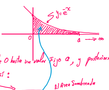
Introducción: Ej) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$



Se puede de Cálculo integrando el área del área de 0 hasta un límite sign a, y posteriormente tender $a \to \infty$ en donde el límite así:

$$\boxed{\int_0^a e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^a = -e^{-a}+1 = 1-\frac{1}{e^a}}$$

Área Sombreada

y ahora, $\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{e^a}\right) = 1$ $\quad \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^a}\right)=0$

Así que de manera natural $\boxed{\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx = 1}$

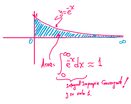
$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = 1-\frac{1}{e^0}$$

$$\underbrace{\lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a e^{-x}dx\right]}_{\int_0^{\infty} e^{-x}dx} = \lim_{a\to\infty}\left[1-\frac{1}{e^a}\right] = 1$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-x}dx$$

En este caso se dice que la Integral Impropia $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$ es Convergente!

y su valor es 1.



Ej.1) Calcular $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$

De nuevo se puede de Cálculo la integral dada el límite inferior 1 hasta un valor x_0 a su derecha y posteriormente el resultado se le sacar el límite cuando $x_0 \to \infty$ así:

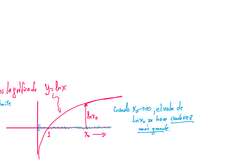
$$\int_1^{x_0}\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^{x_0} = \ln x_0 - \cancel{\ln 1} = \boxed{\ln x_0}$$

Área Sombreada

De forma natural $\boxed{\int_1^{\infty}\frac{dx}{x} = \lim_{x_0\to\infty}\int_1^{x_0}\frac{dx}{x} = \lim_{x_0\to\infty}\left[\ln x_0\right] = \infty}$

Es decir, el límite no existe.

Así que $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ es **Divergente**! Área Sombreada Aunque es más Pequeña de Área.



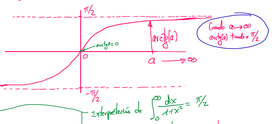
En este primer caso, la función integrando es Continua en el intervalo de Longitud infinita.

Definición ① Supóngase f Continua $\forall x \geq x_0$. Si $\lim_{a\to\infty}\int_{x_0}^a f(x)dx$ **existe**, decimos que $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ es **Convergente** y converge al valor dado por el límite. Si el límite NO existe, $\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx$ se dice **Divergente** y la integral impropia No está definida.

$$\boxed{\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{x_0}^a f(x)dx}$$

Ejemplo ② Determinar si $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ es Convergente o Divergente.

Recordemos la gráfica de $y=\arctg(x)$



Solución: $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_0^a\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\left[\arctg(x)\Big|_0^a\right] = \lim_{a\to\infty}\left[\arctg(a)-\cancelto{0}{\arctg(0)}\right] = \frac{\pi}{2}$

Así que $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ Por tanto, $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ es Convergente! y su valor de Convergencia es $\pi/2$.

Interpretación de $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi/2$

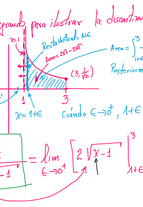
$\int_0^a\frac{dx}{1+x^2} = \arctg a$

El CASO ② Tiene que Ver Cuando el intervalo de integración es finito y la función integrando NO es acotada en algún punto del intervalo de integración.

Ejemplo ① Determinar si $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es Convergente o Divergente.

Solución: Primero la gráfica de la función integrando para ilustrar la discontinuidad

En $x=1$ la función es Asintótica



Posteriormente se Saca el límite Cuando $\epsilon\to 0^+$ así:

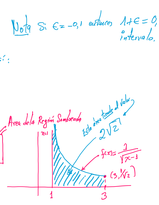
$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

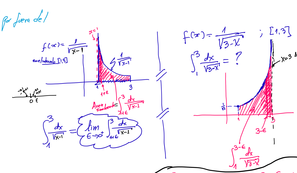
* En estos casos, se recomienda Tomar un valor $1+\epsilon$ con $\epsilon\to 0^+$ y a partir de la siguiente forma:

$$\boxed{\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\epsilon}^3\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[2\sqrt{2}-\cancelto{0}{2\sqrt{\epsilon}}\right] = \boxed{2\sqrt{2}}$$

$\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \int(x-1)^{-1/2}dx = \boxed{2(x-1)^{1/2}+C}$

Nota: Si $\epsilon=-0.1$ estamos $1+\epsilon=0.9$ pues por fuera del intervalo.





$$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{3-x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_1^{3-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$$

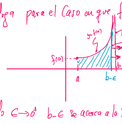
Así que $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{2}$ luego la Integral Impropia $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ es Convergente!

Definición ② Sea f Continua en $a<x\leq b$ pero NO Continua en $x=a$. Entonces $\int_a^b f(x)dx$ es Convergente si:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx \quad \text{existe!}$$

y el valor de $\int_a^b f(x)dx$ es el valor del límite así: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)dx}$ ②

Si el límite No Existe, se dice que la Integral es **Divergente**. La Definición es análoga para el Caso en que f es Continua $a\leq x<b$, y en $x=b$ es Asintótica.



$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx}$$

Aquí la Asíntota está al final del intervalo

Cuando $\epsilon\to 0^+$ $b-\epsilon$ se acerca a la Recta $x=b$

Nota $\int\frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x|+C$

Ej.② Determinar si $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ es Convergente o Divergente.

Solución:

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{1-x} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\ln|1-x|\Big|_0^{1-\epsilon}\right]$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\ln|\cancel{1}-(1-\epsilon)| + \cancelto{0}{\ln|1|}\right]$$

$$\int_0^1\frac{dx}{1-x} = -\lim_{\epsilon\to 0^+}[\ln\epsilon] = \infty$$

Así que la Integral $\int_0^1\frac{dx}{1-x}$ es Divergente!

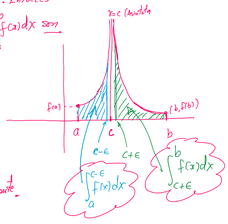
Recordemos la gráfica de $y=\ln x$

El Caso ③ Cuando la Discontinuidad (Asíntota) se presenta en el interior del intervalo.

Definición ③ Supóngase f Continua para $a\leq x\leq b$, excepto para $x=c$ donde $a<c<b$. Entonces se dice que $\int_a^b f(x)dx$ es **Convergente** si las dos integrales $\int_a^c f(x)dx$ y $\int_c^b f(x)dx$ son **Convergentes**. En este Caso se define:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_a^{c-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{c+\epsilon}^b f(x)dx$$

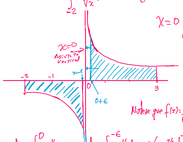


Si alguna de las dos integrales diverge entonces $\int_a^b f(x)dx$ se dice divergente.

Ejemplo: Determinar si $\int_{-2}^3\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ es Convergente o Divergente.

$x=0$ es Asíntota interna al intervalo $[-2,3]$. En este caso se divide en dos Partes la integral así:

$$\int_{-2}^3 x^{-1/3}dx = \int_{-2}^0 x^{-1/3}dx + \int_0^3 x^{-1/3}dx$$



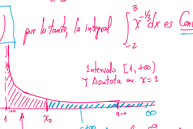
Notar que $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ No es acotada Cuando $x\to 0$

Calculando el área Izquierda: $\int_{-2}^0 x^{-1/3}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-2}^{-\epsilon} x^{-1/3}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{-2}^{-\epsilon}\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{3}{2}\cancelto{0}{\sqrt[3]{(\epsilon)^2}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right) = \boxed{-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}}$

Calculando el área Derecha: $\int_0^3 x^{-1/3}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^3 x^{-1/3}dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\Big|_{\epsilon}^3\right] = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{9} - \frac{3}{2}\cancelto{0}{\sqrt[3]{\epsilon^2}}\right] = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$

Así que finalmente $\boxed{\int_{-2}^3 x^{-1/3}dx = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{4}\right)}$ por lo tanto, la integral $\int_{-2}^3 x^{-1/3}dx$ es **Convergente**.

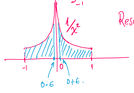
Nota: Pueden darse casos más generales: Combinación de estos.



$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^{x_0} f(x)dx + \lim_{a\to\infty}\int_{x_0}^a f(x)dx$$

$$\int_1^{x_0} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{1+\epsilon}^{x_0} f(x)dx \qquad \int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{x_0}^a f(x)dx$$

Precaución: Determinar si $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$ es Convergente. En Caso afirmativo hallar su valor.



Resolviendo $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\epsilon}^1$

$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\epsilon}-1\right) =$ No Existe el límite por lo tanto, la integral $\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2}$ es Divergente!

En Caso que no tuvimos en Cuenta el análisis de la función integrando dentro del intervalo de Integración se concluye en un ERROR. Veamos lo:

$$\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^1 x^{-2}dx = \frac{-1}{x}\Big|_{-1}^1 = (-1-1) = -2 \quad (\text{FALSO})$$

El resultado es falso ya que $f(x)=\frac{1}{x^2}$ es una función Positiva y el valor de la Integral definida debe ser Positivo (Por la Definición de Integral)

Ejercicios: Página 518-519 del 1 al 33 (Impares).

Próxima Clase Sucesiones y Series.