^2 + 7W - 8 = 0$ **7. (a)** No **(b)** Sí **9. (a)** Sí **(b)** No **11.** 12 **13.** 18 **15.** -3 **17.** 12 **19.** $-\frac{3}{4}$ **21.** 30 **23.** $-\frac{1}{3}$ **25.** $\frac{13}{3}$ **27.** -2 **29.** $R = \dfrac{PV}{nT}$ **31.** $w = \dfrac{P - 2l}{2}$ **33.** $x = \dfrac{2d - b}{a - 2c}$ **35.** $x = \dfrac{1 - a}{a^2 - a - 1}$ **37.** $r = \pm\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **39.** $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$ **41.** $t = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$ **43.** $-4, 3$ **45.** 3, 4 **47.** $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ **49.** $-2, \frac{1}{3}$ **51.** ± 2 **53.** $-\dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ **55.** $-1 \pm \sqrt{6}$ **57.** $3 \pm 2\sqrt{5}$ **59.** $-2 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$ **61.** $0, \frac{1}{4}$ **63.** $-3, 5$ **65.** 2, 5 **67.** $-\frac{3}{2}, 1$ **69.** $-1 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ **71.** $\frac{3}{4}$ **73.** $-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$ **75.** No hay solución real **77.** $\dfrac{-8 \pm \sqrt{14}}{10}$ **79.** 2 **81.** 1 **83.** No hay solución real **85.** $-\frac{7}{5}, 2$ **87.** $-50, 100$ **89.** -4 **91.** 4 **93.** 3 **95.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ **97.** No hay solución real **99.** $\pm 3\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{2}$ **101.** $-1, 0, 3$ **103.** 27, 729 **105.** $-2, -\frac{4}{3}$ **107.** 3.99, 4.01 **109.** 4.24 s **111. (a)** Después de 1 s y $1\frac{1}{2}$ s **(b)** Nunca **(c)** 25 pies **(d)** Después de $1\frac{1}{4}$ s **(e)** Después de $2\frac{1}{2}$ s **113. (a)** 0.00055, 12.018 m **(b)** 234.375 kg/m^3 **115. (a)** Después de 17 años, el 1 de enero, 2019 **(b)** Después de 18.612 años, el 12 de agosto de 2020 **117.** 50 **119.** 132.6 pies

1.6 MODELADO CON ECUACIONES

Numerosos problemas en ciencias, economía, finanzas, medicina y otros muchos campos se pueden convertir en problemas de álgebra; ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas reales.

Construcción y uso de modelos

Usaremos las siguientes guías para ayudarnos a formular ecuaciones que modelen situaciones descritas en palabras. Para demostrar la forma en que estas guías pueden ayudar a formular ecuaciones, téngalas en cuenta al trabajar cada ejemplo de esta sección.

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

1. **Identifique la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide hallar. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea al final del problema. Después **introduzca notación** para la variable (llámela x o alguna otra letra).
2. **Transforme palabras en álgebra.** De nuevo lea cada oración del problema y exprese, en términos de la variable que haya definido en el Paso 1, todas las cantidades mencionadas en el problema. Para organizar esta información, a veces es útil **trazar un diagrama** o **hacer una tabla.**
3. **Formule el modelo.** Encuentre el dato de importancia decisiva en el problema, que dé una relación entre las expresiones que haya citado en el Paso 2. **Formule una ecuación** (o **modelo**) que exprese esta relación.
4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique su respuesta, y exprésela como una oración que conteste la pregunta planteada en el problema.

El siguiente ejemplo ilustra la forma en que se usa esta guía para convertir un "problema de palabras" en lenguaje de álgebra.

EJEMPLO 1 | Rentar un auto

Una compañía de renta de autos cobra $30 al día y $0.15 por milla para rentar un auto. Helen renta un auto durante dos días y su cuenta llega a $108. ¿Cuántas millas recorrió?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar el número de millas que Helen ha recorrido. Por tanto, hacemos

$$x = \text{número de millas recorridas}$$

Convierta las palabras en álgebra. Ahora convertimos toda la información dada en el problema a un lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Número de millas recorridas	x
Costo del recorrido (a $0.15 por milla)	$0.15x$
Costo diario (a $30 por día)	$2(30)$

Formule el modelo. Ahora proponemos el modelo.

costo del recorrido + costo diario = costo total

$$\boxed{0.15x + 2(30) = 108}$$

Resuelva. Ahora despejamos x.

$$0.15x = 48 \quad \text{Reste 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \quad \text{Divida entre 0.15}$$

$$\boxed{x = 320} \quad \text{Con calculadora}$$

Helen manejó 320 millas su auto rentado.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

En los ejemplos y ejercicios que siguen, construimos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones reales

▼ Problemas acerca de interés

Cuando usted pide un préstamo en un banco o cuando un banco le "pide prestado" a usted al mantener el dinero en una cuenta de ahorros, quien pide el préstamo en este caso debe pagar por el privilegio de usar el dinero. La cuota que se paga se llama **interés.** El tipo más básico de interés es el **interés simple,** que es precisamente un porcentaje anual de la cantidad total solicitada en préstamo o depositada. La cantidad de un préstamo o depósito se llama **principal** P. El porcentaje anual pagado por el uso de este dinero es la **tasa de interés** r. Usaremos la variable t para representar el número de años que el dinero está en depósito y la variable I para representar el interés total ganado. La siguiente **fórmula de interés simple** da la cantidad de interés I ganado cuando un principal P es depositado durante t años a una tasa de interés r.

$$\boxed{I = Prt}$$

Cuando use esta fórmula, recuerde convertir el porcentaje r a decimal. Por ejemplo, en forma decimal, 5% es 0.05. Entonces, a una tasa de interés de 5%, el interés pagado sobre un depósito de \$1000 en un período de 3 años es $I = Prt = 1000(0.05)(3) = \$150$.

$5\% \to 0.05$

$10\% \to 0.1\%$

$I = 1000(0,05)(3) = \$150$

EJEMPLO 2 | Interés sobre una inversión

María hereda \$100,000 y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}$% de interés simple al año. Si el interés total de María es \$5025 al año, ¿cuánto dinero se invierte a cada una de las tasas de interés?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la cantidad que ella ha invertido a cada una de las tasas. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{la cantidad invertida al 6\%}$$

Convierta las palabras en álgebra. Como la herencia total que recibió María es \$100,000, se deduce que ella invirtió $100{,}000 - x$ al $4\frac{1}{2}$%. Convertimos toda la información dada en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Cantidad invertida al 6%	x
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}$%	$100{,}000 - x$
Cantidad ganada al 6%	$0{,}06x$
Cantidad ganada al $4\frac{1}{2}$ %	$0{,}045(100{,}000 - x)$

Formule el modelo. Usamos el dato de que el interés total de María es \$5025 para proponer el modelo.

$$\text{interés al 6\%} + \text{interés al } 4\tfrac{1}{2}\% = \text{interés total}$$

$$\boxed{0{,}06x + 0{,}045(100{,}000 - x) = 5025}$$

Resuelva. A continuación despeje la x.

$$0{,}06x + 4500 - 0{,}045x = 5025$$ Propiedad Distributiva

$$0{,}015x + 4500 = 5025$$ Combine términos en x

$$0{,}015x = 525$$ Reste 4500

$$\boxed{x = \frac{525}{0{,}015} = 35.000}$$ Divida entre 0,015

Entonces María ha invertido \$35.000 al 6% y los restantes \$65.000 al $4\frac{1}{2}\%$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$$\boxed{\begin{aligned} \text{interés total} &= 6\%\ \text{de}\ \$35.000 + 4\tfrac{1}{2}\%\ \text{de}\ \$65.000 \\ &= \$2100 + \$2925 = \$5025 \quad ✔ \end{aligned}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Problemas de área o longitud

Cuando usamos álgebra para modelar una situación física, a veces debemos usar fórmulas básicas de geometría. Por ejemplo, es posible que necesitemos una fórmula para un área o un perímetro, o la fórmula que relaciona los lados de triángulos semejantes, o el Teorema de Pitágoras. Casi todas estas fórmulas aparecen al final de este libro. Los dos ejemplos que siguen usan estas fórmulas geométricas para resolver algunos problemas prácticos.

EJEMPLO 3 | Dimensiones de un jardín

Un jardín cuadrado tiene un andador de 3 pies de ancho alrededor de su borde exterior, como se ve en la Figura 1. Si el área de todo el jardín, incluyendo los andadores, es de 18,000 pies^2, ¿cuáles son las dimensiones del área plantada?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar la longitud y ancho del área plantada. Por lo tanto, hacemos

$$x = \text{longitud del área plantada}$$

Convierta las palabras en álgebra. A continuación, convierta la información de la Figura 1 en el lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Longitud del área plantada	x
Longitud de todo el jardín	$x + 6$
Área de todo el jardín	$(x + 6)^2$

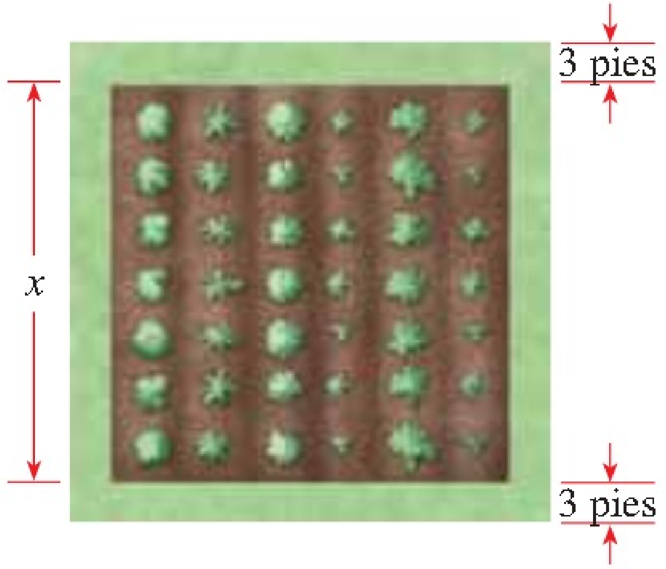


FIGURA 1

Formule el modelo. A continuación proponemos el modelo.

$$\text{área de todo el jardín} = 18{,}000 \text{ pies}^2$$

$$(x + 6)^2 = 18{,}000$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$x + 6 = \sqrt{18{,}000} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$x = \sqrt{18{,}000} - 6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$\boxed{x \approx 128}$$

El área plantada del jardín es de unos 128 pies por 128 pies.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47

EJEMPLO 4 | Dimensiones de un lote para construcción

Un lote rectangular para construcción mide 8 pies más largo de lo que es de ancho y tiene un área de 2900 pies^2. Encuentre las dimensiones del lote.

SOLUCIÓN

Identifique la variable. Nos piden hallar el ancho y largo del lote. Entonces, hacemos

$$w = \text{ancho del lote}$$

Convierta las palabras en álgebra. A continuación convertimos la información dada en el problema en el lenguaje de álgebra (vea Figura 2).

En palabras	En álgebra
Ancho del lote	w
Longitud del lote	$w + 8$

Formule el modelo. Ahora formulamos el modelo

$$\text{ancho del lote} \cdot \text{longitud del lote} = \text{área del lote}$$

$$\boxed{w(w + 8) = 2900}$$

Resuelva. A continuación despejamos w.

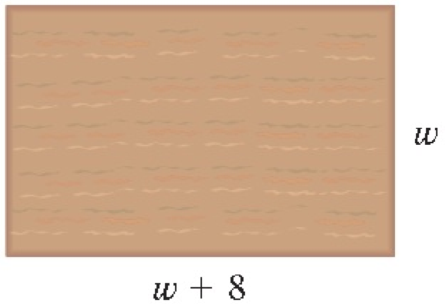
$$w^2 + 8w = 2900 \qquad \text{Expanda}$$

$$w^2 + 8w - 2900 = 0 \qquad \text{Reste 2900}$$

$$(w - 50)(w + 58) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$w = 50 \quad \text{or} \quad w = -58 \qquad \text{Propiedad de producto cero}$$

Como el ancho del lote debe ser un número positivo, concluimos que el ancho del lote w = 50 pies.
La longitud del lote es: w + 8 = 50 +8 = 58 pies.



EJEMPLO 5 | Determinar la altura de un edificio usando triángulos semejantes

Un hombre que mide 6 pies de alto desea hallar la altura de cierto edificio de cuatro pisos. Mide su sombra y encuentra que es de 28 pies de largo, mientras que su propia sombra es de $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

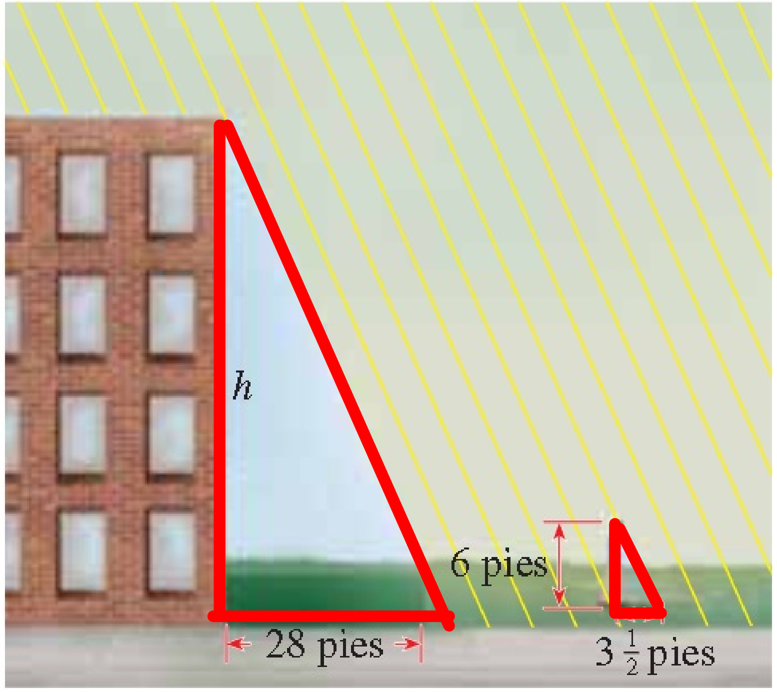


FIGURA 3

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la altura del edificio. Por lo tanto, hagamos

$$h = \text{la altura del edificio}$$

Convierta las palabras en álgebra. Usamos el dato que los triángulos de la Figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones entre lados correspondientes son iguales. Ahora convierta estas observaciones en lenguaje de álgebra.

En palabras	En álgebra
Altura del edificio	h
Razón entre altura y base en el triángulo grande	$\frac{h}{28}$
Razón entre altura y base en el triángulo pequeño	$\frac{6}{3.5}$

Formule el modelo. Como los triángulos grande y pequeño son semejantes, obtenemos la ecuación

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{razón entre altura y}\\ \text{base en triángulo grande}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{razón entre altura y}\\ \text{base en triángulo pequeño}\end{array}}$$

$$\boxed{\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}}$$

Resuelva. A continuación despeje h.

$$\boxed{h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = \underline{48}} \qquad \text{Multiplique por 28}$$

Entonces el edificio mide 48 pies de altura.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 51

Problemas de mezclas

Numerosos problemas reales se refieren a la mezcla de diferentes tipos de sustancias. Por ejemplo, trabajadores de la construcción deben mezclar cemento, grava y arena; el jugo de fruta de un concentrado puede tener mezcla de diferentes tipos de jugos. Los problemas de mezclas y concentraciones hacen uso del hecho de que si una cantidad x de una sustancia se disuelve en una solución con volumen V, entonces la concentración C de la sustancia está dada por

$$\boxed{C = \frac{x}{V}} \rightarrow x = CV$$

Por lo tanto, si 10 g de azúcar se disuelven en 5 L de agua, entonces la concentración de azúcar es $C = 10/5 = 2$ g/L. Resolver un problema de mezclas por lo general nos pide analizar la cantidad x de la sustancia que está en la solución. Cuando despejamos x de esta ecuación, vemos que $x = CV$. Observe que en muchos problemas de mezcla la concentración C se expresa como porcentaje, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 | Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas gaseosas anuncia su refresco de naranja como "con sabor natural", aun cuando contiene sólo 5% de jugo de naranja. Un nuevo reglamento federal estipula que para ser llamada "natural", una bebida debe contener al menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo de naranja puro debe agregar este fabricante a 900 galones de refresco de naranja para apegarse al nuevo reglamento?

SOLUCIÓN

Identifique la variable. El problema pide la cantidad de jugo de naranja puro a ser agregado. Por lo tanto, hacemos

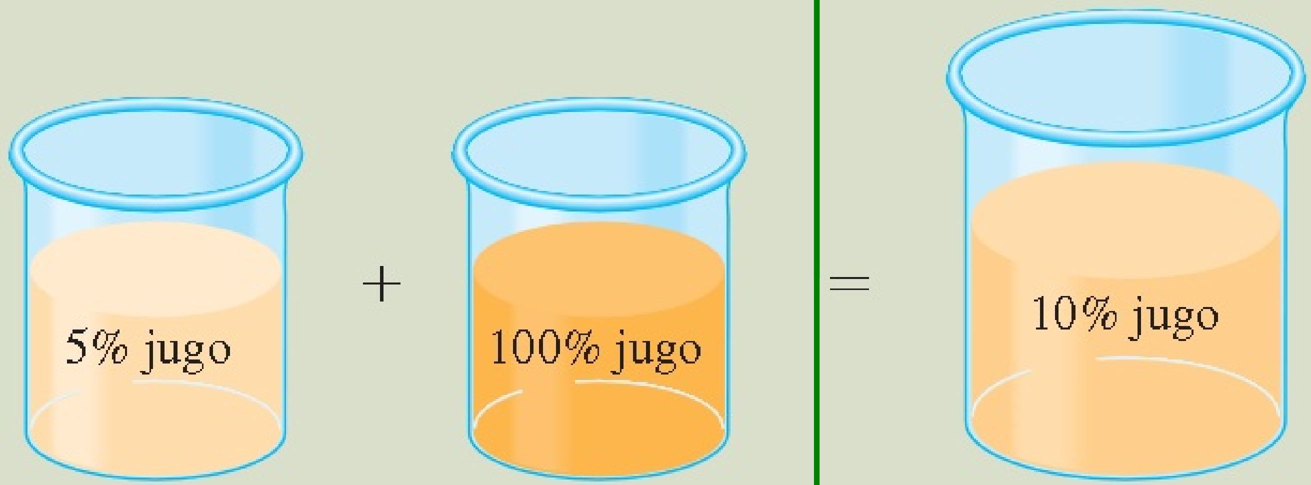
$$x = \text{la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro a agregar}$$

Convierta las palabras en álgebra. En cualquier problema de este tipo, en el que dos sustancias diferentes han de mezclarse, trazar un diagrama nos ayuda a organizar la información dada (vea Figura 4).

La información de la figura puede convertirse en lenguaje de álgebra, como sigue:

En palabras	**En álgebra**
Cantidad de jugo de naranja a agregar	x
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en la primera tina	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo de naranja en la segunda tina	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

FIGURA 4



Volumen	900 galones	x galones	$900 + x$ galones
Cantidad de jugo de naranja	5% de 900 galones $= 45$ galones	100% de x galones $= x$ galones	10% de $900 + x$ galones $= 0.1(900 + x)$ galones

Formule el modelo. Para formular el modelo, usamos el dato de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja de las dos primeras tinas.

$$\boxed{\text{cantidad de jugo de naranja en la primera tina}} + \boxed{\text{cantidad de jugo de naranja en la segunda tina}} = \boxed{\text{cantidad de jugo de naranja en la mezcla}}$$

$$\boxed{45 + x = 0.1(900 + x)} \qquad \text{De la Figura 4}$$

Resuelva. A continuación despeje la x.

$$45 + x = 90 + 0.1x \qquad \text{Propiedad Distributiva}$$

$$0.9x = 45 \qquad \text{Reste } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \qquad \text{Divida entre } 0.9$$

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

El fabricante debe agregar 50 galones de jugo de naranja puro al refresco.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

cantidad de jugo antes de mezclar = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de mezclar = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53

▼ Problemas de distancia, rapidez y tiempo

El siguiente ejemplo trata sobre distancia, tasa (rapidez) y tiempo. La fórmula a recordar en estos casos es

$$\boxed{\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}}$$

donde la rapidez es ya sea la rapidez constante o el promedio de rapidez de un cuerpo en movimiento. Por ejemplo, manejar en auto a 60 mi/h durante 4 horas lleva a una persona a una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

EJEMPLO 8 | Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un jet voló de Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4200 kilómetros. La rapidez para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la rapidez en el vuelo de ida. Si el viaje total duró 13 horas, ¿cuál fue la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles?

SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles. Aquí hacemos

s = rapidez de Nueva York a Los Ángeles

Entonces $s + 100$ = rapidez de Los Ángeles a Nueva York

Convierta las palabras en álgebra. A continuación organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia" porque sabemos que las ciudades están a 4200 km entre sí. A continuación llenamos la columna "Rapidez", porque hemos expresado ambas magnitudes de rapidez en términos de la variable x. Por último, calculamos las entradas para la columna "Tiempo", usando

$$\boxed{\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}}$$

	Distancia (km)	Rapidez (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	s	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s+100}$

Formule el modelo.

El viaje total tomó 13 horas, de modo que tenemos el modelo

$$\text{tiempo de N.Y. a L.A.} + \text{tiempo de L.A. a N.Y.} = \text{tiempo total}$$

$$\boxed{\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s+100} = 13}$$

Resuelva.

Multiplicando por el común denominador, $s(s + 100)$, tenemos

$$4200(s + 100) + 4200s = 13s(s + 100)$$

$$8400s + 420{,}000 = 13s^2 + 1300s$$

$$0 = 13s^2 - 7100s - 420{,}000$$

Aun cuando esta ecuación se factoriza, con números tan grandes es probable que sea más rápido usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora.

$$s = \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420{,}000)}}{2(13)}$$

$$= \frac{7100 \pm 8500}{26}$$

$$s = 600 \qquad \text{o} \qquad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Como s representa la rapidez, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la rapidez del jet de Nueva York a Los Ángeles fue de 600 km/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 67

EJEMPLO 9 | Energía consumida en el vuelo de un pájaro

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves tienden a evitar vuelos sobre grandes cuerpos de agua durante horas del día, porque generalmente el aire se eleva sobre tierra y baja sobre el agua en el día, de modo que volar sobre el agua requiere de más energía. Un ave se suelta del punto A en una isla, a 5 millas de B, que es el punto más cercano a la playa en línea recta. El ave vuela al punto C en la playa y luego vuela a lo largo de la playa al lugar para anidar D, como se ve en la Figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Consume 10 kcal/milla volando sobre tierra y 14 kcal/milla volando sobre agua.

(a) ¿En dónde debe estar ubicado el punto C para que el ave use exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

(b) ¿El ave tiene suficientes reservas de energía para volar directamente de A a D?

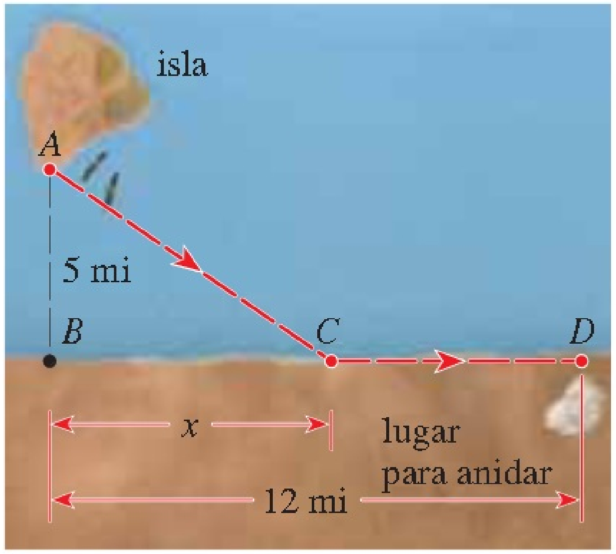


FIGURA 5

(a) Identifique la variable. Nos piden hallar la ubicación de C. Hacemos

$$x = \text{distancia de } B \text{ a } C$$

Convierta las palabras en álgebra. De la figura, y del dato

$$\text{energía consumida} = \text{energía por milla} \times \text{millas recorridas}$$

determinamos lo siguiente.

En palabras	**En álgebra**	
Distancia de B a C	x	
Distancia de vuelo sobre agua (de A a C)	$\sqrt{x^2 + 25}$	Teorema de Pitágoras
Distancia de vuelo sobre tierra (de C a D)	$12 - x$	
Energía consumida sobre agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$	
Energía consumida sobre tierra	$10(12 - x)$	

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{total de energía consumida}} = \boxed{\text{energía consumida sobre agua}} + \boxed{\text{energía consumida sobre tierra}}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Resuelva. Para resolver esta ecuación, eliminamos la raíz cuadrada al llevar primero todos los otros términos a la izquierda del signo igual y luego elevar al cuadrado ambos lados.

$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25}$	Aísle a la derecha el término de raíz cuadrada
$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25}$	Simplifique el lado izquierdo
$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25)$	Eleve al cuadrado ambos lados
$2500 + 1000x + 100x^2 = 196x^2 + 4900$	Expanda
$0 = 96x^2 - 1000x + 2400$	Todos los términos al lado derecho

Esta ecuación podría factorizarse, pero como los números son tan grandes es más fácil usar la Fórmula Cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \quad \text{o} \quad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto C debe ser ya sea $6\frac{2}{3}$ o $3\frac{3}{4}$ millas desde B para que el ave consuma exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

(b) Por el Teorema de Pitágoras (vea página 219), la longitud de la ruta directamente de A a D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, de modo que la energía que el ave requiera para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más energía de la que dispone el ave, de modo que no puede seguir esa ruta.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83**

1.6 EJERCICIOS

APLICACIONES

19. **Renta de un camión** Una compañía que renta vehículos cobra \$65 al día y 20 centavos por milla por rentar un camión. Miguel rentó un camión durante 3 días y su cuenta fue de \$275. ¿Cuántas millas recorrió?

20. **Costos de teléfono celular** Una compañía de telefonía celular cobra una cuota mensual de \$10 por los primeros 1000 mensajes de texto y 10 centavos por cada mensaje adicional de texto. La cuenta de Miriam por mensajes de texto para el mes de junio es de \$38.50. ¿Cuántos mensajes de texto envió ella ese mes?

21. **Inversiones** Felicia invirtió \$12,000, una parte de los cuales gana una tasa de interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ al año y el resto gana una tasa de 4% al año. Después de 1 año, el interés total ganado sobre estas inversiones fue de \$525. ¿Cuánto dinero invirtió ella a cada una de las tasas?

22. **Inversiones** Si Benjamín invierte \$4000 al 4% de interés al año, ¿cuánto dinero adicional debe invertir al $5\frac{1}{2}\%$ de interés anual, para asegurar que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}\%$ de la cantidad total invertida?

23. **Inversiones** ¿Qué tasa anual de interés debe ganar una persona para ganar sobre una inversión de \$3500, para asegurar recibir \$262.50 de interés después de 1 año?

25. **Salarios** Una ejecutiva de una compañía de ingeniería gana un salario mensual más un bono de Navidad de \$8500. Si ella gana un total de \$97,300, ¿cuál es su salario mensual?

30. **Un acertijo** Un padre tiene cuatro veces la edad de su hija; en 6 años, tendrá tres veces la edad que actualmente tiene su hija. ¿Cuál es la edad actual de la hija?

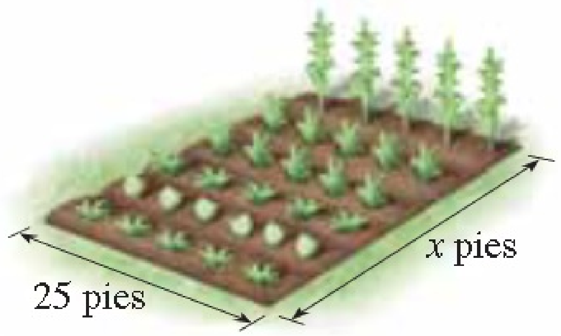
31. **Un acertijo** Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, planteó el siguiente acertijo a un columnista de chismes. "Hace siete años, yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad." ¿Cuál es la edad del actor?

32. **Cuadrangulares en su carrera** Durante su carrera en las Ligas Mayores, Hank Aaron conectó 41 cuadrangulares más de los que conectó Babe Ruth en su carrera. Juntos conectaron 1469 cuadrangulares. ¿Cuántos conectó Babe Ruth?

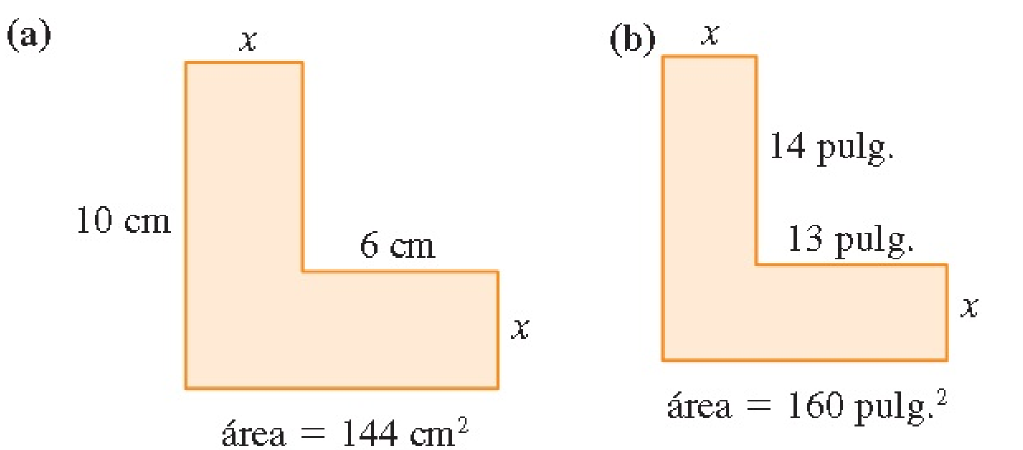
33. **Valor de monedas** Un monedero contiene igual número de monedas de un centavo, de cinco centavos y de diez centavos. El valor total de las monedas es \$1.44. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene el monedero?

34. **Valor de monedas** Mary tiene \$3.00 en monedas de 5, de 10 y de 25 centavos. Si ella tiene el doble de monedas de 10 que de 25 y cinco más de monedas de 5 que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene ella?

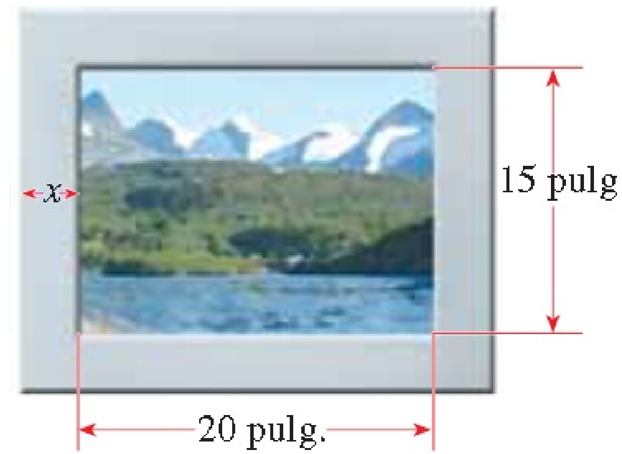
35. Longitud de un jardín Un jardín rectangular mide 25 pies de ancho. Si su área es de 1125 pies^2, ¿cuál es la longitud del jardín?



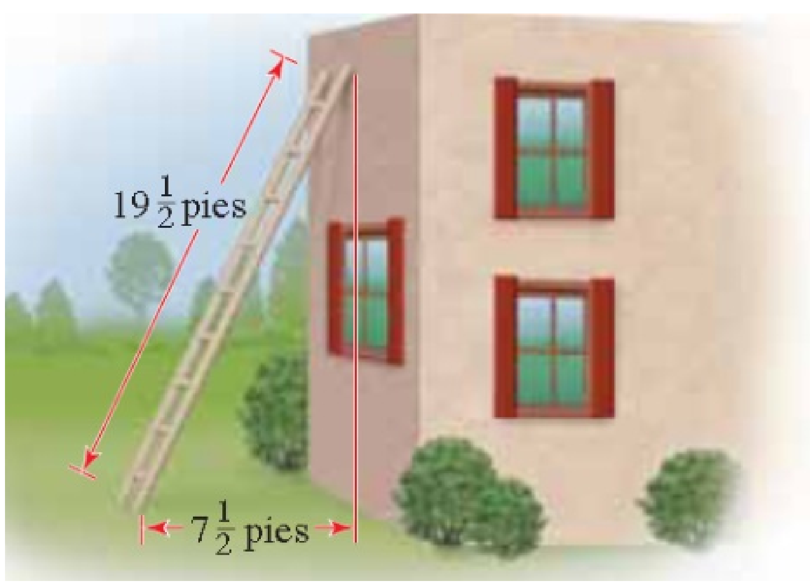
45. Longitud y área Encuentre la longitud x de la figura. Se da el área de la región sombreada.



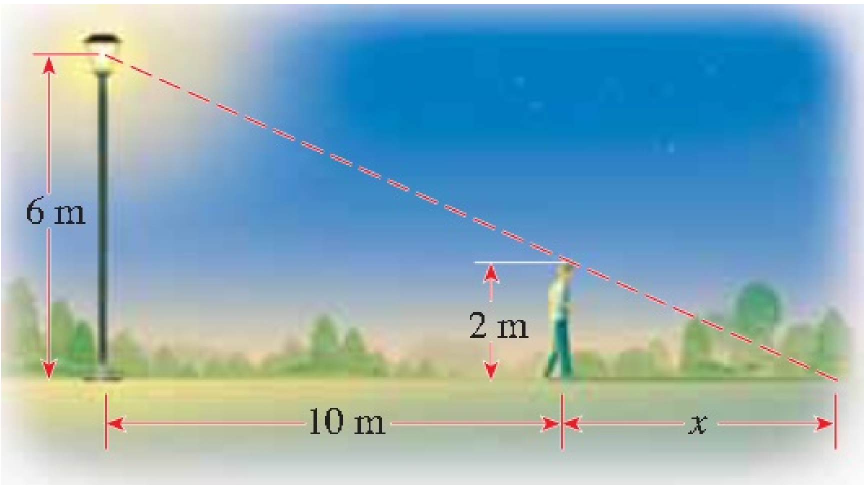
47. Enmarcar una pintura Ali pinta con acuarela en una hoja de papel de 20 pulgadas de ancho por 15 pulgadas de alto. A continuación pone esta hoja en un marco de cartón de modo que una franja de ancho uniforme del marco de cartón se ve a todo alrededor de la pintura. El perímetro del marco de cartón es de 102 pulgadas. ¿Cuál es el ancho de la franja del marco de cartón que se ve alrededor de la pintura?



49. Alcance de una escalera Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra un edificio. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies del edificio. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?



51. **Longitud de una sombra** Un hombre está alejándose de un poste de alumbrado que tiene una fuente de luz a 6 m sobre el suelo. El hombre mide 2 m de alto. ¿Cuál es la longitud de la sombra del hombre cuando éste está a 10 m del poste? [*Sugerencia:* Use triángulos semejantes.]



53. **Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% debe mezclarse con una solución al 30% para producir 300 mL de una solución al 50%?

54. **Problema de mezclas** ¿Qué cantidad de ácido puro debe agregarse a 300 mL de una solución al 50% para producir una solución ácida al 60%?

55. **Problema de mezclas** Una joyera tiene cinco anillos, cada uno de los cuales pesa 18 g, hechos de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Ella decide fundir los anillos y agregar suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe agregar?

67. **Distancia, rapidez y tiempo** Wendy hizo un viaje de Davenport a Omaha, una distancia de 300 millas. En parte, viajó en autobús que llegó a la estación de ferrocarril justo a tiempo para que completara su viaje en tren. El autobús promedió 40 mi/h y el tren promedió 60 mi/h. Todo el viaje tomó 51 h. ¿Cuánto tardó Wendy en el tren?

69. **Distancia, rapidez y tiempo** Un piloto voló en jet de Montreal a Los Ángeles, una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso, el promedio de velocidad fue 20% más rápido que el de ida. El viaje redondo tardó 9 h 10 minutos. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

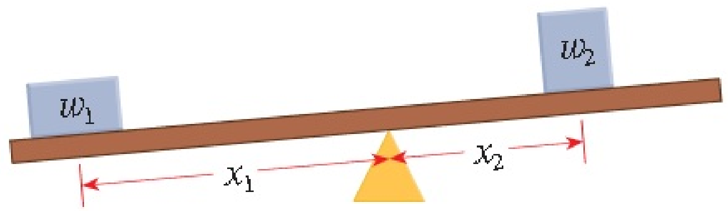
73. **Distancia, rapidez y tiempo** A una tripulación les tomó 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la rapidez de la corriente era de 3 km/h, ¿cuál era la velocidad de remar de la tripulación en aguas tranquilas?

75. Ley de la palanca La figura muestra un sistema de palancas, semejante a un subibaja (balancín) que se puede hallar en un parque de recreo infantil. Para que el sistema esté en equilibrio, el producto del peso y su distancia desde el fulcro debe ser igual en cada lado; esto es,

$$w_1x_1 = w_2x_2$$

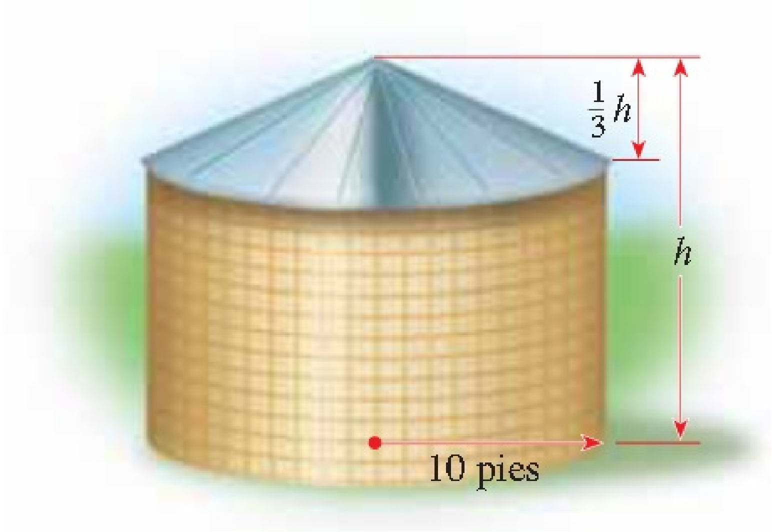
Esta ecuación recibe el nombre de **ley de la palanca** y fue descubierta por Arquímedes (vea página 729).

Una mujer y su hijo están jugando en un subibaja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del fulcro. Si el hijo pesa 100 lb y la madre pesa 125 lb, ¿dónde debe sentarse la mujer para que el subibaja esté balanceado?



83. Costos de construcción La ciudad de Foxton está a 10 millas al norte de un camino abandonado de dirección este-oeste que pasa por Grimley, como se ve en la figura. El punto del camino abandonado más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Oficiales del condado están por construir un nuevo camino que enlaza las dos ciudades. Han determinado que restaurar el camino antiguo costaría $100,000 por milla, mientras que construir un nuevo camino costaría $200,000 por milla. ¿Cuánto del camino abandonado debe usarse (como se indica en la figura) si los oficiales tienen intención de gastar exactamente $6.8 millones de dólares? ¿Costaría menos que esto la construcción de un nuevo camino que conecte las ciudades directamente?

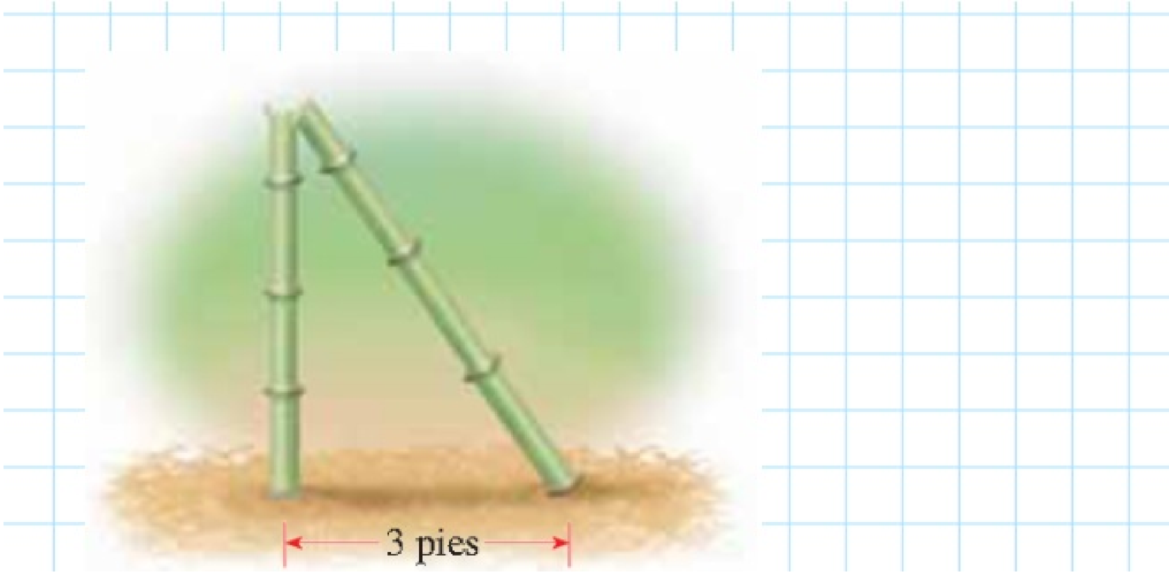
87. Dimensiones de una estructura Un silo de almacenamiento para maíz está formado de una sección cilíndrica hecha de malla de alambre, rematada por un techo cónico de estaño, como se ve en la figura. La altura del techo es un tercio de la altura de toda la estructura. Si el volumen total de la estructura es 1400π pies^3 y su radio es 10 pies, ¿cuál es su altura? [*Sugerencia* Use las fórmulas de volumen al final del libro.]



89. Un antiguo problema chino Este problema ha sido tomado de un libro de texto chino llamado *Chui-chang suan-shu*, o *Nueve Capítulos del Arte Matemático*, que fue escrito hacia el año 250 a.C.

Un tallo de bambú de 10 pies de largo se descompone en forma tal que su punta toca el suelo a 3 pies de la base del tallo, como se ve en la figura. ¿Cuál es la altura de la rotura?

[*Sugerencia*: Use el Teorema de Pitágoras.]



SECCIÓN 1.6 Respuestas ejercicios impares

19. 400 mi **21.** \$9000 al $4\frac{1}{2}\%$ y \$3000 al 4% **23.** 7.5% **25.** \$7400 **27.** \$45,000 **29.** Plomero, 70 h; ayudante, 35 h **31.** 40 años de edad **33.** 9 de 1 centavo, 9 de 5 centavos, 9 de diez centavos **35.** 45 pies **37.** 120 pies por 120 pies **39.** 25 pies por 35 pies **41.** 60 pies por 40 pies **43.** 120 pies **45.** **(a)** 9 cm **(b)** 5 pulg. **47.** 4 pulg. **49.** 18 pies **51.** 5 m **53.** 200 mL **55.** 18 g **57.** 0.6 L **59.** 35% **61.** 37 min 20 s **63.** 3 h **65.** Irene 3 h, Henry $4\frac{1}{2}$ h **67.** 4 h

69. 500 mi/h **71.** 50 mi/h (o 240 mi/h) **73.** 6 km/h **75.** 6.4 pies del fulcro **77.** 2 pies por 6 pies por 15 pies **79.** 13 pulg. por 13 pulg. **81.** 2.88 pies **83.** 16 mi; no **85.** 7.52 pies **87.** 18 pies **89.** 4.55 pies

Un acertijo Un actor de cine, que no está dispuesto a decir su edad, planteó el siguiente acertijo a un columnista de chismes. "Hace siete años, yo tenía 11 veces la edad de mi hija; ahora tengo cuatro veces su edad." ¿Cuál es la edad del actor?

45. **Longitud y área** Encuentre la longitud x de la figura. Se da el área de la región sombreada.

(a)