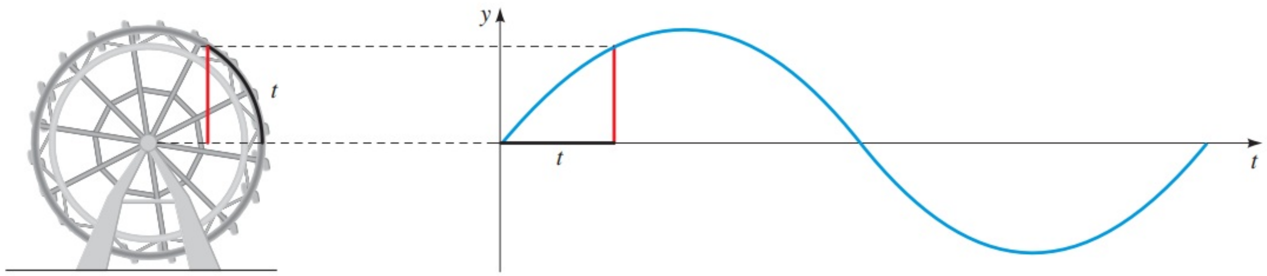
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS:



Si Usted ha subido a una rueda "Panorámica" sabe de movimiento periódico, es decir, movimiento que se repite una y otra vez. El movimiento periódico es común en la naturaleza. Considere el diario amanecer y puesta de Sol (día, noche, día, noche, …), la variación diaria de los niveles de mareas (alta, baja, alta, baja, …), o las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha, …). Para modelar tal movimiento necesitamos una función cuyos valores aumentan, después disminuyen, luego aumentan otra vez, y así sucesivamente.
Para entender cómo definir tal función, veamos a una persona que disfruta de un paseo en una "Panorámica". La gráfica muestra la altura a la que se encuentra la persona sobre el centro de la rueda en el tiempo t. Observe que la gráfica sube y baja repetidamente.

La función trigonométrica seno se define en una forma similar, usando la circunferencia unitaria (en lugar de la "rueda Panorámica").
Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas diferentes pero equivalentes:
como funciones de números reales o como funciones de ángulos.
Los dos métodos son independientes entre sí. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para aplicaciones diferentes.

LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

Para definir las funciones trigonométricas, miremos algunas propiedades de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen.

CIRCULO UNITARIO

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1 (vea Figura 1). La ecuación de esta circunferencia es

$$x^2 + y^2 = 1$$

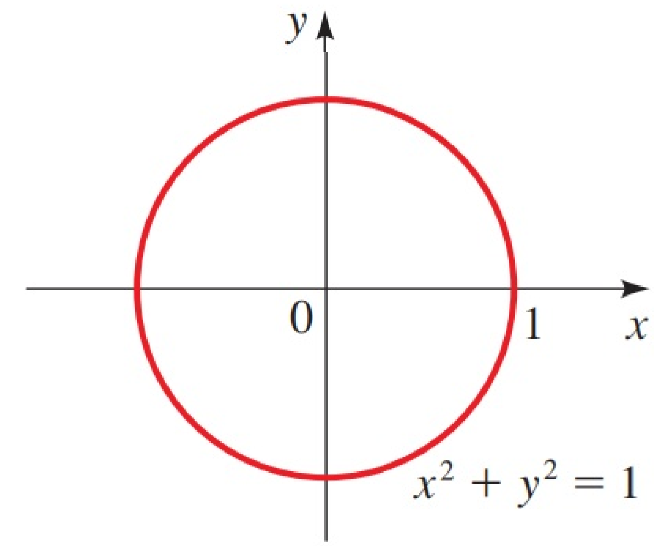


FIGURA 1 La circunferencia unitaria

EJEMPLO 1 | Un punto en la circunferencia unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en la circunferencia unitaria.

SOLUCIÓN Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Como

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en la circunferencia unitaria.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

$$P = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \stackrel{?}{=} 1$$

$$\frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1 \checkmark$$

EJEMPLO 2 | Localizar un punto sobre la circunferencia unitaria

(Fuer die Studenten)

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Encuentre su coordenada y.

Solución:

SOLUCIÓN Como el punto está en la circunferencia unitaria, tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Como el punto está en el cuarto cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, de modo que $y = -\frac{1}{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

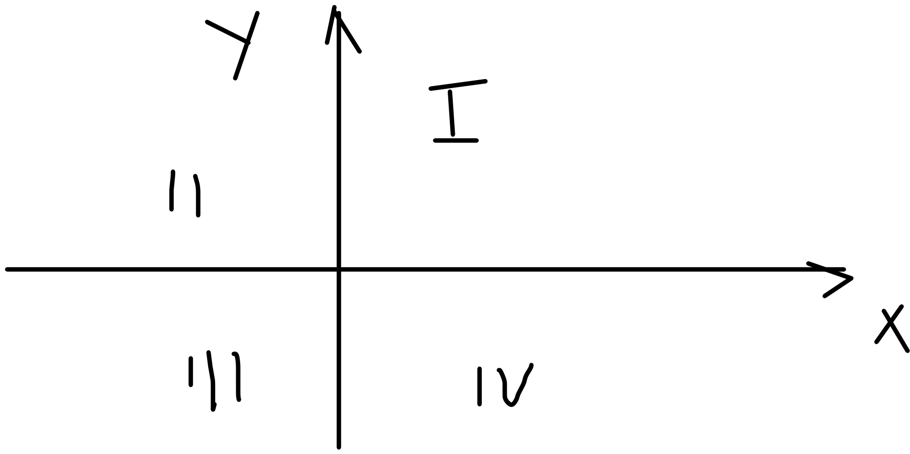
$$\underbrace{P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, y\right)}_{} \rightarrow \mathrm{IV}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{3}{4} + y^2 = 1$$

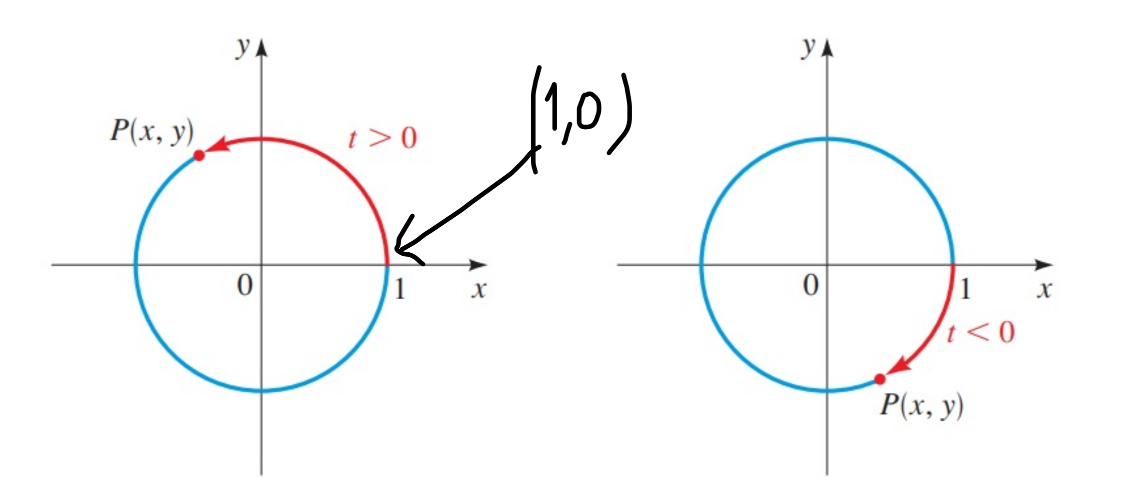
$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



Puntos terminales en la circunferencia unitaria

Suponga que t es un número real. Marquemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto (1,0) y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj si t es positiva y en el sentido de las manecillas si t es negativa (Figura 2).
En esta forma llegamos al punto P(x,y) en la circunferencia. El punto P(x,y) obtenido en esta forma se llama punto terminal determinado por el número real t.



(a) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$
(b) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$

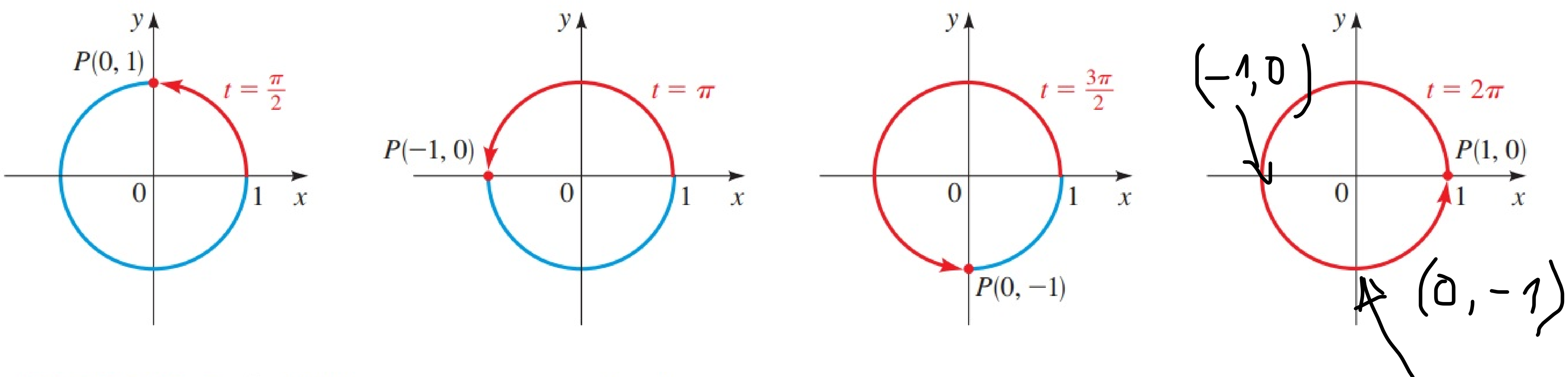
$$C = 2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$$

$$\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$$

$$\frac{1}{4}(2\pi) = \frac{\pi}{2}$$

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en (1, 0) y se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en toda la vuelta del círculo unitario y regresa a (1, 0), viaja una distancia de 2π. Para moverse la mitad alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿Dónde termina el punto cuando viaja estas distancias a lo largo del círculo? De la Figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando viaja una distancia de π iniciando en (1, 0), su punto terminal es $(-1, 0)$.

FIGURA 3 Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π.



EJEMPLO 3 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada número real t.

(a) $t = 3\pi$ **(b)** $t = -\pi$ **(c)** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

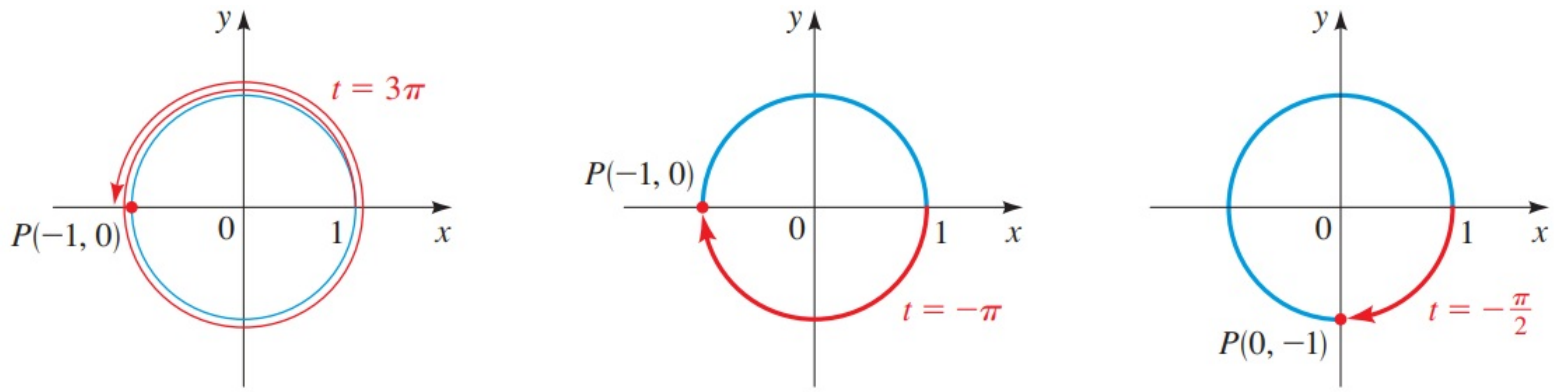
Solución:

a) $t = 3\pi \rightarrow (-1, 0)$; c) $t = -\dfrac{\pi}{2} \rightarrow (0, -1)$

b) $t = -\pi \rightarrow (-1, 0)$

SOLUCIÓN De la Figura 4 obtenemos lo siguiente:

(a) El punto terminal determinado por 3π es $(-1, 0)$.
(b) El punto terminal determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.
(c) El punto terminal determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.



Observe que diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

¿Cómo encontrar los valores (x,y) determinado por t = Pi/4?

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia de $(1, 0)$ que $(0, 1)$ a lo largo de la circunferencia unitaria (vea Figura 5).

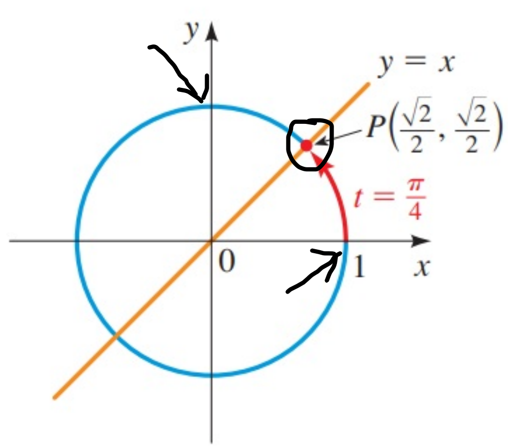


FIGURA 5

Como la circunferencia unitaria es simétrica con respecto a la recta y = x, se deduce que P se encuentra sobre la recta y = x. Por lo tanto, P es el punto de intersección (en el primer cuadrante) de la circunferencia y de la recta:

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1} \text{ y } \boxed{y = x.}$$

$$x^2 + x^2 = 1$$
$$2x^2 = 1$$

Sustituyendo x por y en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, tenemos $y = 1/\sqrt{2}$ también. Entonces, el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden usar métodos similares para hallar los puntos terminales determinados por

$$t = \pi/6 \text{ y } t = \pi/3$$

La Tabla 1 y la Figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de t.

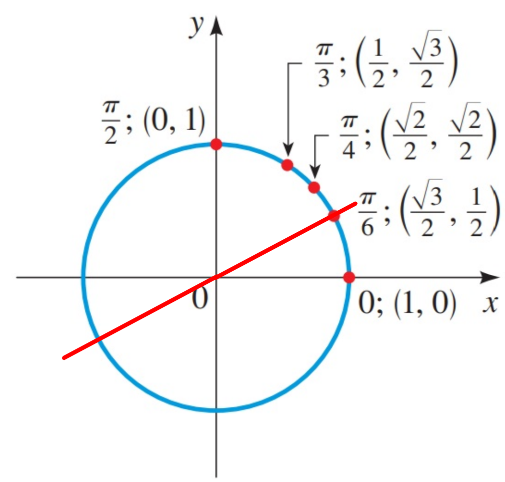
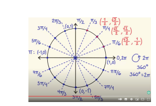


FIGURA 6

TABLA 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

https://www.youtube.com/watch?v=rldGZ2jgr5A



EJEMPLO 4 | Hallar puntos terminales

(Fuer die Studenten)

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

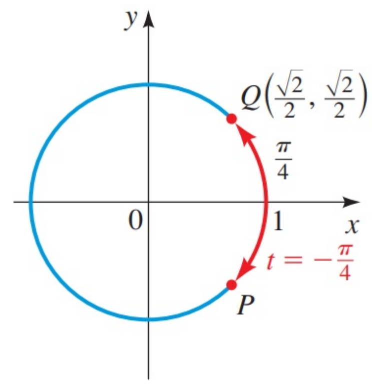
(a) $t = -\dfrac{\pi}{4}$ **(b)** $t = \dfrac{3\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{5\pi}{6}$

Solución:

a)

SOLUCIÓN

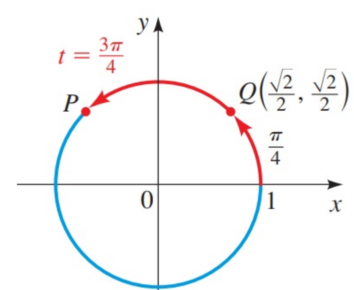
(a) Sea P el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal es $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.



(a)

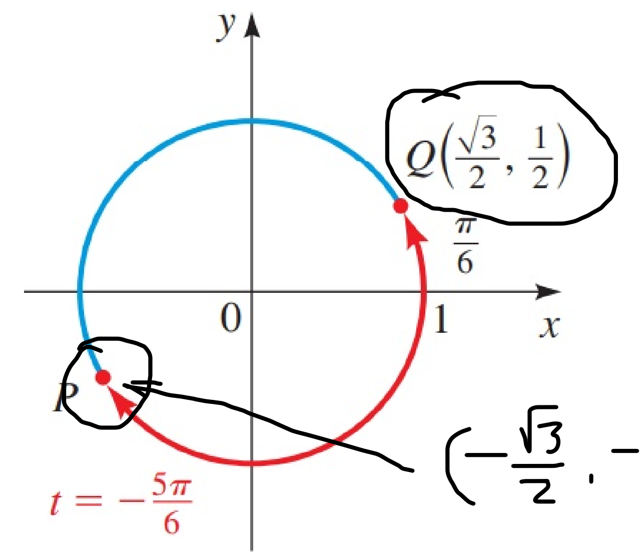
b)

(b) Sea P el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(b) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en x. Como P está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal es $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.



(b)

c)



$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

(c) Sea P el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la Figura 7(c) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Como P está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal es $P(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

El número de referencia

De los Ejemplos 3 y 4 vemos que para hallar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos saber el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos la idea del *número de referencia* para ayudarnos a hallar puntos terminales.

> **NÚMERO DE REFERENCIA**
>
> Sea t un número real. El **número de referencia $\bar{t}$** asociado con t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

$\bar{t}$

La Figura 8 muestra que para hallar el número de referencia $\bar{t}$, es útil saber el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t. Si el punto terminal se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, donde x es positiva, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *positivo*. Si se encuentra en los cuadrantes segundo o tercero, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *negativo*.

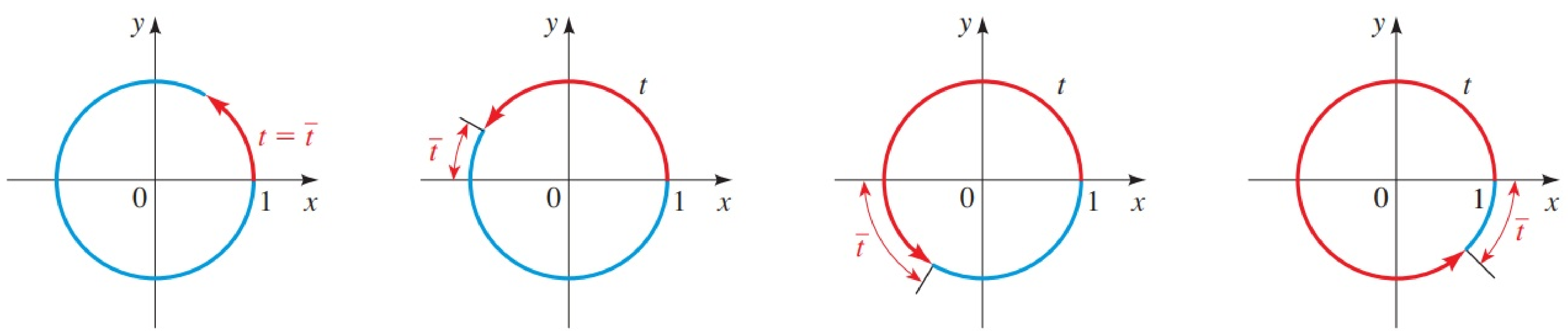


FIGURA 8 El número de referencia $\bar{t}$ por t.

EJEMPLO 5 | Hallar números de referencia

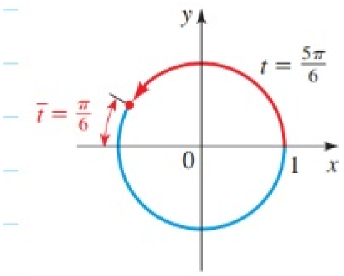
(c) y (d) fuer die Studenten

Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

(a) $t = \frac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \frac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\frac{2\pi}{3}$ **(d)** $t = 5.80$

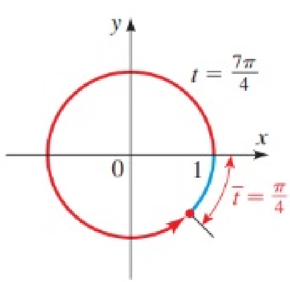
Solución (a). Mirar fig 9.

a) $\bar{t} = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$



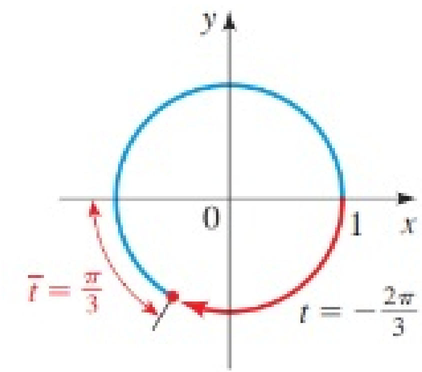
(a)

b) $\bar{t} = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$



(b)

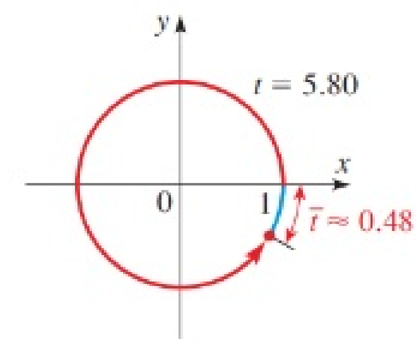
c) $\bar{t} = \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$



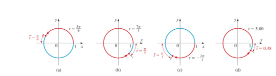
(c)

d)

$\bar{t} = 2\pi - 5{,}80 \approx 0.48$



(d)



USO DE NÚMEROS DE REFERENCIA PARA HALLAR PUNTOS TERMINALES

Para hallar el punto terminal P determinado por cualquier valor de t, usamos los pasos siguientes:

1. Encuentre el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encuentre el punto terminal $Q(a, b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se escogen de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre este punto terminal.

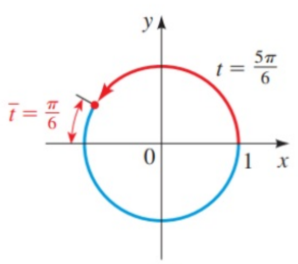
EJEMPLO 6 | Uso de números de referencia para hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **(b) y (c) fuer die Studenten**

Solución:

a)



(a)

SOLUCIÓN Los números de referencia asociados con estos valores de t se hallaron en el Ejemplo 5.

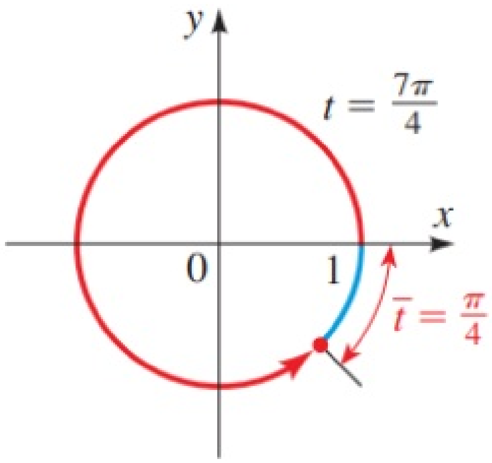
(a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, que determina el punto terminal $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

TABLA 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

Solución (b)

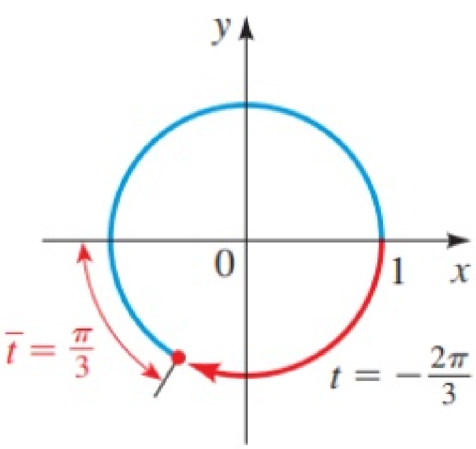


(b)

(b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, que determina el punto terminal $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Solución (c)



(c)

(c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, que determina el punto terminal $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está determinado por t en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Como el perímetro de la circunferencia unitaria es 2π, el punto terminal determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por t. Usamos esta observación en el siguiente ejemplo para hallar puntos terminales para t grandes.

EJEMPLO 7 | Hallar el punto terminal para *t* grande

Encuentre el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

SOLUCIÓN Como

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de t es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos 4π). Por lo tanto, por el Ejemplo 6(a) el punto terminal es $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$. (Vea Figura 10.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

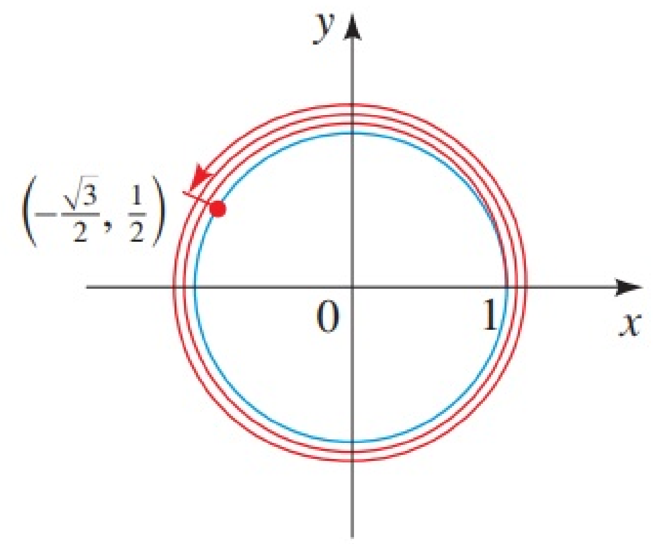


FIGURA 10

5.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. (a) La circunferencia unitaria es la circunferencia con centro en ____ con radio ____.

(b) La ecuación de la circunferencia unitaria es ______.

(c) Suponga que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre la coordenada faltante:

(i) $P(1, \square)$ (ii) $P(\square, 1)$

(iii) $P(-1, \square)$ (iv) $P(\square, -1)$

2. (a) Si marcamos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, llegamos al punto ______ determinado por t.

(b) Los puntos terminales determinados por $\pi/2$, π, $-\pi/2$, 2π son ________, ________, ________, y ______, respectivamente.

HABILIDADES

3-8 ■ Demuestre que el punto está en la circunferencia unitaria.

3. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **4.** $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **5.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

6. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **7.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **8.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

9-14 ■ Encuentre la coordenada faltante de P, usando el hecho de que P se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

Coordenadas	Cuadrante
9. $P(-\frac{3}{5}, \square)$	III
10. $P(\square, -\frac{7}{25})$	IV
11. $P(\square, \frac{1}{3})$	II

Coordenadas	Cuadrante
12. $P(\frac{2}{5}, \square)$	I
13. $P(\square, -\frac{2}{7})$	IV
14. $P(-\frac{2}{3}, \square)$	II

15-20 ■ El punto P está en la circunferencia unitaria. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información dada.

15. La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$, y la coordenada y es positiva.

16. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$, y la coordenada x es positiva.

17. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$, y la coordenada x es negativa.

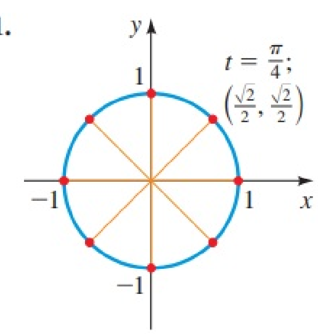
18. La coordenada x de P es positiva, y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

19. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$, y P está abajo del eje x.

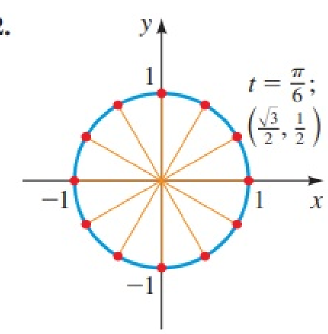
20. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$, y P está arriba del eje x.

21-22 ■ Encuentre t y el punto terminal determinado por t para cada punto de la figura. En el Ejercicio 21, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; al igual que en el Ejercicio 22, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

21.



22.



23-32 ■ Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el valor dado de t.

23. $t = \frac{\pi}{2}$ **24.** $t = \frac{3\pi}{2}$

25. $t = \frac{5\pi}{6}$ **26.** $t = \frac{7\pi}{6}$

27. $t = -\frac{\pi}{3}$ **28.** $t = \frac{5\pi}{3}$

29. $t = \frac{2\pi}{3}$ **30.** $t = -\frac{\pi}{2}$

31. $t = -\frac{3\pi}{4}$ **32.** $t = \frac{11\pi}{6}$

33. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $\pi - t$ **(b)** $-t$

(c) $\pi + t$ **(d)** $2\pi + t$

34. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $-t$ **(b)** $4\pi + t$

(c) $\pi - t$ **(d)** $t - \pi$

35-38 ■ Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

35. **(a)** $t = \frac{5\pi}{4}$ **(b)** $t = \frac{7\pi}{3}$

(c) $t = -\frac{4\pi}{3}$ **(d)** $t = \frac{\pi}{6}$

36. **(a)** $t = \frac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \frac{7\pi}{6}$

(c) $t = \frac{11\pi}{3}$ **(d)** $t = -\frac{7\pi}{4}$

37. **(a)** $t = \frac{5\pi}{7}$ **(b)** $t = -\frac{7\pi}{9}$

(c) $t = -3$ **(d)** $t = 5$

38. **(a)** $t = \frac{11\pi}{5}$ **(b)** $t = -\frac{9\pi}{7}$

(c) $t = 6$ **(d)** $t = -7$

39-52 ■ Encuentre **(a)** el número de referencia para cada valor de t y **(b)** el punto terminal determinado por t.

39. $t = \frac{2\pi}{3}$

40. $t = \frac{4\pi}{3}$

41. $t = \frac{3\pi}{4}$

42. $t = \frac{7\pi}{3}$

43. $t = -\frac{2\pi}{3}$

44. $t = -\frac{7\pi}{6}$

45. $t = \frac{13\pi}{4}$

46. $t = \frac{13\pi}{6}$

47. $t = \frac{7\pi}{6}$

48. $t = \frac{17\pi}{4}$

49. $t = -\frac{11\pi}{3}$

50. $t = \frac{31\pi}{6}$

51. $t = \frac{16\pi}{3}$

52. $t = -\frac{41\pi}{4}$

Respuestas a ejercicios impares sección 5.1

SECCIÓN 5.1 ■ PÁGINA 375

1. (a) $(0, 0)$, 1 **(b)** $x^2 + y^2 = 1$ **(c)** (i) 0 (ii) 0 (iii) 0 (iv) 0 **2. (a)** terminal **(b)** $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$
9. $-\frac{4}{5}$ **11.** $-2\sqrt{2}/3$ **13.** $3\sqrt{5}/7$ **15.** $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
17. $P\left(-\sqrt{5}/3, \frac{2}{3}\right)$ **19.** $P\left(-\sqrt{2}/3, -\sqrt{7}/3\right)$
21. $t = \pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi/2$, $(0, 1)$; $t = 3\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi$, $(-1, 0)$; $t = 5\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 3\pi/2$, $(0, -1)$; $t = 7\pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 2\pi$, $(1, 0)$
23. $(0, 1)$ **25.** $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ **27.** $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
29. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **31.** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
33. (a) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(c)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **(d)** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
35. (a) $\pi/4$ **(b)** $\pi/3$ **(c)** $\pi/3$ **(d)** $\pi/6$
37. (a) $2\pi/7$ **(b)** $2\pi/9$ **(c)** $\pi - 3 \approx 0.14$ **(d)** $2\pi - 5 \approx 1.28$
39. (a) $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$
41. (a) $\pi/4$ **(b)** $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$
43. (a) $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
45. (a) $\pi/4$ **(b)** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
47. (a) $\pi/6$ **(b)** $\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$
49. (a) $\pi/3$ **(b)** $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **51. (a)** $\pi/3$ **(b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
53. $(0.5, 0.8)$ **55.** $(0.5, -0.9)$