5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta parte usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección precedente para definir las funciones trigonométricas.

▼ Las funciones trigonométricas

Recuerde que para hallar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj si t es positiva y en la dirección de las manecillas si t es negativa (vea Figura 1). A continuación usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

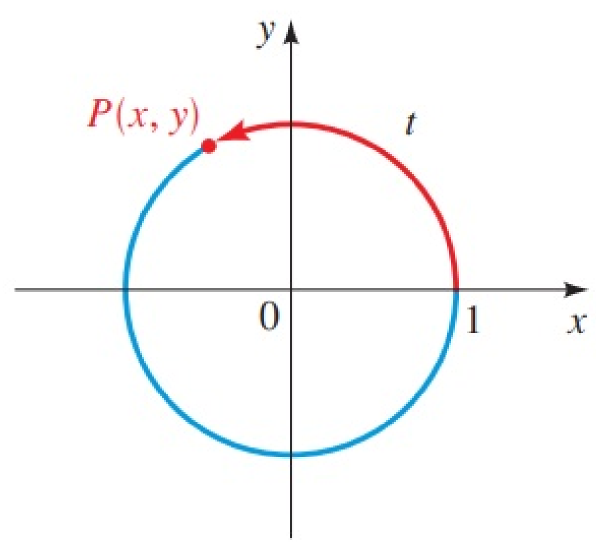


FIGURA 1

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de funciones circulares.

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $P = (0, 1)$

Solución (a)

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \; ; \; \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \; ; \; \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \; ; \; \sec\frac{\pi}{3} = 2 \; ; \; \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Solución (b)

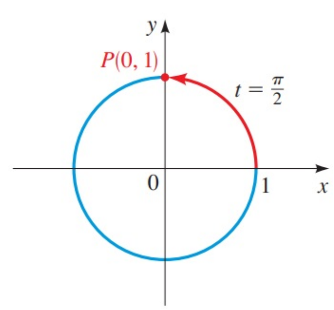


FIGURA 3

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

(b) El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea Figura 3.) Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidos porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la Tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la Tabla 1 de la Sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

TABLA 1

Valores especiales de las funciones trigonométricas

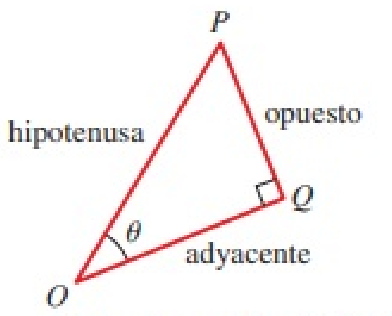
t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

Podemos fácilmente recordar los senos y cosenos de los ángulos básicos si los escribimos en la forma $\sqrt{\blacksquare}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

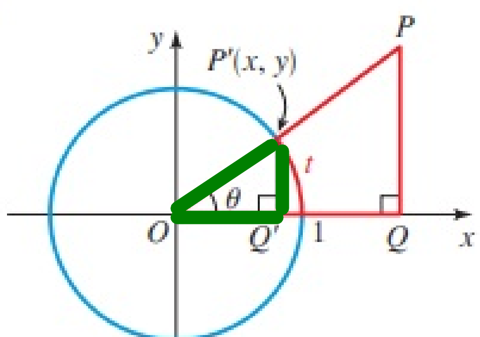
Relación con las funciones trigonométricas de ángulos

Si ya usted ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos (Capítulo 6), es probable se pregunte cómo el seno y coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para ver cómo es esto, empecemos con un triángulo rectángulo, ΔOPQ.



Triángulo rectángulo *OPQ*

Ponga el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo θ en posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes x y y.

A continuación, por la definición de las funciones trigonométricas del ángulo θ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

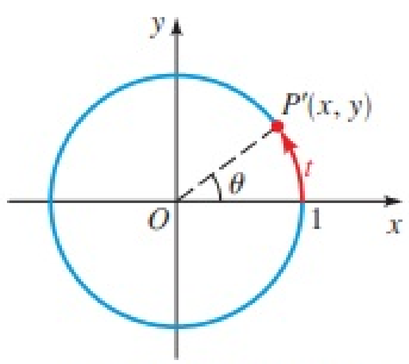
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

A continuación, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por lo tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes θ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces estudiar trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Compare la Sección 5.6 con las Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

Algunas funciones trigonométricas no pueden definirse para ciertos números reales (ver ejemplo 1). Por eso se necesita determinar sus dominios.

DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
$\operatorname{sen} x$, $\cos x$	Todos los números reales
$\tan x$, $\sec x$	Todos los números reales que no sean $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
$\cot x$, $\csc x$	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

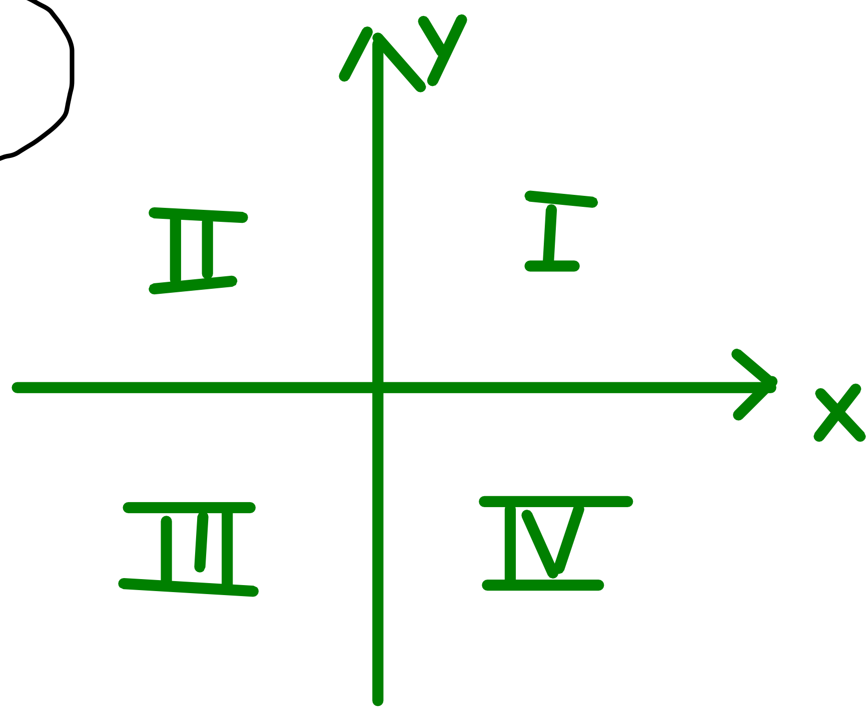
▼ Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por t está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas ambas. En consecuencia, $\operatorname{sen} t$, $\cos t$, $\csc t$ y $\sec t$ son todas negativas, mientras que $\tan t$ y ~~cos t~~ cot x son positivas. Se pueden comprobar las otras entradas del recuadro siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	$\operatorname{sen} x$, $\csc x$	$\cos x$, $\sec x$, $\tan x$, $\cot x$
III	$\tan x$, $\cot x$	$\operatorname{sen} x$, $\csc x$, $\cos x$, $\sec x$
IV	$\cos x$, $\sec x$	$\operatorname{sen} x$, $\csc x$, $\tan x$, $\cot x$

$\cos \frac{2\pi}{3} < 0$



Por ejemplo, $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor de lo siguiente.

(a) $\cos \frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen} \frac{19\pi}{4}$

(b) y (c) fuer die Studenten

Solución (a)

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

signo No. de referencia $\bar{t}$ de la tabla

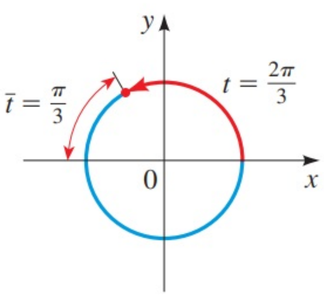
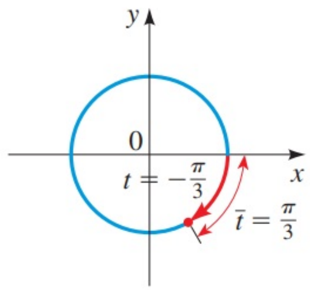


FIGURA 4 (a)

Solución (b)

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

signo No. de referencia $\bar{t}$ de la tabla

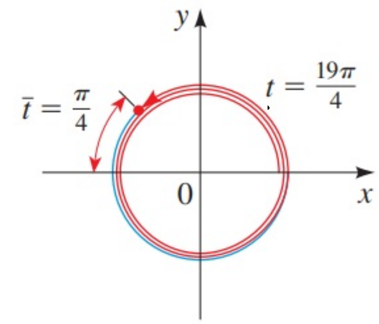


(b)

Solución (c)

$$\operatorname{sen} \frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\underbrace{\frac{19\pi}{4} - 4\pi = \frac{3\pi}{4}}$$



(c)

SOLUCIÓN

(a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(a)). Como el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

(b) El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(b)). Como el punto terminal es $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

(c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea Figura 4(c)). Como el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\operatorname{sen} \frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reste 4π | Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 7

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la Figura 5 vemos que

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}(-t) &= -y = -\operatorname{sen} t \\ \cos(-t) &= x = \cos t \\ \tan(-t) &= \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t \end{aligned}}$$

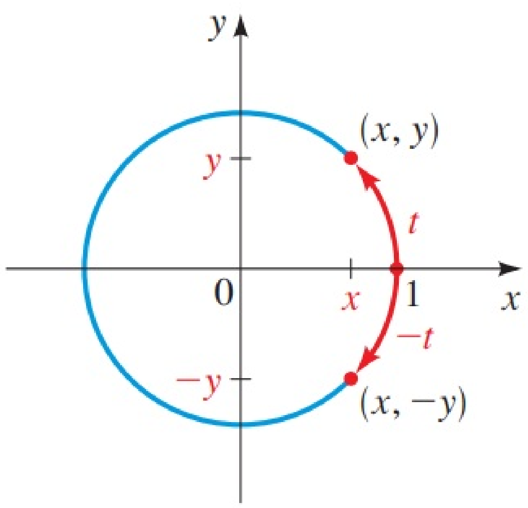


FIGURA 5

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este dato, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

PROPIEDADES PARES-IMPARES

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t$	$\cos(-t) = \cos t$	$\tan(-t) = -\tan t$
$\csc(-t) = -\csc t$	$\sec(-t) = \sec t$	$\cot(-t) = -\cot t$

EJEMPLO 4 | Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Solución: a)

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

Solución: b)

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUCIÓN Por las propiedades pares-impares y la Tabla 1 tenemos

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Seno es impar

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí por medio de expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

* Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ por todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la Sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

$$\underbrace{x^2 + y^2}\, = 1 \quad ; \quad \operatorname{sen} t = y, \quad \cos t = x$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \div \operatorname{sen}^2 t$$

$$\frac{\cancel{\operatorname{sen}^2 t}}{\cancel{\operatorname{sen}^2 t}} + \frac{\cos^2 t}{\operatorname{sen}^2 t} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\boxed{1 + \cot^2 t = \csc^2 t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \div \cos^2 t$$

$$\underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}_{=} + \frac{\cancel{\cos^2 t}}{\cancel{\cos^2 t}} = \underbrace{\frac{1}{\cos^2 t}}_{=\sec^2 t}$$

$$\boxed{\tan^2 t + 1 = \sec^2 t}$$

DEMOSTRACIÓN [redacted] A continuación demostramos las identidades de Pitágoras. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1} \quad (1)$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \overbrace{\frac{\cancel{\cos^2} t}{\cancel{\cos^2} t}}^{=1} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. [redacted].

Fuer die Studenten

Demostrar que: (divida la ecuación 1 entre sen^2t $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$.

Como sus nombres lo indican, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos hallar los valores de todas las otras en t.

EJEMPLO 5 | Hallar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN De las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como este punto está en el cuarto cuadrante, sen t es negativo, de modo que sen $t = -\frac{4}{5}$.

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$$

$$\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4}$$

$$\sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3}$$

$$\cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

Ahora que conocemos sen t y cos t, podemos hallar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

EJEMPLO 6 Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba tan t en términos de cos t, donde t está en el tercer cuadrante.

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1-\cos^2 t}}{\cos t}$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1-\cos^2 t}$$

[redacted]

5.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

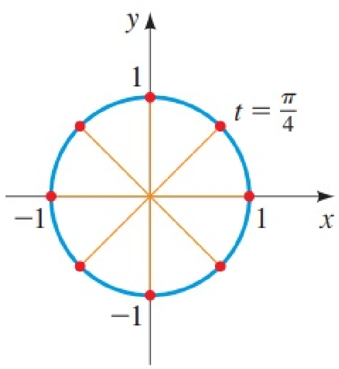
1. Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Entonces $\operatorname{sen} t =$ ____, $\cos t =$ ____, y $\tan t =$ _____.

2. Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2 =$ _____. Entonces, para toda t tenemos $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t =$ ______.

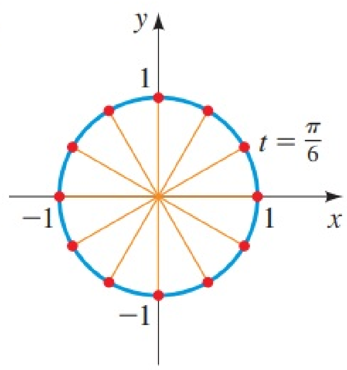
HABILIDADES

3–4 ■ Encuentre sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, t crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, t aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)

3.



4.



5-24 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

5. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ **(b)** $\cos\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\tan\frac{2\pi}{3}$

6. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{6}$

7. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

8. **(a)** $\cos\frac{5\pi}{3}$ **(b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{3}$

9. **(a)** $\cos\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\cos\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\cos\frac{7\pi}{4}$

10. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ **(b)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

11. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{7\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{7\pi}{3}$

12. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

13. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

14. **(a)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

15. **(a)** $\sec\frac{11\pi}{3}$ **(b)** $\csc\frac{11\pi}{3}$ **(c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

16. **(a)** $\cos\frac{7\pi}{6}$ **(b)** $\sec\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\csc\frac{7\pi}{6}$

17. **(a)** $\tan\frac{5\pi}{6}$ **(b)** $\tan\frac{7\pi}{6}$ **(c)** $\tan\frac{11\pi}{6}$

18. **(a)** $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **(b)** $\cot\frac{2\pi}{3}$ **(c)** $\cot\frac{5\pi}{3}$

19. **(a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **(c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

20. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ **(b)** $\sec\frac{5\pi}{4}$ **(c)** $\tan\frac{5\pi}{4}$

21. **(a)** $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **(b)** $\csc\frac{\pi}{2}$ **(c)** $\csc\frac{3\pi}{2}$

22. **(a)** $\sec(-\pi)$ **(b)** $\sec\pi$ **(c)** $\sec 4\pi$

23. **(a)** $\operatorname{sen} 13\pi$ **(b)** $\cos 14\pi$ **(c)** $\tan 15\pi$

24. **(a)** $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ **(b)** $\cos\frac{25\pi}{2}$ **(c)** $\cot\frac{25\pi}{2}$

25-28 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si está definido) en el número real t dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

25. $t = 0$ **26.** $t = \frac{\pi}{2}$ **27.** $t = \pi$ **28.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinido		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinido
$\frac{3\pi}{2}$						

29-38 ■ Nos dan el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

29. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

30. $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

31. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$

32. $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

33. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$

34. $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

35. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

36. $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

37. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$

38. $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

39-46 ■ Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **(a)** la figura y **(b)** una calculadora. Compare los dos resultados.

39. sen 1

40. cos 0.8

41. sen 1.2

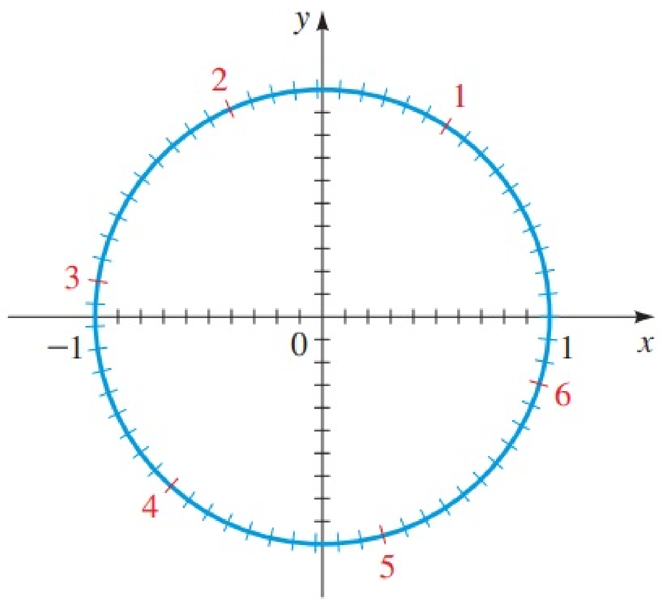
42. cos 5

43. tan 0.8

44. $\tan(-1.3)$

45. cos 4.1

46. $\operatorname{sen}(-5.2)$



47-50 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

47. sen t cos t, Cuadrante II

48. tan t sec t, Cuadrante IV

49. $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III

50. cos t sec t, cualquier cuadrante

51-54 ■ De la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t.

51. sen $t > 0$ y cos $t < 0$

52. tan $t > 0$ y sen $t < 0$

53. csc $t > 0$ y sec $t < 0$

54. cos $t < 0$ y cot $t < 0$

55-64 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

55. $\operatorname{sen} t$, $\cos t$; Cuadrante II **56.** $\cos t$, $\operatorname{sen} t$; Cuadrante IV

57. $\tan t$, $\operatorname{sen} t$; Cuadrante IV **58.** $\tan t$, $\cos t$; Cuadrante III

59. $\sec t$, $\tan t$; Cuadrante II **60.** $\csc t$, $\cot t$; Cuadrante III

61. $\tan t$, $\sec t$; Cuadrante III **62.** $\operatorname{sen} t$, $\sec t$; Cuadrante IV

63. $\tan^2 t$, $\operatorname{sen} t$; cualquier cuadrante

64. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, $\cos t$; cualquier cuadrante

65-72 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

65. $\operatorname{sen} t = \frac{3}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante II

66. $\cos t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

67. $\sec t = 3$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

68. $\tan t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

69. $\tan t = -\frac{3}{4}$, $\cos t > 0$

70. $\sec t = 2$, $\operatorname{sen} t < 0$

71. $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{4}$, $\sec t < 0$

72. $\tan t = -4$, $\csc t > 0$

73-80 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

73. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ **74.** $f(x) = x^2 \cos 2x$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **76.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

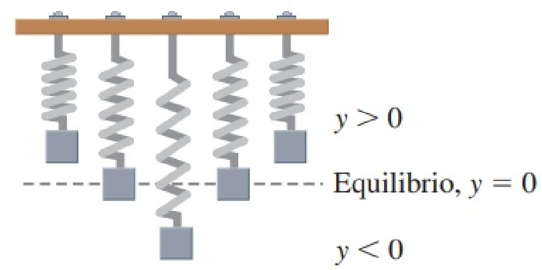
77. $f(x) = |x| \cos x$ **78.** $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

79. $f(x) = x^3 + \cos x$ **80.** $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

APLICACIONES

81. Movimiento armónico El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

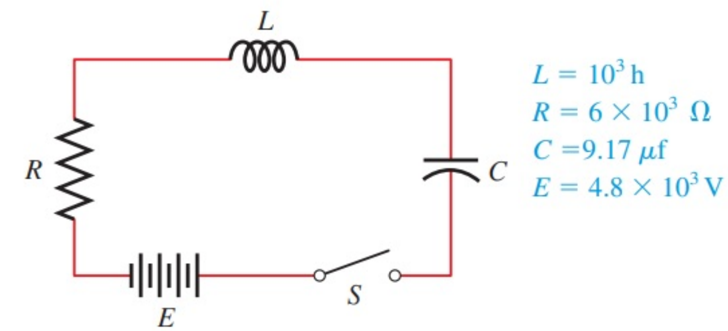
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



82. Ritmos circadianos Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica en reposo en el tiempo t está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las

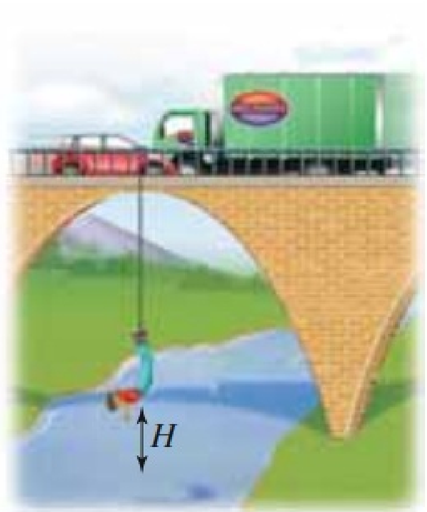
(a) 6:00 a.m. **(b)** 10:30 a.m. **(c)** Mediodía **(d)** 8:00 p.m.

83. Circuito eléctrico Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t} \operatorname{sen} 10t$. Encuentre la corriente en los tiempos **(a)** $t = 0.1$ s y **(b)** $t = 0.5$ s.



84. Salto en bungee Una saltadora de cuerda elástica (llamada *bungee*) se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de su salto, su altura H (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$. Encuentre la altura en que se encuentre ella en los tiempos indicados en la tabla.

t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	



5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

▼ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Como las

funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian con la adición de cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: Una función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **período** de f. Si f tiene período p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se denomina **período completo** de f.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen período 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

t	sen t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas, primero graficamos un período. Para trazar las gráficas sobre el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla, veamos más de cerca las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen t es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta a 1, luego disminuye a -1 repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea Figura 1.) De hecho, cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1. Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye de 1 a 0. La Tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

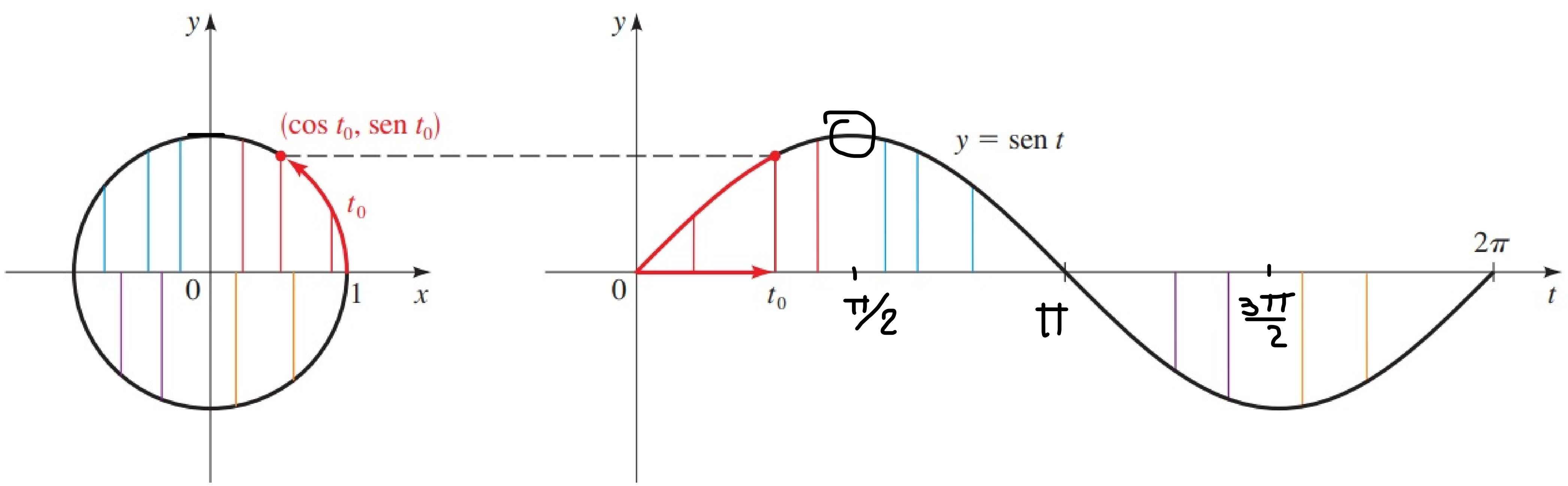


TABLA 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A continuación usamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período 2π, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

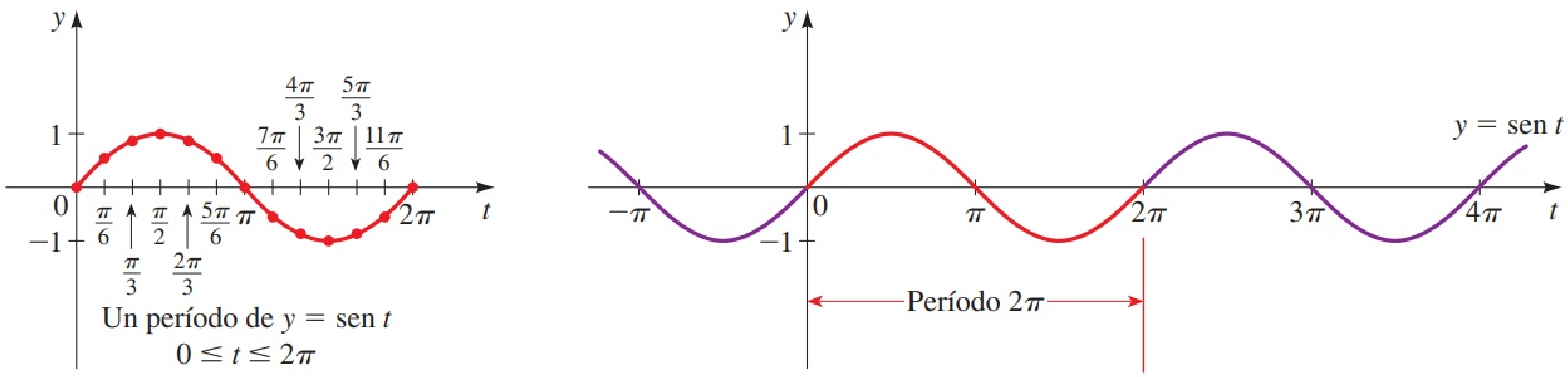
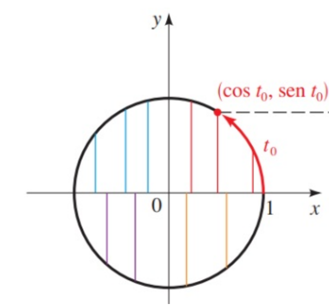


FIGURA 2 Gráfica de sen t

t	sen t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$



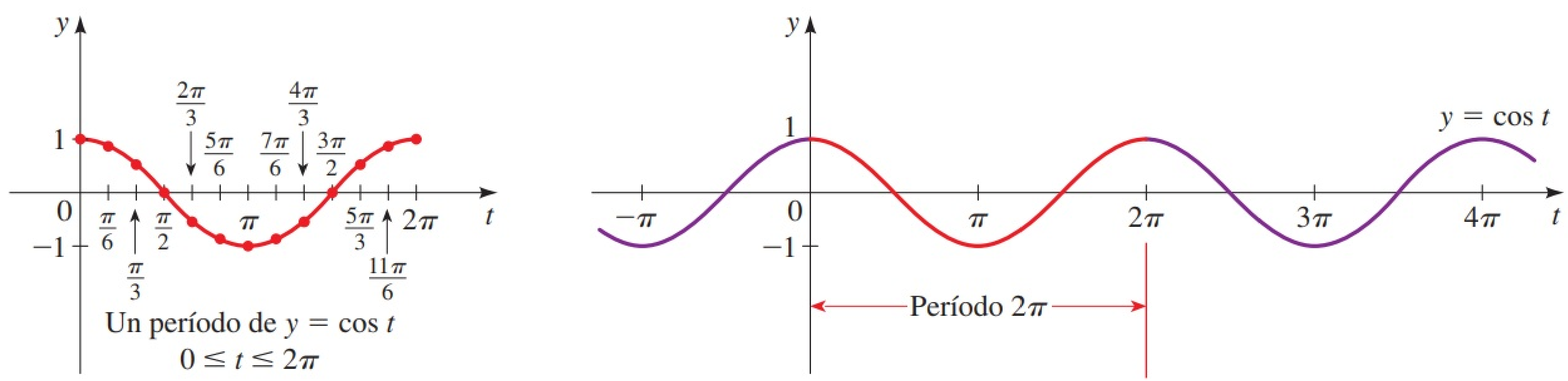


FIGURA 3 Gráfica de cos t

t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$0 \to 1$

Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

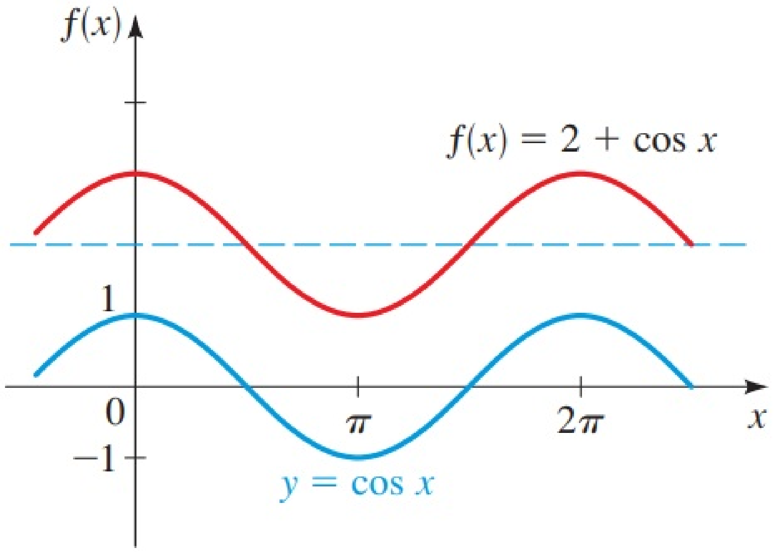
EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función siguiente.

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ **(b)** $g(x) = -\cos x$

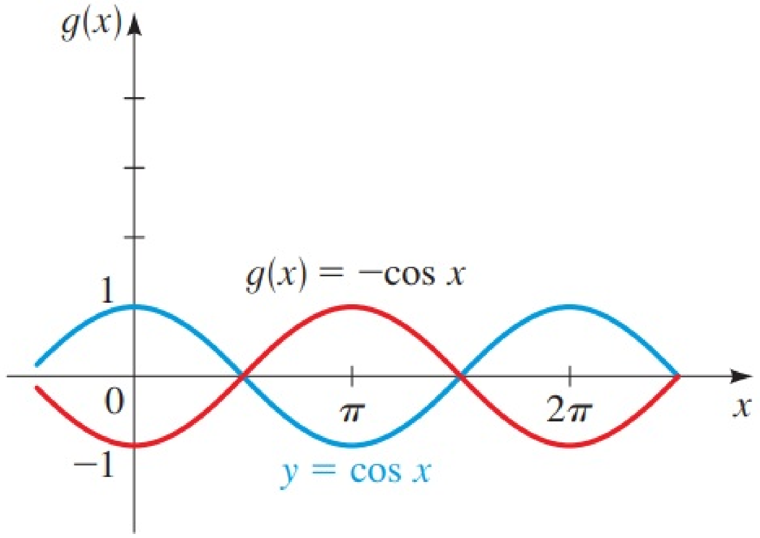
SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).



(a)

(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.



(b)

El alargamiento y contracción

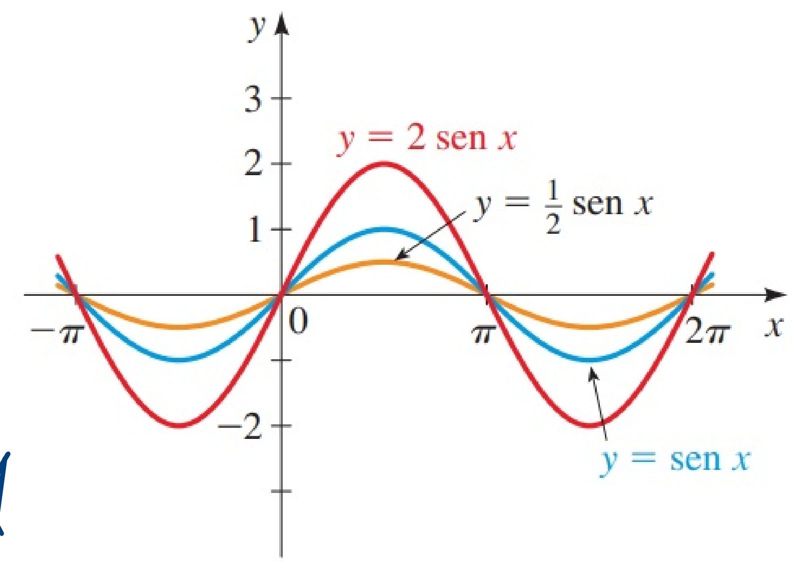


FIGURA 5

Grafiquemos $y = 2 \text{ sen } x$. Empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$, empezamos con la gráfica de $y = \text{sen } x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de contraer verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea Figura 5).

En general, para las funciones

$$\boxed{y = a \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x}$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la Figura 6 se ilustran gráficas de $y = a \operatorname{sen} x$ para varios valores de a.

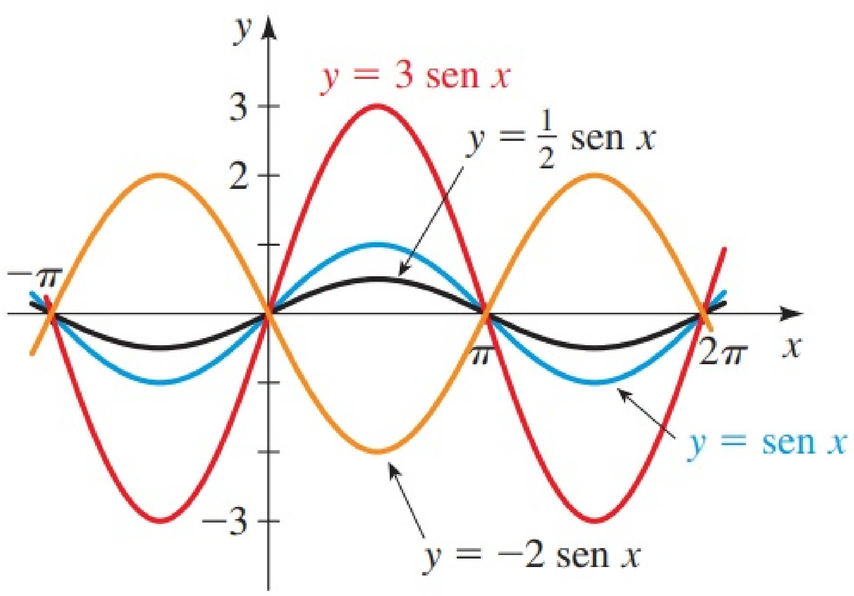
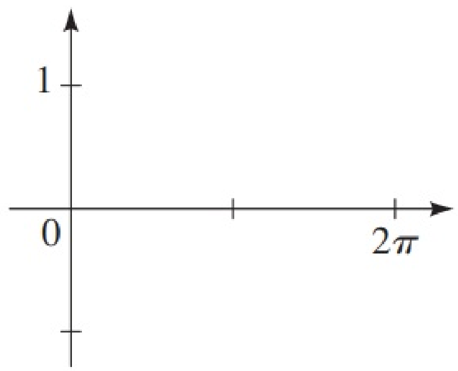


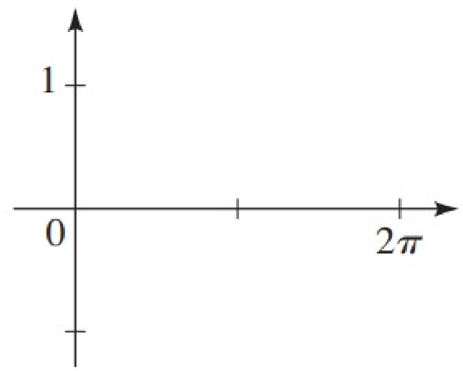
FIGURA 6

5.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones trigonométricas $y = \text{sen } x$ y $y = \cos x$ tienen amplitud ____y período _____. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $|2\pi|$.





2. La función trigonométrica $y = 3 \text{ sen } 2x$ tiene amplitud______ y período _______.

HABILIDADES

3-16 ■ Grafique la función.

3. $f(x) = 1 + \cos x$

4. $f(x) = 3 + \text{sen } x$

5. $f(x) = -\text{sen } x$

6. $f(x) = 2 - \cos x$

7. $f(x) = -2 + \text{sen } x$

8. $f(x) = -1 + \cos x$

9. $g(x) = 3 \cos x$

10. $g(x) = 2 \text{ sen } x$

11. $g(x) = -\frac{1}{2} \text{ sen } x$

12. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$

13. $g(x) = 3 + 3 \cos x$

14. $g(x) = 4 - 2 \text{ sen } x$

15. $h(x) = |\cos x|$

16. $h(x) = |\text{sen } x|$

17-28 ■ Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

17. $y = \cos 2x$

18. $y = -\text{sen } 2x$

19. $y = -3 \text{ sen } 3x$

20. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

21. $y = 10 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

22. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$

23. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$

24. $y = 4 \text{ sen}(-2x)$

25. $y = -2 \text{ sen } 2\pi x$

26. $y = -3 \text{ sen } \pi x$

27. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$

28. $y = -2 + \cos 4\pi x$

29-42 ■ Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completo.

29. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

30. $y = 2 \text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

31. $y = -2 \text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

32. $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

33. $y = -4 \text{ sen } 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

34. $y = \text{sen } \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

35. $y = 5 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$

36. $y = 2 \text{ sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

37. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

38. $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

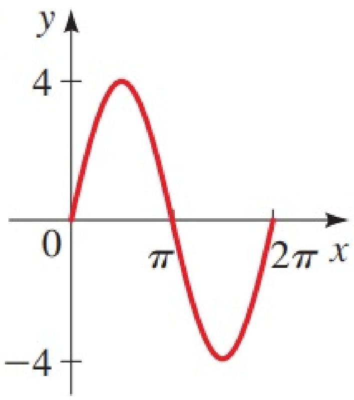
43-50 ■ Nos dan la gráfica de un período completo de una curva seno o coseno.

(a) Encuentre la amplitud, período y desfase.

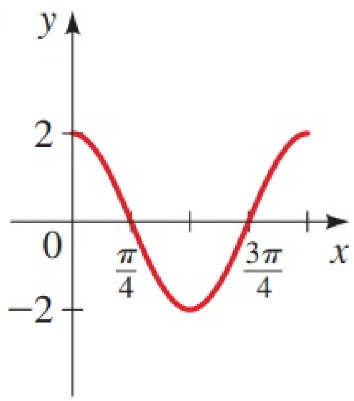
(b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \qquad \text{o} \qquad y = a \cos k(x - b)$$

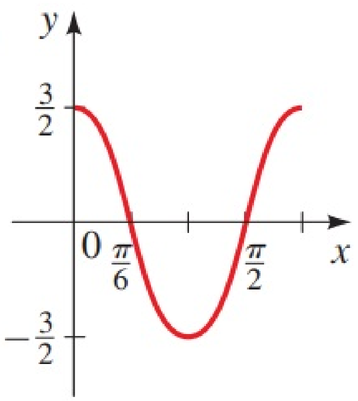
43.



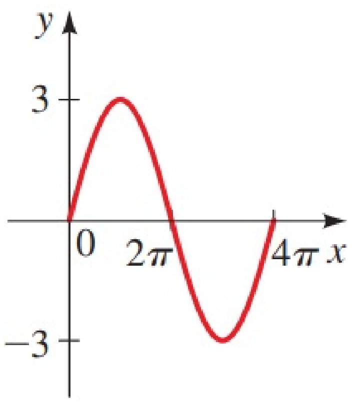
44.



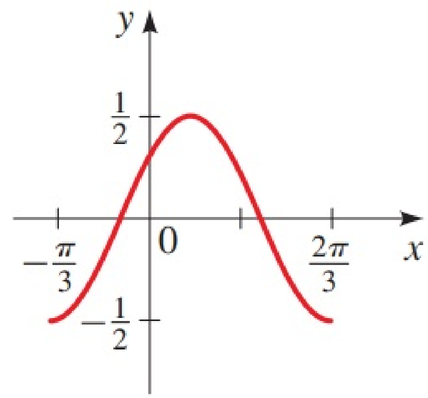
45.



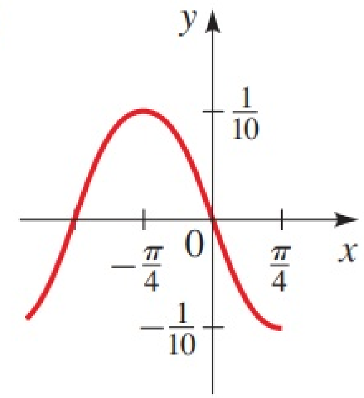
46.



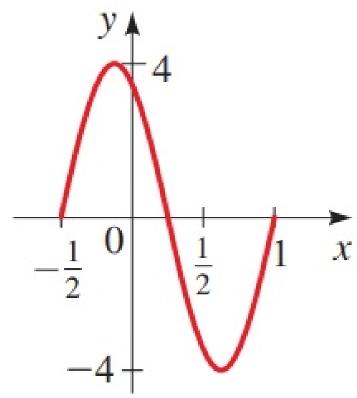
47.



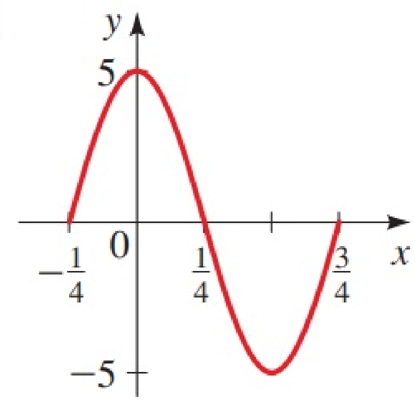
48.



49.



50.



APLICACIONES

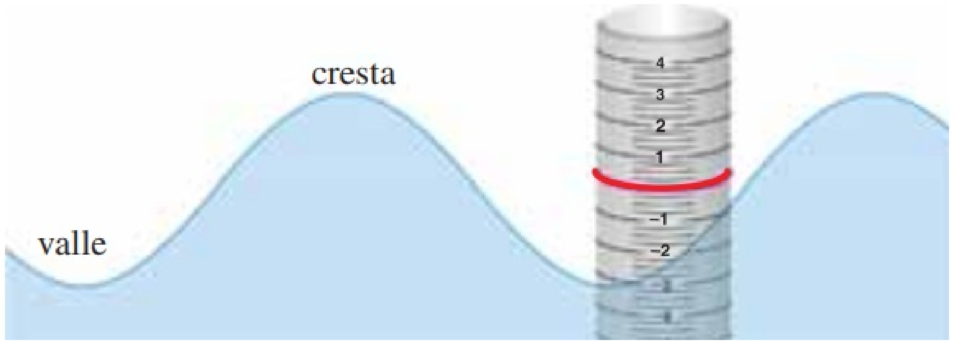
77. Altura de una ola Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función

$$h(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

(a) Encuentre el período de la ola.

(b) Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



79. Presión sanguínea Cada vez que pulsa nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las *lecturas de presión sanguínea* se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25\,\text{sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo t medida en minutos.

(a) Encuentre el período de p.

(b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

(c) Grafique la función p.

(d) Encuentre la lectura de presión sanguínea. ¿Cómo se compara esto contra la presión sanguínea normal?