Sólidos de Revolución
MA3 A-2020, Universidad Central
Francisco de Caldas, Angelo

MÉTODO DEL DISCO

Teorema: Sea $y=f(x)$ una función Continua y No negativa definida sobre el Intervalo $[a,b]$ y sea $R=\{(x,y)/a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$. Sabemos el Sólido que se obtiene de girar R alrededor del Eje X tiene un Volumen V que viene dado por la Fórmula:

$$V=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

Sólido de Revolución.

Volumen de Aproximación con los Escalonados Inferiores $=\sum_{i=0}^{n-1}\pi(f(x_i))^2\Delta x_i$

Volumen de Aproximación mediante Escalonados Superiores es $\sum_{i=0}^{n-1}\pi(f(x_{i+1}))^2\Delta x_i$

$x_{i+1}\le x_i\le x_i$ es el valor que Produce el máximo en Cada Subintervalo

Por lo que Sabemos de la Teoría Sobre Integrabilidad de cierta función: en este caso f Positiva y Continua $\Rightarrow$ f es Integrable en $[a,b]$

Existe un Número V tq:

$$\pi\sum_{i=0}^{n}[f(x_i)]^2\Delta x_i\le V\le\pi\sum_{i=0}^{n}(f(x_{i+1}))^2\Delta x_i$$

Sumas Inferiores ≤ V ≤ Sumas Superiores

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

Fórmula de Volumen para el método del disco.

x = Variable Indpt

Ej ①

$R=\{(x,y)/0\le x\le 2,\ 0\le y\le x^2\}$

R se gira alrededor del Eje X.

$$V=\pi\int_0^2(x^2)^2dx=\pi\int_0^2x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2$$

$$V=\pi\left[\frac{2^5}{5}-0\right]=\pi\left(\frac{32}{5}\right)=\frac{32}{5}\pi$$ Unidades Cúbicas de Volumen.

Eje Z: $V=\frac{32}{5}\pi\ cm^3$

Cuando se Gira alrededor del Eje Y:

$R=\{(x,y)/c\le y\le d,\ 0\le x\le g(y)\}$

$$V=\pi\int_c^d[g(y)]^2dy$$

V. Indpt es "y" V. Depte es x.

Rotación de R alrededor del Eje y

Rotación Respecto al Eje X

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$$

Notese que la Región está unida al Eje de Rotación.

$R=\{(x,y)/0\le y\le 1,\ 0\le x\le\sqrt{y}\}$

$V=\pi\int_0^1(\sqrt{y})^2dy=\pi\int_0^1y\,dy=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\pi/2$ Unidades Cúbicas de Volumen

$R=\{(x,y)/0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 1\}$

$V=\pi\int_0^1[1-y]dy=\pi/2$

Ej:

① Rotación alrededor Eje X

$R_{mayor}=\sqrt{x}$, $R_{menor}=x^2$

$V=\pi\int_0^1[(\sqrt{x})^2-(x^2)^2]dx=\pi\int_0^1[x-x^4]dx$

$=\pi\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right]=\pi\frac{3}{10}$ unid³

$y=\sqrt{x}\to x=y^2$

$y=x^2\to x=\sqrt{y}$

Situación diferente:

$V_T=V_1-V_2=\pi\int_a^b[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$

R_{mayor} = función cuya distancia al Eje de Rotación es más grande.

R_{menor} = función cuya distancia al Eje de rotación es más pequeña

En un Contexto diferente

Pregunta: otra Configuración.

$V_T=V_1-V_2=\pi\int_c^d[(f(y))^2-(g(y))^2]dy$

y = Variable Indpt.

En R_1: $R_{máx}=g(y)$, $R_{mín}=f(y)$, $V_1=\pi\int_{y_0}^{d}[(g(y))^2-(f(y))^2]dy$

En R_2: $R_{máx}=f(y)$, $R_{mín}=g(y)$, $V_2=\pi\int_{c}^{y_0}[(f(y))^2-(g(y))^2]dy$

$V_T=V_1+V_2$

En R_1: $R_{máx}=g(x)$, $R_{mín}=f(x)$ en $I=[a,x_0]$ $\Rightarrow V_1=\pi\int_a^{x_0}[(g(x))^2-(f(x))^2]dx$

En R_2: $R_{máx}=f(x)$, $R_{mín}=g(x)$ en $I=[x_0,b]$

$V_2=\pi\int_{x_0}^{b}[(f(x))^2-(g(x))^2]dx$