SEGUNDO PARCIAL

Álgebra y trigonometría

10-03-2022

1) **Trace la gráfica de la función definida por tramos.**

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

2) **Tamaño de la pupila** Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.

(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.

3) Trace la gráfica de la función, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de la función estándar y aplicando transformaciones.

$$\boxed{y = 3 - (x-1)^2}$$

---

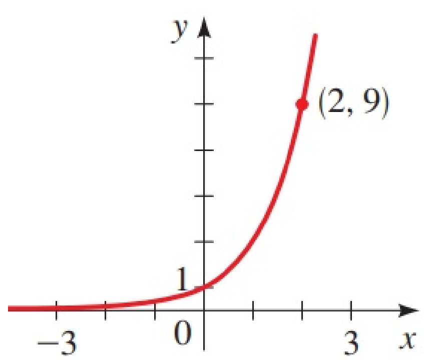
4) Encuentre la función inversa de f:

$$\boxed{f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0}$$

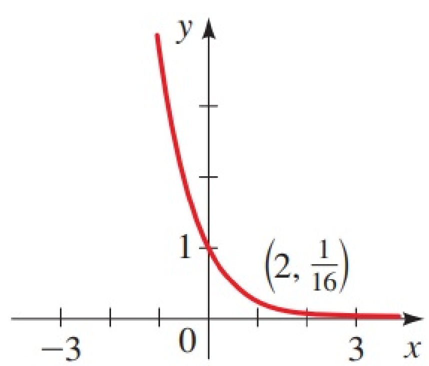
---

5) Encuentre la función exponencial f(x)=a cuya gráfica nos dan.

a)



b)



6) **Crecimiento logístico** Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

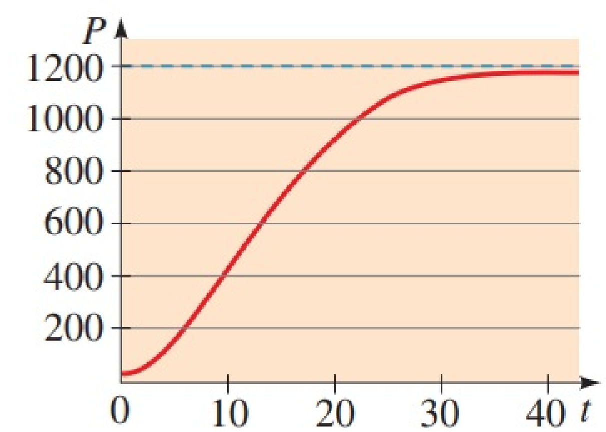
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

(b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

(c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?



3) Trace la gráfica de la función, no localizando los puntos sino empezando con la gráfica de la función estándar y aplicando transformaciones.

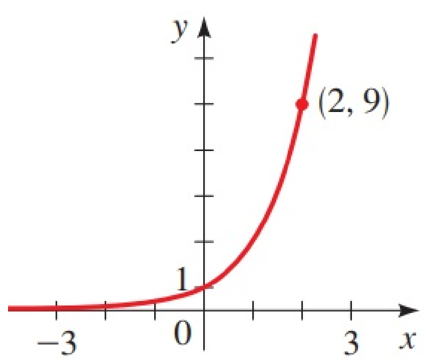
$$\boxed{y = 3 - (x-1)^2}$$

4) Encuentre la función inversa de f:

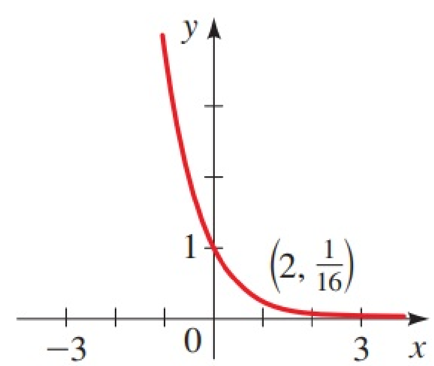
$$\boxed{f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0}$$

5) Encuentre la función exponencial $f(x)=a$ cuya gráfica nos dan.

a)



b)



6) **Crecimiento logístico** Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

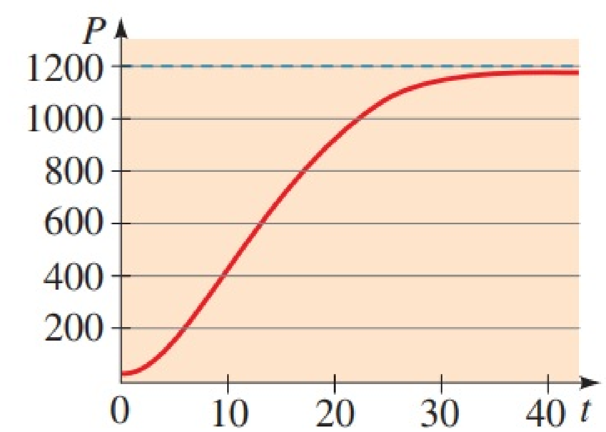
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

(b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

(c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?



7) La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, y $f(3) =$ ________.

8) Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

$$\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$$

9) Encuentre la solución de la ecuación exponencial redondeada a cuatro cifras decimales.

a) $5^{-x/100} = 2$

b) $4 + 3^{5x} = 8$

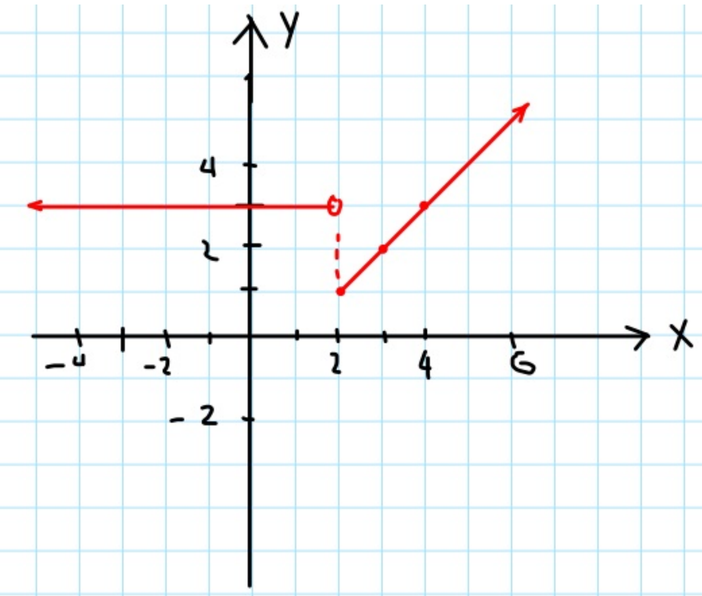
10) Despeje x.

$$\log_9(x-5) + \log_9(x+3) = 1$$

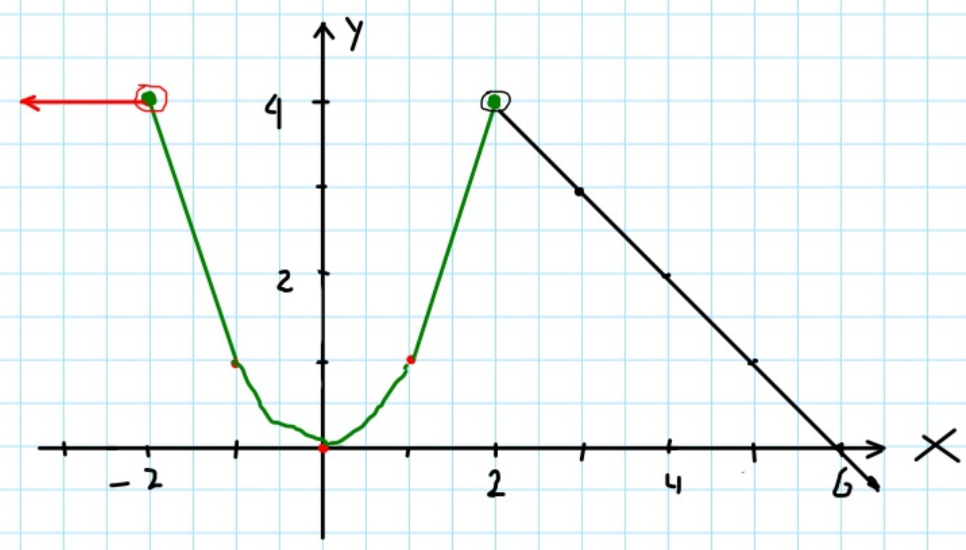
Solución Parcial No. 2 (10-03-2022)

1)

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ →



b) $f(x) = \begin{cases} \boxed{4 \qquad \text{si } x < -2} \\ \boxed{x^2 \qquad \text{si } -2 \leq x \leq 2} \\ \boxed{-x + 6 \qquad \text{si } x > 2} \end{cases}$ →



2)

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

$$\sqrt{\frac{13+7(1)^{0.4}}{1+4(1)^{0.4}}} = 2.0$$

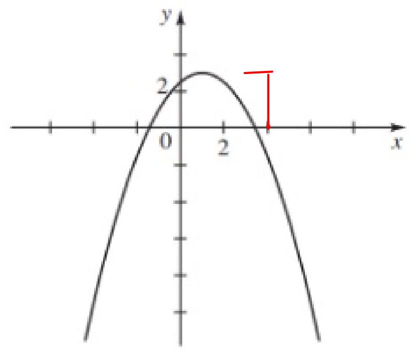
$$\sqrt{\frac{13+7(10)^{0.4}}{1+4(10)^{0.4}}} = 1.6638$$

$$\sqrt{\frac{13+7(100)^{0.4}}{1+4(100)^{0.4}}} = 1.4761$$

(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$. **(Se toman valores arbitrarios)**

R(x)	1	5	10	20	1000
	2,0000	1,7481	1,6638	1,5934	1,3874

3)



4)

$f^{-1}(x) = \sqrt{4-x}\,; x \leq 4$

5) a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

6) a) $p(0) = \frac{1200}{1+11e^{0}} = 100$

b) $p(10) = \frac{1200}{1+11e^{-0.2(10)}} = 482.18$

$p(20) = \frac{1200}{1+11e^{-0.2(20)}} = 998.77$

$p(30) = \frac{1200}{1+11e^{-0.2(30)}} = 1168.1$

c) 1200

7) La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base $\underline{\ 9\ }$. Por tanto, $f(9) = \underline{\ 1\ }$, $f(1) = \underline{\ 0\ }$, $f(\frac{1}{9}) = \underline{\ -1\ }$, y $f(3) = $ [redacted] $\underline{\ 1/2\ }$.

8) $\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$

$\log\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{(x^2+1)(x^3-7)^2}}\right) = \log\sqrt{x^2+4} - \log\sqrt{(x^2+1)(x^3-7)^2} =$

$= \log(x^2+4)^{\frac{1}{2}} - \log((x^2+1)(x^3-7)^2)^{\frac{1}{2}} =$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{1}{2}\log((x^2+1)(x^3-7)^2) =$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\log(x^3-7)^2 =$

$= \frac{1}{2}[\log(x^2+4) - \log(x^2+1) - 2\log(x^3-7)]$

9) a)

$5^{\frac{-x}{100}} = 2$

$\log_5 5^{\frac{-x}{100}} = \log_5 2$

$\frac{-x}{100} = \log_5 2$

$x = -100\left(\frac{\log 2}{\log 5}\right)$

$x = -43,0677$

b)

$4 + 3^{5x} = 8$

$3^{5x} = 4$

$\log_3 3^{5x} = \log_3 4$

$5x = \frac{\log 4}{\log 3}$

$x = \frac{1}{5}\left(\frac{\log 4}{\log 3}\right) = 0.2524$

10)

$$\log_9(x-5)+\log_9(x+3)=1$$
$$\log_9((x-5)(x+3))\ =1$$
$$(x-5)(x+3)=9^1$$
$$x^2+3x-5x-15-9=0$$
$$x^2-2x-24=0$$
$$(x+4)(x-6)=0$$
$(x+4)=0-->x=-4$ (no está definida)

$(x-6)=0-->x=6$