Método de la Corteza Cilíndrica

Lunes, 13 de julio de 2020 10:30 a.m.

Cómo obtuvimos

Fórmula para obtener una Corteza Cilíndrica Rectangular

$V_{cilindro} = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi (r_2^2 - r_1^2) h = \pi (r_2+r_1)(r_2-r_1) h$

$V_{corteza} = 2\pi \underbrace{\left(\frac{r_2+r_1}{2}\right)}_{\text{radio promedio}} (r_2-r_1) h$

Radio Promedio = Distancia al Eje.

Dos Cilindros de radios r_1, r_2; $r_1 < r_2$ y altura h.

$V_{cilindro} = (\text{Área Base})(\text{altura}) = \pi r^2 h$

$\boxed{V_{corteza} = 2\pi \bar{r} \Delta r h}$ $\Delta r = r_2 - r_1 = \text{grosor}$

FÓRMULA PARA EL MÉTODO DE LA CORTEZA CILÍNDRICA

$R = \{(x,y) / a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$

Cada Rectángulo r_i Cuando gira alrededor del Eje de Rotación genera una Corteza Cilíndrica t_i cuyo volumen

$\boxed{V(t_i) = 2\pi \underbrace{\bar{x}_i}_{\text{Radio Promedio}} \underbrace{\Delta x}_{\text{altura}} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{altura}}}$

Corteza Cilíndrica t_i formada con el Valor máximo $f(\xi_i)$

$V(t_i) = 2\pi \underbrace{\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)}_{\text{Radio Promedio}} \underbrace{\Delta x}_{\text{altura}} \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{altura}} = 2\pi \bar{x}_i \Delta i x \cdot f(\xi_i)$

Por Defecto

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} V(t_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i \underbrace{f(\xi_i)}_{\text{Min}} \Delta_i x}$

Con los Valores Máximos:

$R_i = \{(x,y) / x_{i-1} \le x \le x_i,\ 0 \le y \le f(\eta_i)\}$ máximo

Corteza Cilíndrica T_i

$V(T_i) = 2\pi \underbrace{\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)}_{\bar{x}_i} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\Delta_i x} \underbrace{f(\eta_i)}_{\text{altura}} = 2\pi \bar{x}_i f(\eta_i) \Delta_i x$

Radio Promedio — Distancia al Eje de Rotación

Por Exceso

$\boxed{\sum_{i=1}^{n} V(T_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \bar{x}_i \underbrace{f(\eta_i)}_{\text{Max}} \Delta_i x}$

Valores Mínimos de f — Por Defecto — V_i Entre $V_i = ?$

Máximos Valores de f — Por Exceso — R_i Corteza — $V_i = ?$

De forma Natural:

$$\sum_{i=1}^{n} V(t_i) \le V \le \sum_{i=1}^{n} V(T_i)$$

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f(\xi_i) \Delta_i x \le V \le 2\pi \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i f(\eta_i) \Delta_i x$$

Cuando n es cada vez más grande

$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b \underbrace{x}_{\text{Distancia al Eje de Rotación}} \underbrace{f(x)}_{\text{altura de la Corteza Cilíndrica}} dx}$$ girando R alrededor del Eje y

En Caso que se tenga

$$\boxed{V = 2\pi \int_c^d \underbrace{y}_{\text{Distancia al Eje de Rotación}} \underbrace{g(y)}_{\text{altura de la Corteza}} dy}$$ girando R alrededor del Eje x

Ejemplo ①

ⓐ $R = \{(x,y) / 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le x^2\}$

$V = 2\pi \int_0^3 \underbrace{x}_{\text{distancia al Eje de Rot.}} \cdot \underbrace{(x^2)}_{\text{altura}} dx = 2\pi \int_0^3 x^3 dx = \frac{2\pi x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}\left[3^4 - 0\right] = \boxed{\frac{81\pi}{2}}$ unidades Cúbicas de Volumen. R/TA

$V = 2\pi \int_0^3 x(x^2) dx = 2\pi \int_0^3 x^3 dx = 2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^3 = \frac{\pi}{2}\left[\frac{3^4}{2}\right] = \frac{81\pi}{2}$

ⓑ Girando alrededor de la Recta Vertical $x = -2$

$V = 2\pi \int_0^3 \underbrace{(2+x)}_{\text{Dist Eje de Rotación}} \cdot \underbrace{x^2}_{\text{altura}} dx = 2\pi \int_0^3 (2x^2 + x^3) dx =$ Ejercicio Calcular esta Integral

distancia al Eje de Rotación $= 2 + x$

$V = 2\pi \int_0^3 (5-x) x^2 dx$

$= 2\pi \int_0^3 (5x^2 - x^3) dx$

$= 2\pi \left[\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^3\right]$

Distancia al Eje de Rotación $= 5 - x$

$V = 2\pi \int_0^3 (5-x) x^2 dx = 2\pi \int_0^3 (5x^2 - x^3) dx =$ Terminarlo

Volumen

Página 512 - 513 Probar Ejercicios ✓

$$\int \sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos\alpha - \cos x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\cos\alpha - \cos x}} dx = \int \frac{\sqrt{2}\,\text{sen}(x/2)\, dx}{\sqrt{2}\cos\alpha/2 \sqrt{1 - \left(\frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}\right)^2}} = \int \frac{\frac{\text{sen}(x/2)}{\cos(\alpha/2)} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}\right)^2}} = \int \frac{-2du}{\sqrt{1-u^2}} = -2\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -2\,\text{arcsen}(u) + C$$

$\boxed{\text{sen}^2 x/2 = \frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow 2\,\text{sen}^2(x/2) = 1 - \cos x$

$\boxed{\sqrt{2}\,\text{sen}(x/2) = \sqrt{1-\cos x}}$ Numerador

$\cos^2\alpha/2 = \frac{1+\cos\alpha}{2} \Rightarrow 2\cos^2\alpha/2 = 1 + \cos\alpha$

$\cos\alpha = 2\cos^2\alpha/2 - 1$

$\cos x = 2\cos^2 x/2 - 1$

$\cos\alpha - \cos x = 2\cos^2\alpha/2 - 2\cos^2 x/2$

$2\cos^2\alpha/2 =$ Número Positivo

$\cos\alpha - \cos x = 2\cos^2\alpha/2 \left[1 - \frac{\cos^2 x/2}{\cos^2\alpha/2}\right]$

$\cos\alpha - \cos x = 2\cos^2\alpha/2 \left[1 - \left(\frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}\right)^2\right]$

Denominador $= \sqrt{\cos\alpha - \cos x} = \sqrt{2}\cos\alpha/2 \sqrt{1 - \left(\frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}\right)^2}$

Fórmula ⑬ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

$a^2 = 1$; $u = \frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}$

$du = \frac{-\frac{1}{2}\text{sen}(x/2)}{\cos\alpha/2} dx$

$-2du = \frac{\text{sen}(x/2)}{\cos\alpha/2} dx$

$a = 1$

R/TA.

$= -2\,\text{arcsen}\left(\frac{\cos x/2}{\cos\alpha/2}\right) + C$

① Eje Rotación es el $(\text{Eje } y)$

$V = 2\pi \int_0^1 x[\sqrt{x} - x] dx$

② Rotación Eje $x = 6$

$V = 2\pi \int_0^1 (6-x)[\sqrt{x} - x] dx$

③ Rotación Eje $x = 1$

$V = 2\pi \int_0^1 (1-x)[\sqrt{x} - x] dx$

④ Rotación al $x = 10$

$V = 2\pi \int_0^1 (10-x)[\sqrt{x} - x] dx$

Nota:

$V_1 = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$

$V_2 = 2\pi \int_a^b x g(x) dx$

$V_T = V_1 - V_2$

$V_T = 2\pi \int_a^b x f(x) dx - 2\pi \int_a^b x g(x) dx$

$$\boxed{V_T = 2\pi \int_a^b x\left(f(x) - g(x)\right) dx}$$

distancia al Eje de Rotación