Técnicas de integración o cálculo de primitivas.

Fernando Sánchez Sánchez - 2011-12

Formula de Integración:

① $\int \frac{u^n}{du} du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

Ej: $\int \frac{(x^2+1)^3}{dx} \cdot 2x\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$ (Ej de Sustitución)

Ej: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{(\cos x)} \sin x\,dx = \boxed{\frac{\cos^2 x}{2} + C}$ (Ej de Sustitución)

Comentario: $\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos^2 x}{2}\right] = \frac{1}{2} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot \cos x$

Ej (Ej de Sustitución): $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \sin x\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)}{\cos x} \sin x\,dx = \boxed{\frac{\cos^2 x}{2} + C}$

Resuelta la integral por el método de sustitución $\cos x = u$, $-\sin x\,dx = du$, $\sin x\,dx = -du$

Ej (Ej de Sustitución): $\int \frac{(x^2+1)^3}{x^2+1} 2x\,dx = \int \frac{(x^2+1)^3}{dx} 2x\,dx = \frac{(x^2+1)^4}{4} + C$ (resuelta por el método de sustitución)

Ej: $\int (x^2+1)^3 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (x^2+1)^3 \frac{2x\,dx}{dx} = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^4}{4} + K = \boxed{\frac{(x^2+1)^4}{4} + C}$ Add $C = K$

Resuelta de la forma indicada $(x^2+1)^3$

$A = \frac{1}{2}(\ln 2 \cdot x)$

Ej: Met de Sustitución: $\int (x^2+1)^3 2x\,dx = \int u^3 \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^3 du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^4}{4}\right) + K = \boxed{\frac{(x^2+1)^4}{4} + K}$

Con $u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2} = x\,dx$

Fórmula ②: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ (Se Requiere para aplicar esta fórmula es que la derivada del denominador es el numerador)

Ej: $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C$ (Forma Directa)

Ej Sustitución: $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$

Tomamos $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$ aplicando ②

Ej: $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+5} dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+5} dx = \frac{1}{3}\left\{\ln|x^3+3x+5|\right\} + C = \boxed{\frac{1}{3}\ln|x^3+3x+5| + K}$ donde $k = \frac{C}{3}$

Resuelta la Cuenta de la forma indicada

Rta.

derivada del denominador $= 3x^2+3$

Met de Sustitución: Basta tomar $u = x^3+3x+5$

$du = (3x^2+3)dx$

$du = 3(x^2+1)dx$

$\frac{du}{3} = (x^2+1)dx$

$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+5} dx = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + K$ donde $k = C/3$

$= \frac{1}{3}\ln|x^3+3x+5| + K$

Fórmula ③: $\int e^u du = e^u + C$

Derivada del Exponente

Ej: $\int e^{3x} \cdot \frac{\cos x\,dx}{\cos x\,dx} = \boxed{e^{3x} + K}$ Forma Directa

Ej (Resuelta del Sustitución): $\int e^{3x} \cos x\,dx = \int e^u du = e^u + C = \boxed{e^{3x} + C}$ Ej Sustitución

Tomamos $u = 3x$, $du = 3dx$

Ej: $\int e^x x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int e^x 2x\,dx\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^x + C\right\} = \boxed{\frac{1}{2}e^x + K}$ $k = C/2$

Resuelta Cuenta de la forma indicada

Ej Sustitución: $\int e^x x\,dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \boxed{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}$

$u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2} = x\,dx$

Fórmula ④: $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$, $a > 0$

Derivada del Exponente

Ej: $\int 7^x x\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int 7^x \frac{2x\,dx}{2x\,dx}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{7^x}{\ln 7} + C\right\} = \boxed{\frac{7^x}{2\ln 7} + K}$ $k = C/2$

Resuelta Cuenta de la forma indicada

Por sustitución: $\int 7^x x\,dx = \frac{1}{2}\int 7^u du = \frac{1}{2}\left\{\frac{7^u}{\ln 7} + C\right\} = \boxed{\frac{7^x}{2\ln 7} + K}$ $k = C/2$

$u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2} = x\,dx$

Resuelta Cuenta de la forma indicada

Fórmulas Trigonométricas:

⑤ $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

Derivada del ángulo

⑥ $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

Derivada del ángulo

⑦ $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$

Derivada del ángulo

Ej: $\int \sec^2(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\boxed{\int \sec^2(\sqrt{x}) \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}} = 2 \cdot \operatorname{tg}(\sqrt{x}) + C$

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Por sustitución: $\int 2\sec^2(\sqrt{x}) \boxed{\frac{dx}{\sqrt{x}}} = \int 2\sec^2 u\,(2du) = 2\boxed{\int \sec^2 u\,du} = 2\operatorname{tg}(u) + C$

$u = \sqrt{x}$, $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= 2\operatorname{tg}\sqrt{x} + C$

⑧ $\int \csc^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + C$

⑨ $\int \sec u \cdot \operatorname{tg} u\,du = \sec u + C$

Derivada del ángulo

Comercial

⑩ $\int \csc u \cdot \operatorname{ctg} u\,du = -\csc(u) + C$

Derivada del ángulo

⑪ $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

Derivada del ángulo

⑫ $\int \csc u\,du = -\ln|\csc(u) + \operatorname{ctg} u| + C$

(*) Fórmulas Trigonométricas Inversas ($a > 0$)

⑬ $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

derivada de u

⑭ $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

⑮ $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\left(\frac{u}{a}\right) + C$, $|u| > a$

Ej: Pag 471 #46 Calcular $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx$

Calculemos las Primitivas:

$\int \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{a}\right) = \frac{1}{1}\operatorname{arctg}(u) + C$

$= \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C$

Fórmula ⑭

$a^2 = 1 \to a = 1$

$u = \operatorname{sen} x \to u^2 = \operatorname{sen}^2 x$

$du = \cos x\,dx$

Así que $\boxed{\int \frac{\cos x\,dx}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x) + C}$

Por lo tanto, $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}\pi/2) - \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} 0)$

$\operatorname{sen}\pi/2 = 1$, $\operatorname{sen} 0 = 0$

$= \operatorname{arctg}(1) - \cancel{\operatorname{arctg}(0)}$

$= \boxed{\pi/4}$ Rta

ya q $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$

$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\pi/4) = \operatorname{arctg} 1$

$\pi/4 = \operatorname{arctg}(1)$

Primer Método – Método de Sustitución:

① $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$

Es una de las formas indicadas

Ej: $\int (x^2+3)^7 \cdot 2x\,dx = \frac{(x^2+3)^8}{8} + C$

Forma Resuelta Directa

Resuelta

Met de Sustitución

$\int (x^2+3)^7 2x\,dx = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{(x^2+3)^8}{8} + C$

Cuenta $u = x^2+3$, $du = 2x\,dx$

Ej: $\int \frac{(\ln x)^7}{x} \cdot \frac{dx}{dx} = \int \frac{(\ln x)^7}{x} dx$ Met de Sustitución

Con $\ln x$

$\int \ln x \cdot \frac{dx}{x} = \int u^7 du = \frac{u^8}{8} + C = \frac{(\ln x)^8}{8} + C$

$u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$

Fórmula ②: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$ Met Directa

Ej: $\int \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^2+1| + C$ (Met Directa)

Ej: $\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{x^3+5} = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$ (Met Directa)

Resuelta Cuenta de la forma indicada

$\int \frac{x^2\,dx}{x^3+5} = \int \frac{\frac{1}{3}du}{u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C$

Ej Sustitución

$u = x^3+5$

$du = 3x^2\,dx \Rightarrow \frac{du}{3} = x^2\,dx$

Fórmula ③: $\int e^u du = e^u + C$

Es una de las formas indicadas

Ej: $\int e^{3x} \cos x\,dx = e^{3x} + C$ (Met Directa)

Met Sustitución

$\int e^{3x} \cos x\,dx \overset{\text{Ej}}{=} \int e^u du = e^u + C = e^{3x} + C$

$u = 3x$, $du = 3\cos x\,dx$

Ej: $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\boxed{\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{2\sqrt{x}}} = 2\left[\int e^u + C\right] = 2e^{\sqrt{x}} + 2C$

$= 2e^{\sqrt{x}} + K$ donde $K = 2C$

Fórmula ③

Met de Sustitución

$\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int e^u \cdot 2du = 2\boxed{\int e^u du} = 2\left[e^u + C\right] = 2e^u + 2C$

$= 2e^{\sqrt{x}} + K$ $k = 2C$

$u = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$du = \frac{1}{2x^{1/2}} dx$

$2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

Así: $\int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}} + K$

Familia de Primitivas

Forma Indicada

$\frac{d}{dx}\left(2e^{\sqrt{x}} + K\right) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$