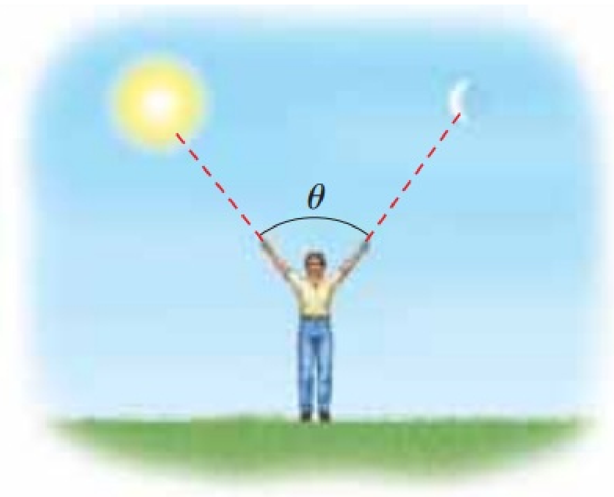
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Supóngase que deseamos hallar la distancia de la Tierra al Sol. Usar una cinta de medir es obviamente impráctico, de modo que necesitamos algo que no sea simples mediciones para resolver este problema. Los ángulos son más fáciles de medir que las distancias. Por ejemplo, podemos hallar el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna con sólo apuntar al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar relaciones entre ángulos y distancias. En consecuencia, si tuviéramos una forma de determinar distancias a partir de ángulos, podríamos hallar la distancia al Sol sin tener que ir hasta ahí. Las funciones trigonométricas nos dan las herramientas que necesitamos.



Si θ es un ángulo en un triángulo rectángulo, entonces la relación trigonométrica $\operatorname{sen}\theta$ está definida como la longitud del lado opuesto a θ dividido entre la longitud de la hipotenusa. Esta relación es la misma en cualquier triángulo rectángulo semejante, incluyendo el enorme triángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna. (Vea la Sección 6.2, Ejercicio 61.) Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas equivalentes pero distintas: como funciones de números reales (Capítulo 5) o como funciones de ángulos (Capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, de modo que ya sea el Capítulo 5 o el Capítulo 6 se pueden estudiar primero. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para diferentes aplicaciones.

6.1 MEDIDA DE UN ÁNGULO

Un **ángulo** AOB está formado por dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (vea Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 recibe el nombre de **lado inicial** y R_2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como **positivo** y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como **negativo**.

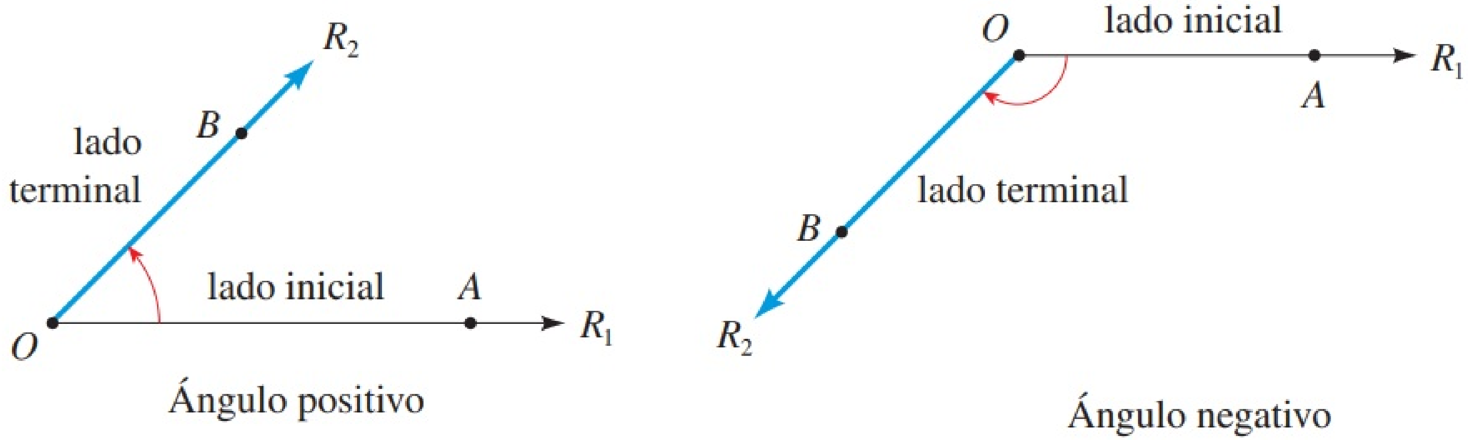


FIGURA 1

▼ Medida de un ángulo

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R_1 sobre R_2. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la *medida en radianes*. La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una circunferencia de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

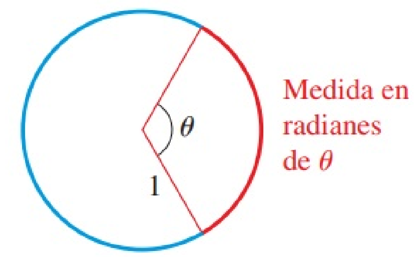


FIGURA 2

DEFINICIÓN DE MEDIDA EN RADIÁN

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (vea Figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene una medida π rad, y un ángulo recto tiene medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que esté subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de la circunferencia unitaria tiene medida 2 en radianes (vea Figura 3).

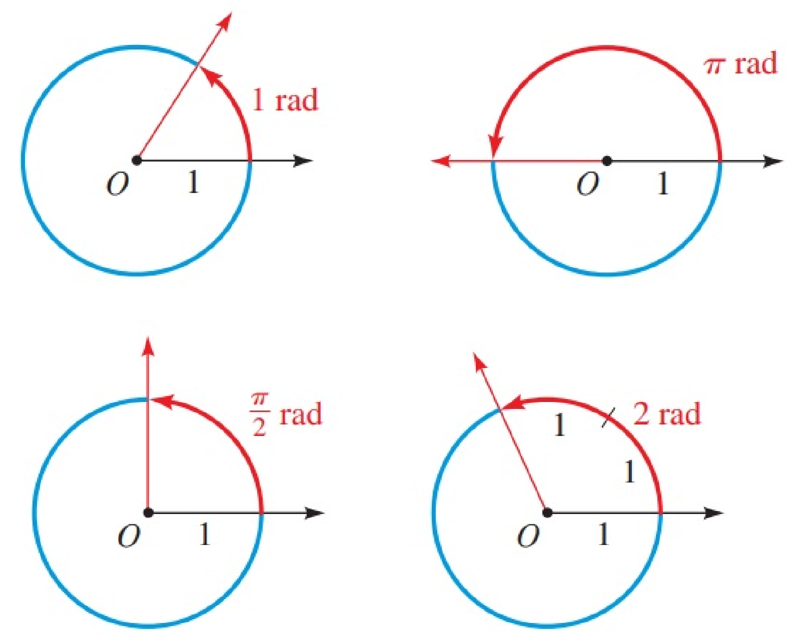


FIGURA 3 Medida en radianes

Como una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π rad, obtenemos la siguiente y sencilla relación entre estos dos métodos de medición de ángulos:

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

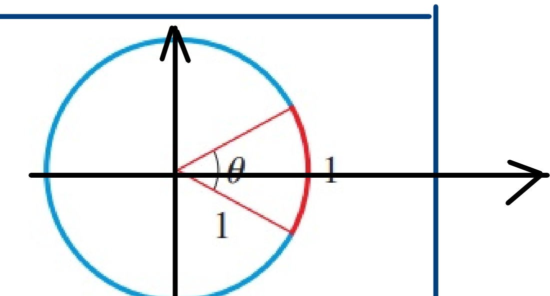
$$180^\circ = \pi \text{ rad} \Rightarrow \boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ} \qquad \boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}}$$

1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.

Para tener alguna idea del tamaño de 1 radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296^\circ \qquad \text{y} \qquad 1^\circ \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo θ de medida 1 radián se muestra en la Figura 4.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296^\circ$

FIGURA 4

EJEMPLO 1 | Convertir entre radianes y grados

(a) Exprese 60° en radianes. **(b)** Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución:

a)

$$60^\circ = 60^{\cancel{\circ}}\left(\frac{\pi}{180^{\cancel{\circ}}}\right)\text{rad} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

$$\frac{\pi\,\text{rad}}{180^\circ} \quad ó \quad \frac{180^\circ}{\pi}$$

---

b)

$$\frac{\pi}{6}\,\text{rad} = \frac{\cancel{\pi}}{6}\left(\frac{180^\circ}{\cancel{\pi}}\right) = 30^\circ$$

SOLUCIÓN La relación entre grados y radianes da

(a) $60^\circ = 60\left(\dfrac{\pi}{180}\right)\text{rad} = \dfrac{\pi}{3}\,\text{rad}$ **(b)** $\dfrac{\pi}{6}\,\text{rad} = \left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{180}{\pi}\right) = 30^\circ$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **15**

6.2 TRIGONOMETRÍA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En esta sección estudiamos ciertas :
entre los lados de triángulos rectá
llamadas relaciones trigonométricas
varias aplicaciones.

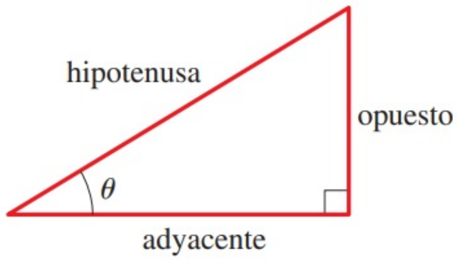


FIGURA 1

▼ Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (vea Figura 1).

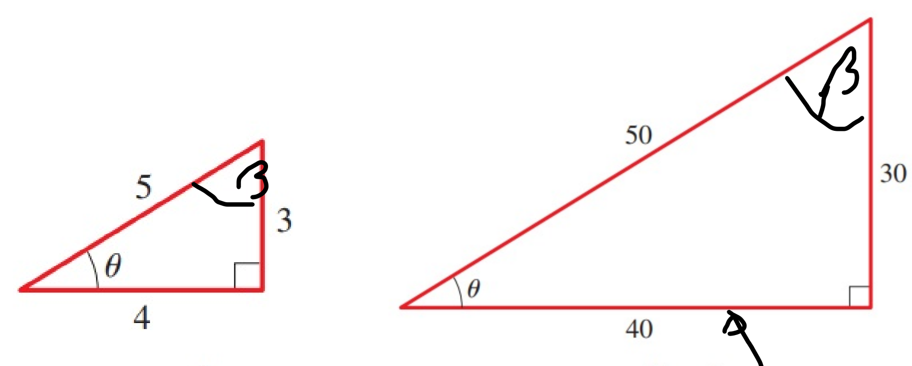
LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{opuesto}}$$

Los símbolos que usamos para esas relaciones son abreviaturas de sus nombres completos: seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente. Como dos triángulos rectángulos cualesquiera con ángulo u son semejantes, estas relaciones son iguales, cualquiera que sea el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo u (vea Figura 2).

FIGURA 2



$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\operatorname{Sen}\beta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\operatorname{sen}\beta = \frac{4\cancel{0}}{5\cancel{0}}$

EJEMPLO 1 | Hallar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ de la Figura 3.

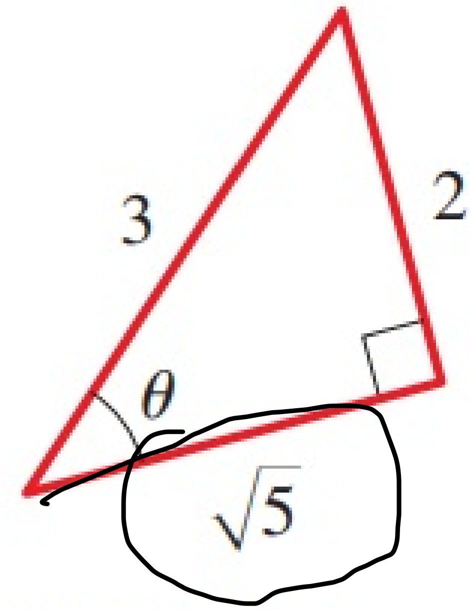


FIGURA 3

Solución:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}\ ; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}\ ; \quad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2}\ ; \quad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}\ ; \quad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

SOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

EJEMPLO 2 | Hallar relaciones trigonométricas

Fuer die Studenten

Si $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, trace un triángulo rectángulo con ángulo agudo α y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

Si $\cos \alpha = \dfrac{3}{4} \Rightarrow$

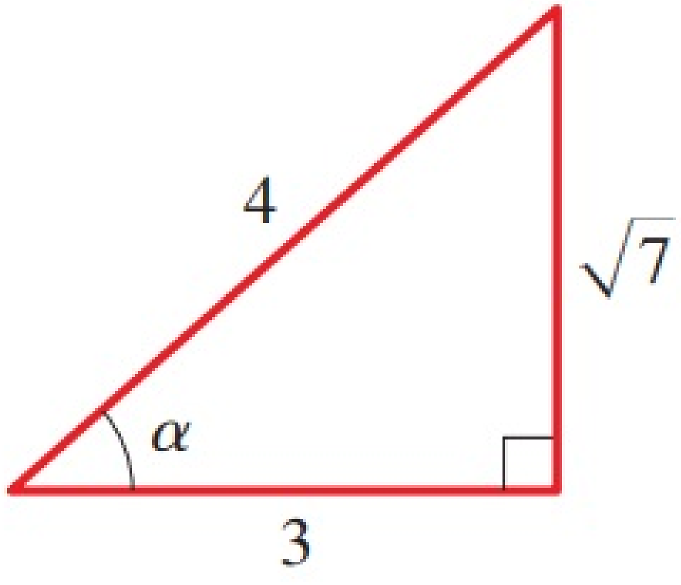


FIGURA 4

$\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$; $\tan \alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$; $\cot \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

$\sec \alpha = \dfrac{4}{3}$; $\csc \alpha = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

Triángulos especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del Teorema de Pitágoras. Los citados aquí en vista que se usan con frecuencia.

El primer triángulo se obtiene al trazar una diagonal en un cuadro de lado 1 (vea Figura 5). Por el Teorema de Pitágoras esta diagonal tiene longitud $\sqrt{2}$. Los triángulos resultantes tienen ángulos de 45°, 45° y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, empezamos con un triángulo equilátero ABC de lado 2 y trazamos la bisectriz perpendicular DB de la base, como en la Figura 6. Por el Teorema de Pitágoras, la longitud de DB es $\sqrt{3}$. Como DB corta al ángulo ABC, obtenemos los triángulos con ángulos de 30°, 60° y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

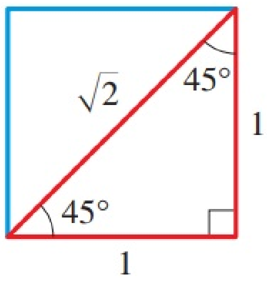


FIGURA 5

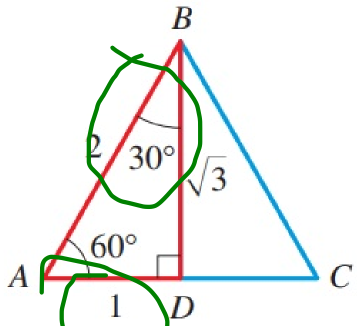
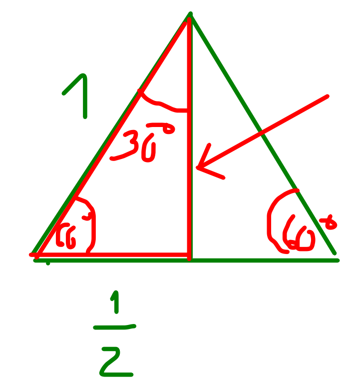


FIGURA 6



Ahora podemos usar los triángulos especiales de las Figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$) que aparecen en la Tabla 1.

TABLA 1

Valores de las relaciones trigonométricas para ángulos

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ | $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Para hallar los valores de relaciones trigonométricas para otros ángulos, usamos calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) que se emplean para hallar las relaciones trigonométricas están programados directamente en calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se presiona la tecla $\boxed{\texttt{SIN}}$, la calculadora calcula una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras también dan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de éstas usando las siguientes *relaciones recíprocas*:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

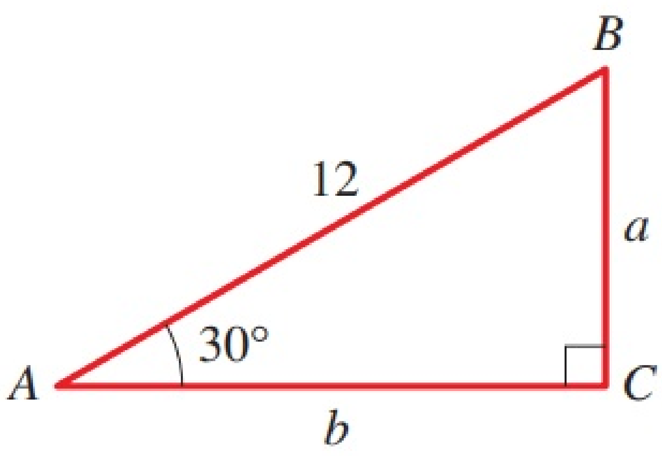


FIGURA 7

EJEMPLO 3 | Resolver un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo *ABC* que se muestra en la Figura 7.

SOLUCIÓN Es evidente que $\angle B = 60°$. Para hallar a, buscamos una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos que ya conocemos. En este caso, tenemos sen $30° = a/12$, de modo que

$$a = 12 \text{ sen } 30° = 12(\tfrac{1}{2}) = 6$$

Análogamente, $\cos 30° = b/12$, entonces

$$b = 12 \cos 30° = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

La Figura 8 muestra que si conocemos la hipotenusa r y el ángulo agudo θ en un triángulo rectángulo, entonces los catetos a y b están dados por

$$a = r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

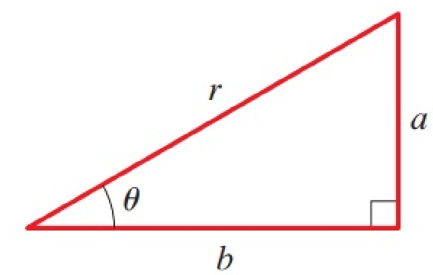


FIGURA 8
$a = r \operatorname{sen} \theta$
$b = r \cos \theta$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos con el uso de relaciones trigonométricas es fundamental para numerosos problemas en navegación, topografía, astronomía y las medidas de distancias. Las aplicaciones que consideramos en esta sección siempre comprenden triángulos rectos pero, como veremos en las siguientes tres secciones, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son rectángulos.

Para examinar los siguientes ejemplos, necesitamos alguna terminología. Si un observador está viendo un objeto, entonces la recta que va de sus ojos al objeto se llama **línea de visión** (Figura 9). Si el objeto que es observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal recibe el nombre de **ángulo de elevación**; si está debajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se denomina **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y de depresión se darán para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, por ejemplo un plano inclinado o una ladera, usamos el término **ángulo de inclinación**.

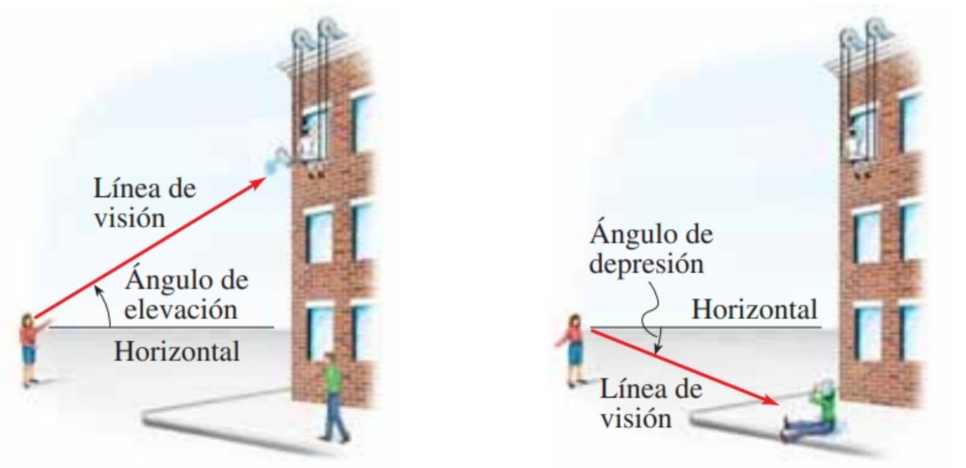


FIGURA 9

EJEMPLO 4 | Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

SOLUCIÓN Sea h la altura del árbol. De la Figura 10 vemos que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7^\circ \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7^\circ \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

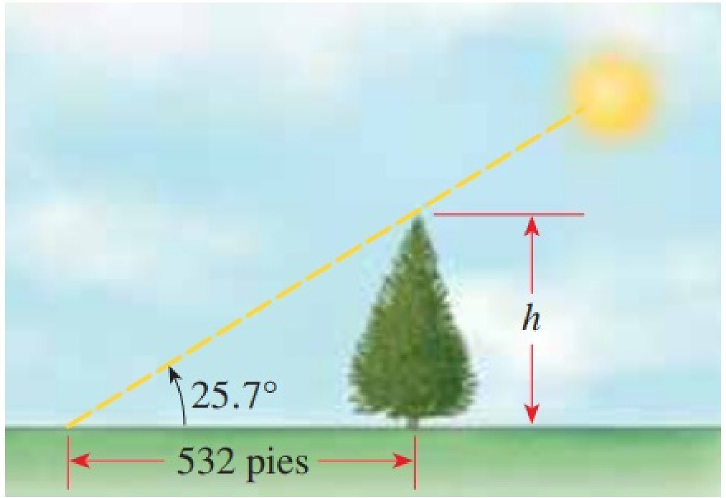
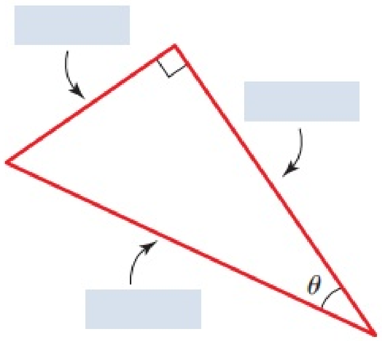


FIGURA 10

6.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. En la figura siguiente se ilustra un triángulo rectángulo con ángulo θ.



(a) Aplique leyenda a los lados "opuesto" y "adyacente" a θ y la hipotenusa del triángulo.

(b) Las funciones trigonométricas del ángulo θ están definidas como sigue:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\quad}{\quad} \qquad \cos\theta = \frac{\quad}{\quad} \qquad \tan\theta = \frac{\quad}{\quad}$$

(c) Las relaciones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo. Esto es porque todos los triángulos rectángulos con ángulo agudo θ son ______.

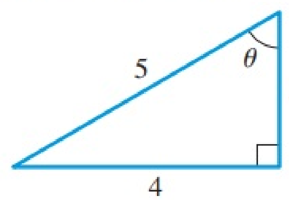
2. Las identidades recíprocas dicen que

$$\csc\theta = \frac{1}{\quad} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\quad} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\quad}$$

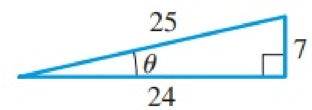
HABILIDADES

3-8 ■ Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo.

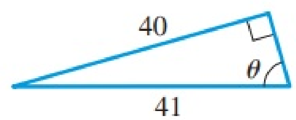
3.



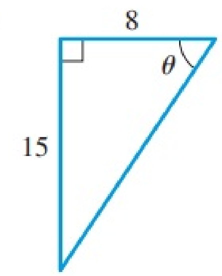
4.



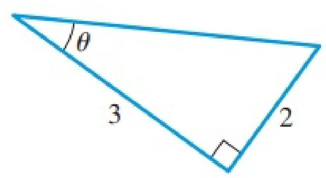
5.



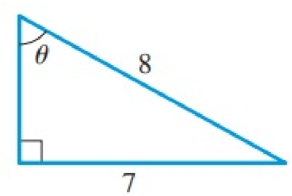
6.



7.

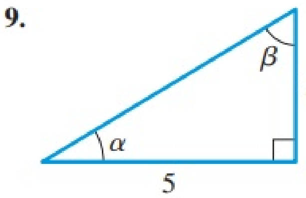


8.

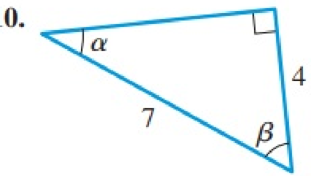


9-10 ■ Encuentre **(a)** sen α y cos β, **(b)** tan α y cot β, y **(c)** sec α y csc β.

9.

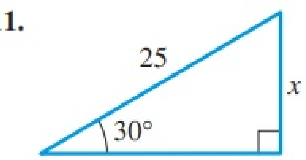


10.

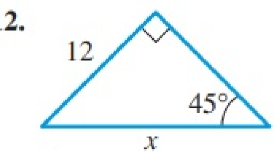


11-16 ■ Encuentre el lado marcado como x. En los Ejercicios 13 y 14 exprese sus respuestas redondeadas a cinco lugares decimales.

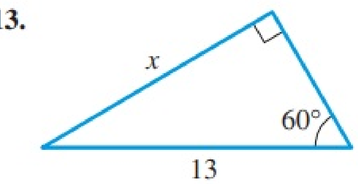
11.



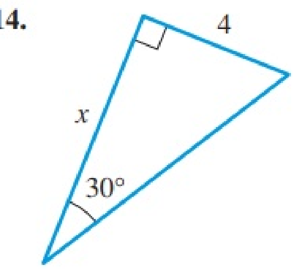
12.



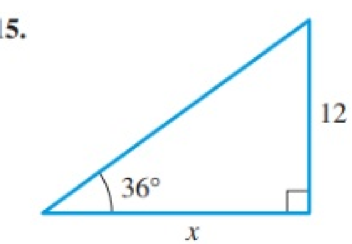
13.



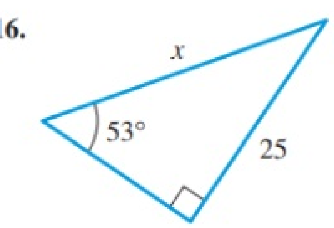
14.



15.

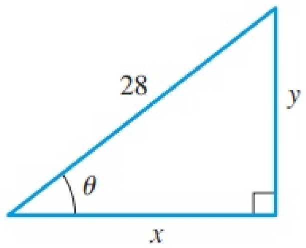


16.

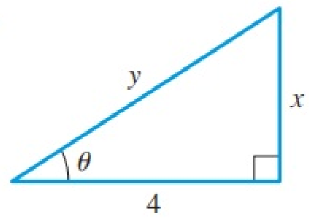


17-18 ■ Exprese x y y en términos de relaciones trigonométricas de θ.

17.



18.



19-24 ■ Trace un triángulo que tenga ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

19. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$

20. $\cos \theta = \frac{9}{40}$

21. $\cot \theta = 1$

22. $\tan \theta = \sqrt{3}$

23. $\sec \theta = \frac{7}{2}$

24. $\csc \theta = \frac{13}{12}$

25-30 ■ Evalúe la expresión sin usar calculadora.

25. $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6} + \cos \dfrac{\pi}{6}$

26. $\operatorname{sen} 30° \csc 30°$

27. $\operatorname{sen} 30° \cos 60° + \operatorname{sen} 60° \cos 30°$

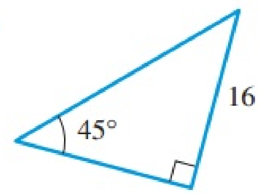
28. $(\operatorname{sen} 60°)^2 + (\cos 60°)^2$

29. $(\cos 30°)^2 - (\operatorname{sen} 30°)^2$

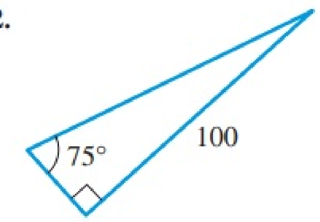
30. $\left(\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3} \cos \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} \cos \dfrac{\pi}{3}\right)^2$

31-38 ■ Resuelva el triángulo rectángulo.

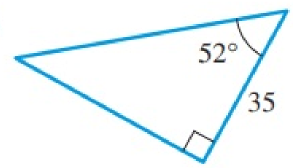
31.



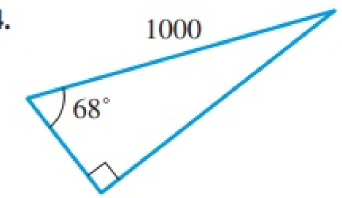
32.



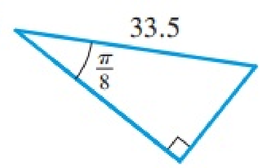
33.



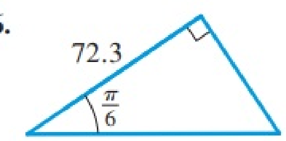
34.



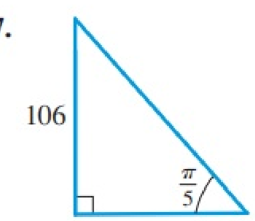
35.



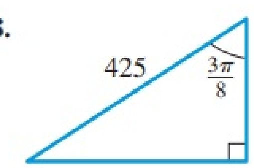
36.



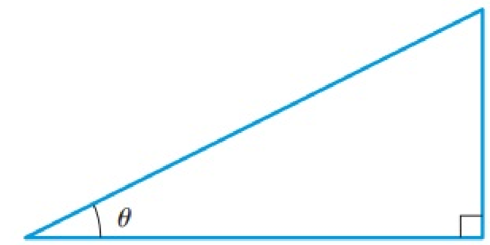
37.



38.



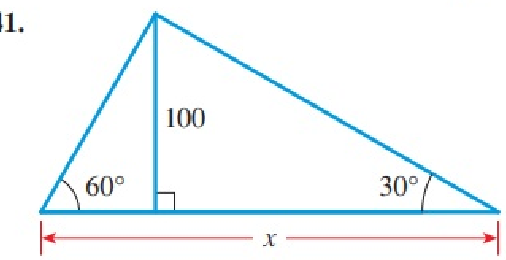
39. Use una regla para medir cuidadosamente los lados del triángulo y, a continuación, use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de θ.



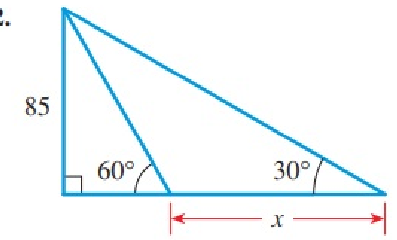
40. Usando un transportador, trace un triángulo rectángulo que tenga el ángulo agudo de 40°. Mida los lados con todo cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40°.

41-44 ■ Encuentre x redondeada a un lugar decimal.

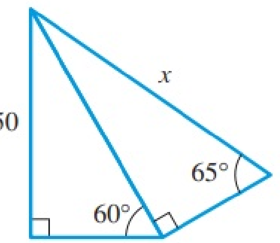
41.



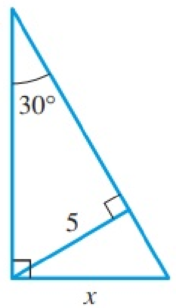
42.



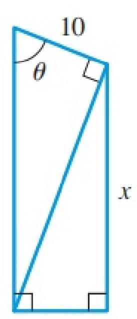
43.



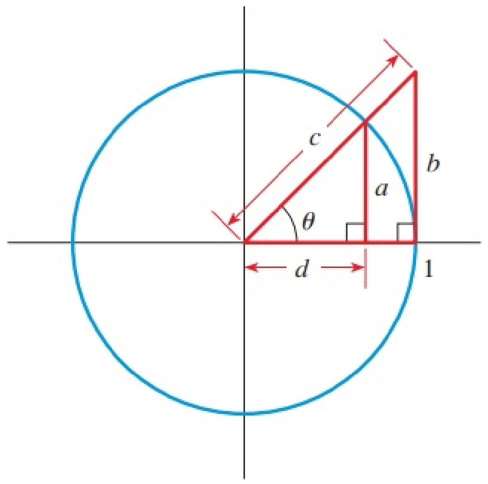
44.



45. Exprese la longitud x en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



46. Exprese la longitud a, b, c y d en la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



APLICACIONES

47. Altura de un edificio Se encuentra que el ángulo de elevación de lo alto del edificio Empire State de Nueva York es de 11° desde el suelo, a una distancia de 1 milla de la base del edificio. Usando esta información, encuentre la altura del edificio Empire State.

48. Arco de Entrada Un avión está volando a la vista del Arco de Entrada (Gateway Arch) de St. Louis, Missouri, a una elevación de 35,000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el Gateway Arch; encuentra que el ángulo de depresión a un punto en el suelo abajo del arco es de 22°.

(a) ¿Cuál es la distancia entre el avión y el arco?

(b) ¿Cuál es la distancia entre un punto en el suelo directamente bajo el avión y el arco?

49. Desviación de un rayo láser Un rayo láser ha de dirigirse hacia el centro de la Luna, pero el rayo se desvía 0.5° de su trayectoria propuesta.

(a) ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su trayectoria propuesta cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas.)

(b) El radio de la Luna es aproximadamente de 1000 millas. ¿El rayo incidirá en la Luna?

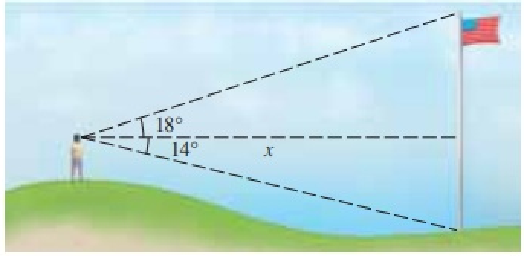
50. Distancia al mar Desde lo alto de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión a un barco en el océano es de 23°. ¿A qué distancia está el barco desde la base del faro?

51. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está inclinada contra un edificio, de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

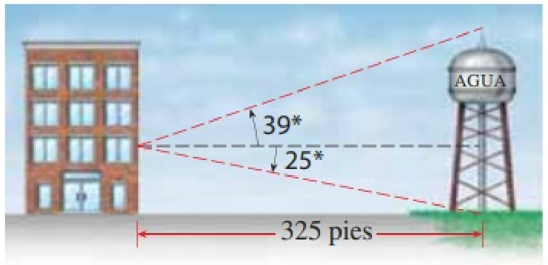
52. Altura de una torre Un cable de 600 pies para sujeción está unido a lo alto de una torre de comunicaciones. Si el cable forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

53. Elevación de una cometa Un hombre que está en una playa hace volar una cometa. Sostiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda es de 450 pies de largo, ¿a qué altura está la cometa sobre el suelo?

54. Determinación de una distancia Una mujer que está de pie en una colina observa una astabandera que ella sabe es de 60 pies de alto. El ángulo de depresión a la parte inferior del poste es de 14° y el ángulo de elevación de la parte superior del poste es de 18°. Encuentre la distancia x de la mujer al poste.



55. Altura de una torre Una torre de agua está situada a 325 pies de un edificio (vea la figura). Desde una ventana del edificio, un observador ve que el ángulo de elevación a la parte superior de la torre es 39° y que el ángulo de depresión de la parte inferior de la torre es 25°. ¿Cuál es la altura de la torre? ¿Cuál es la altura de la ventana?



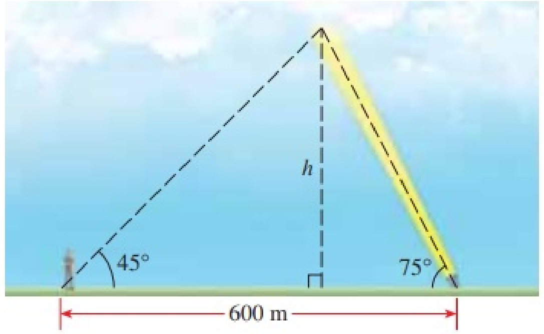
56. Determinar una distancia Un avión está volando a una elevación de 5150 pies, directamente sobre una carretera recta. Dos automovilistas van en su auto en la carretera en lados opuestos del avión; el ángulo de depresión a un auto es 35° y al otro es de 52°. ¿A qué distancia están entre sí los dos autos?

57. Determinar una distancia Si los dos autos del ejercicio 56 están en un lado del avión y si el ángulo de depresión a uno de los autos es 38° y al otro auto es 52°, ¿a qué distancia están entre sí los dos autos?

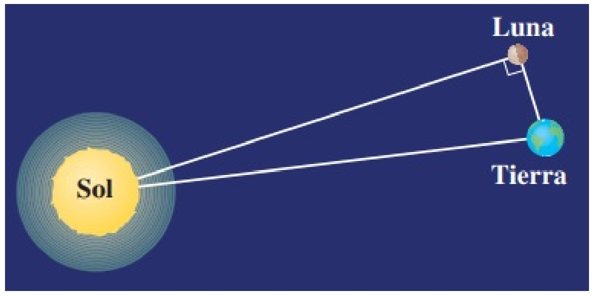
58. Altura de un globo Un globo de aire caliente está flotando sobre una carretera recta. Para estimar la altura a la que se encuentran los tripulantes del globo, éstos simultáneamente miden el ángulo de depresión a dos señalamientos consecutivos de kilometraje situados en la carretera, en el mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿A qué altura está el globo?

59. Altura de una montaña Para estimar la altura de una montaña sobre una meseta, el ángulo de elevación a lo alto de la montaña se mide y es de 32°. A mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la meseta, se encuentra que el ángulo de elevación es de 35°. Estime la altura de la montaña.

60. Altura de una capa de nubes Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° de la horizontal. Un observador a 600 m de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura h de la capa de nubes.



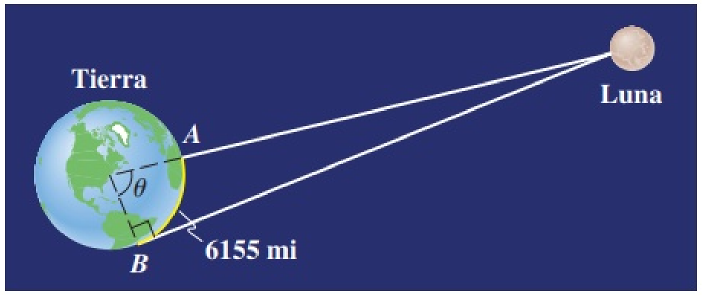
61. Distancia al Sol Cuando la Luna está exactamente en cuarto creciente, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (vea la figura). En ese momento el ángulo formado por el Sol, la Tierra y la Luna se mide y es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240,000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.



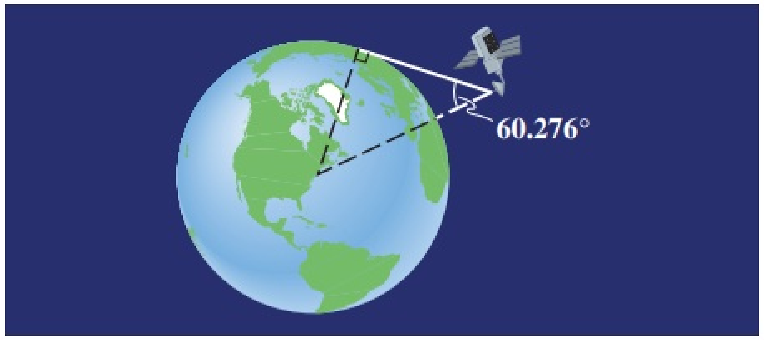
62. Distancia a la Luna Para hallar la distancia al Sol como en el Ejercicio 61, necesitamos conocer la distancia a la Luna. A continuación veamos una forma de estimar esa distancia: Cuando la Luna se ve en su cenit en un punto A en la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto B (vea la siguiente figura). Los puntos A y B están a 6155 millas entre sí, y el radio de la Tierra es 3960 millas.

(a) Encuentre el ángulo θ en grados.

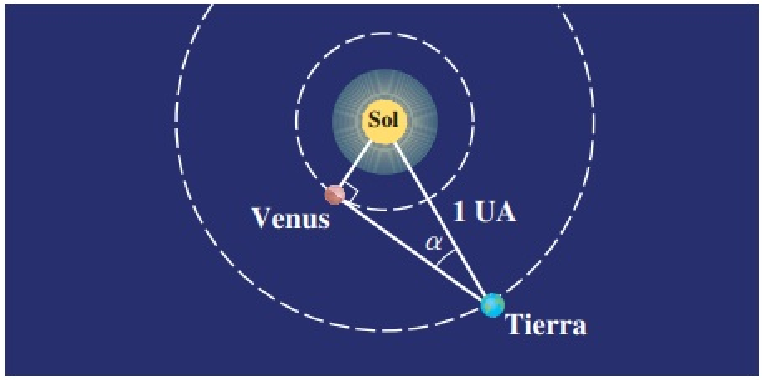
(b) Estime la distancia del punto A a la Luna.



63. Radio de la Tierra En el Ejercicio 74 de la Sección 6.1 se dio un método para hallar el radio de la Tierra. A continuación veamos un método más moderno: de un satélite que está a 600 millas de la Tierra, se observa que un ángulo formado por la vertical y la línea de vista al horizonte es 60.276°. Use esta información para hallar el radio de la Tierra.



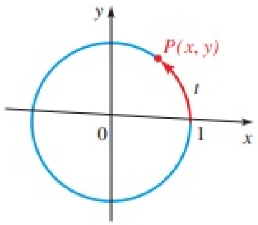
65. Distancia de Venus al Sol La **elongación** α de un planeta es el ángulo formado por el planeta, la Tierra y el Sol (vea la figura). Cuando Venus alcanza su máxima elongación de 46.3°, la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



6.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

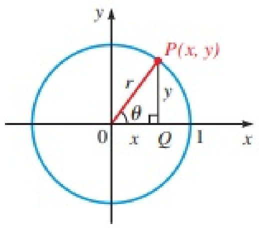
Relación con funciones trigonométricas de números reales

Quizá el lector ya haya estudiado funciones trigonométricas definidas usando la circunferencia unitaria (Capítulo 5). Para ver cómo se relacionan con las funciones trigonométricas de un *ángulo*, empecemos con la circunferencia unitaria del plano de coordenadas.



$P(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto terminal determinado por un arco de longitud t sobre la circunferencia unitaria. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro de la circunferencia. Si trazamos una perpendicular de P al punto Q del eje x, entonces el triángulo OPQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y, como se ve en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo recto

A continuación, por la definición de funciones trigonométricas del *número real* t tenemos

$$\operatorname{sen} t = y$$

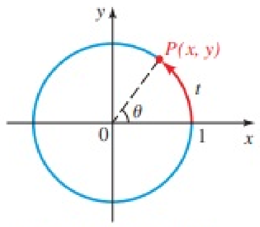
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tendremos

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{op a } \theta}{\text{hip}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ady a } \theta}{\text{hip}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Vea la figura siguiente.) Comparando las dos formas de definir las funciones trigonométricas, vemos que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un número real determinado. (El número real es la medida de θ en radianes en un caso o la longitud t de un arco en el otro.)



La medida del ángulo θ en radianes es t.

¿Por qué, entonces, estudiamos trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Vea *Enfoque sobre modelado*, páginas 427, 489 y 533, y Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se ve en la Figura 1(a). Ponga θ en posición normal como se muestra en la Figura 1(b).

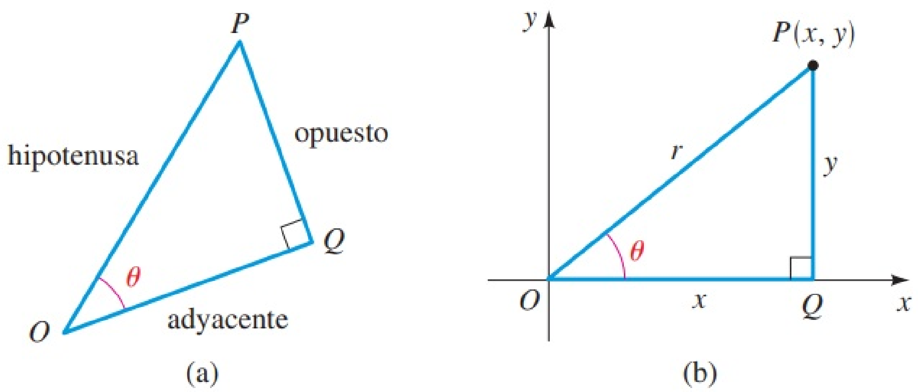


FIGURA 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto en el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el lado opuesto tiene longitud y y el lado adyacente tiene longitud x. Usando el Teorema de Pitágoras, vemos que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar en la misma forma.

Estas observaciones nos permiten extender las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Definimos las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (vea Figura 2).

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea θ un ángulo en posición normal y sea $P(x, y)$ un punto en el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

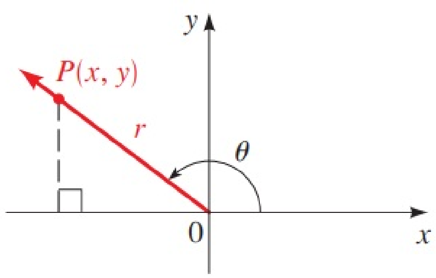


FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Hallar funciones trigonométricas de ángulos

Encuentre **(a)** cos 135° y **(b)** tan 390°.

SOLUCIÓN

(a) De la Figura 4 vemos que $\cos 135° = -x/r$. Pero $\cos 45° = x/r$, y como $\cos 45° = \sqrt{2}/2$ tenemos

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la Figura 5 es evidente que $\tan 390° = \tan 30°$ y, como $\tan 30° = \sqrt{3}/3$, tenemos

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

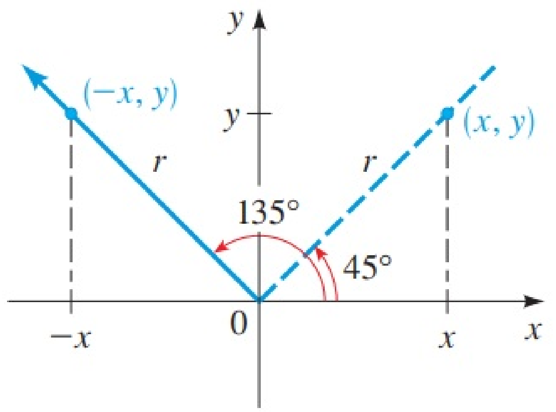


FIGURA 4

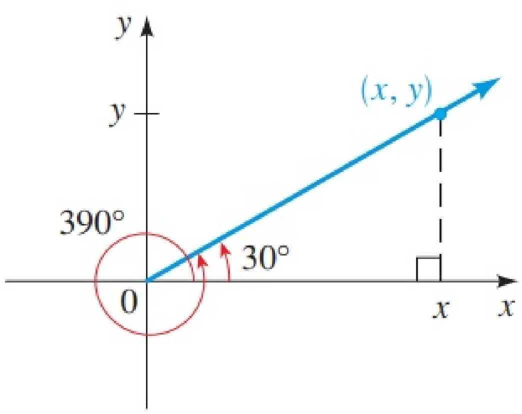


FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11** Y **13**

Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por medio de varias e importantes ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Ya hemos encontrado las identidades recíprocas. Estas identidades continúan cumpliéndose para cualquier ángulo θ, siempre que ambos lados de la ecuación estén definidos. Las identidades de Pitágoras son una consecuencia del Teorema de Pitágoras.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

DEMOSTRACIÓN Demostremos la primera identidad de Pitágoras. Usando $x^2 + y^2 = r^2$ (el Teorema de Pitágoras) en la Figura 13, tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (Aun cuando la figura indica un ángulo agudo, se debe verificar que la prueba se cumpla para todo ángulo θ.) ■

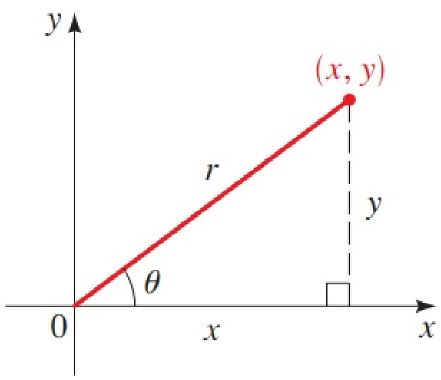


FIGURA 13

EJEMPLO 5 | Expresar una función trigonométrica en términos de otra

(a) Expresar sen θ en términos de cos θ.

(b) Expresar tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el segundo cuadrante.

SOLUCIÓN

(a) De la primera identidad de Pitágoras obtenemos

$$\operatorname{sen} \theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el primero o segundo cuadrante, entonces sen θ es positivo, y por tanto

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el tercero o cuarto cuadrante, sen θ es negativo, y por tanto

$$\operatorname{sen} \theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

(b) Como $\tan \theta = \operatorname{sen} \theta / \cos \theta$, necesitamos escribir cos θ en términos de sen θ. Por la parte (a),

$$\cos \theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

y como cos θ es negativo en el segundo cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

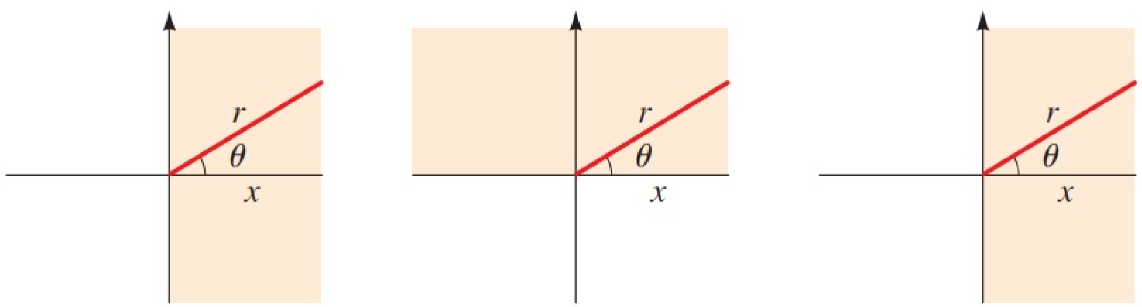
$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39** ■

6.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS Y TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

▼ Funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa

Consideremos primero la función seno. Restringimos el dominio de la función seno a ángulos θ con $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. De la Figura 1 vemos que en este dominio la función seno alcanza cada uno de los valores sobre el intervalo $[-1, 1]$ exactamente una vez y, por tanto, es biunívoca. Análogamente, restringimos los dominios de coseno y tangente como se ve en la Figura 1.



$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ $\qquad$ $\tan\theta = \frac{x}{y}$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $0 \le \theta \le \pi$ $\qquad$ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

FIGURA 1 Dominios restringidos de las funciones seno, coseno y tangente.

En estos dominios restringidos podemos definir una inversa para cada una de estas funciones. Por la defi nición de función inversa tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen} y = x \\ \cos^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \cos y = x \\ \tan^{-1} x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \tan y = x \end{aligned}$$

LAS FUNCIONES SENO INVERSO, COSENO INVERSO Y TANGENTE INVERSA

Las funciones seno, coseno y tangente en los dominios restringidos $[-\pi/2, \pi/2]$, $[0, \pi]$, y $(-\pi/2, \pi/2)$, respectivamente, son biunívocas y por tanto tienen inversas. Las funciones inversas tienen dominio y rango como sigue.

Función	Dominio	Rango
$\text{sen}^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[-\pi/2, \pi/2]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	$\mathbb{R}$	$(-\pi/2, \pi/2)$

Las funciones $\text{sen}^{-1} x$, $\cos^{-1} x$ y $\tan^{-1} x$ a veces reciben el nombre de **arcseno, arccoseno** y **arctangente**, respectivamente.

Como éstas son funciones inversas, invierten la regla de la función original. Por ejemplo, como $\text{sen}\, \pi/6 = \frac{1}{2}$, se concluye que $\text{sen}^{-1} \frac{1}{2} = \pi/6$. El siguiente ejemplo da más ilustraciones.

$$\tan^{-1} x \neq \frac{1}{\tan x}$$

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre el valor exacto.

(a) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ **(c)** $\tan^{-1} 1$

SOLUCIÓN

(a) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/3$.

(b) El ángulo en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $-\frac{1}{2}$ es $2\pi/3$. Por lo tanto, $\cos^{-1}(-\frac{1}{2}) = 2\pi/3$.

(c) El ángulo en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuya tangente es 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

$$\operatorname{Sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underbrace{\frac{\pi}{3}}_{120^{\circ}}$$

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas inversas

Encuentre valores para la expresión dada.

(a) $\text{sen}^{-1}(0.71)$ **(b)** $\tan^{-1}(2)$ **(c)** $\cos^{-1}(2)$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para aproximar estos valores.

(a) Usando las teclas $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{SIN}}$ o $\boxed{\text{SIN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{ARC}}\,\boxed{\text{SIN}}$ de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\text{sen}^{-1}(0.71) \approx 0.78950$$

(b) Usando las teclas $\boxed{\text{INV}}\,\boxed{\text{TAN}}$ o $\boxed{\text{TAN}^{-1}}$ o $\boxed{\text{ARC}}\,\boxed{\text{TAN}}$ de la calculadora (puesta en el modo de radianes), obtenemos

$$\tan^{-1} 2 \approx 1.10715$$

(c) Como $2 > 1$, no está en el dominio de $\cos^{-1} x$, de modo que $\cos^{-1} x$ no está definido.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 11** Y **13**

Solución para ángulos en triángulos rectángulos

En la Sección 6.2 resolvimos triángulos usando las funciones trigonométricas para hallar los lados desconocidos. Ahora usamos funciones trigonométricas inversas para despejar *ángulos* en un triángulo rectángulo.

EJEMPLO 3 | Hallar un ángulo en un triángulo rectángulo

Encuentre el ángulo θ en el triángulo que se ve en la Figura 2.

FIGURA 2

SOLUCIÓN Como θ es el ángulo opuesto al lado de longitud 10 y la hipotenusa tiene longitud 50, tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op }\theta}{\text{hip}}$$

Ahora podemos usar $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ para hallar θ:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\tfrac{1}{5} \qquad \text{Definición de } \operatorname{sen}^{-1} x$$

$$\theta \approx 11.5° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

EJEMPLO 4 | Solución de un ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies se apoya contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado por la escalera y el edificio?

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como en la Figura 3. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{6}{40} = 0.15 \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op a }\theta}{\text{hip}}$$

A continuación usamos $\operatorname{sen}^{-1}(0.15)$ para hallar θ:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}(0.15) \qquad \text{Definición de sen}^{-1}$$

$$\theta \approx 8.6° \qquad \text{Calculadora (en modo de grados)}$$

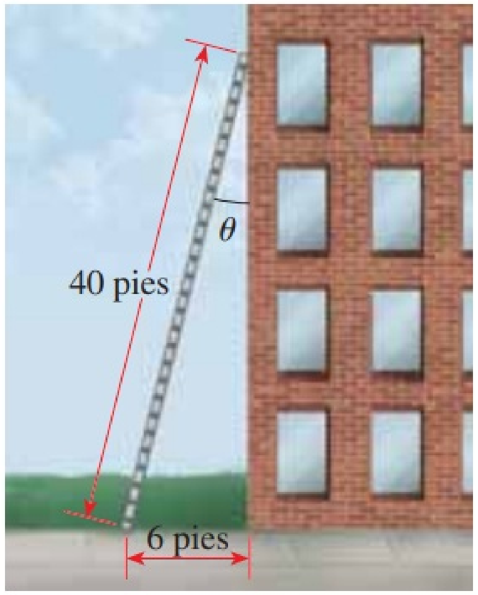


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

6.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones seno inverso, coseno inverso y tangente inversa tienen los siguientes dominios y rangos.

   (a) La función $\operatorname{sen}^{-1} x$ tiene dominio____ y rango _____.

   (b) La función $\cos^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

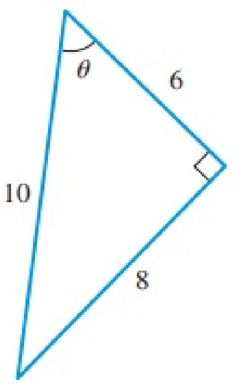
   (c) La función $\tan^{-1} x$ tiene dominio ___ y rango _____.

2. En el triángulo mostrado, podemos hallar el ángulo θ como sigue:

   (a) $\theta = \operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\square}{\square}$

   (b) $\theta = \cos^{-1} \dfrac{\square}{\square}$

   (c) $\theta = \tan^{-1} \dfrac{\square}{\square}$



HABILIDADES

3-6 ■ Encuentre el valor exacto de cada expresión, si está definida.

3. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{1}{2}$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-1)$

4. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **(c)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

5. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **(b)** $\cos^{-1} \dfrac{1}{2}$ **(c)** $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

6. **(a)** $\operatorname{sen}^{-1}(-1)$ **(b)** $\cos^{-1} 1$ **(c)** $\tan^{-1} 0$

7-14 ■ Use calculadora para hallar un valor aproximado de cada expresión, redondeado a cinco lugares decimales, si está definido.

7. $\operatorname{sen}^{-1}(0.45)$ **8.** $\cos^{-1}(-0.75$

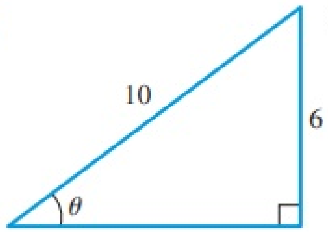
9. $\cos^{-1}(-\frac{1}{4})$ **10.** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{3}$

11. $\tan^{-1} 3$ **12.** $\tan^{-1}(-4)$

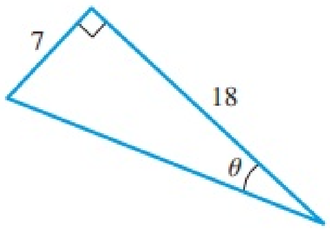
13. $\cos^{-1} 3$ **14.** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

15-20 ■ Encuentre el ángulo θ en grados, redondeado a un decimal.

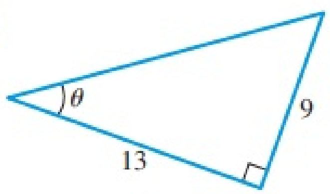
15.



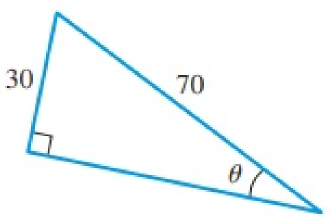
16.



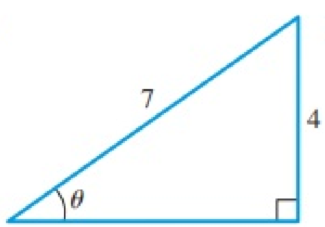
17.



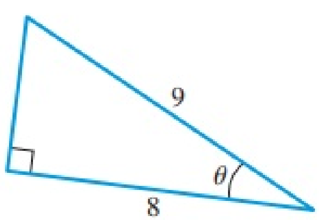
18.



19.



20.



21-26 ■ Encuentre todos los ángulos θ entre $0°$ y $180°$ que satisfagan la ecuación dada.

21. $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{2}$ **22.** $\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

23. $\operatorname{sen}\theta = 0.7$ **24.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{4}$

25. $\cos\theta = 0.7$ **26.** $\cos\theta = \frac{1}{9}$

27-32 ■ Encuentre el valor exacto de la expresión.

27. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{5})$ **28.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{4}{5})$ **29.** $\sec(\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13})$

30. $\csc(\cos^{-1}\frac{7}{25})$ **31.** $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{12}{13})$ **32.** $\cot(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3})$

33-36 ■ Reescriba la expresión como una expresión algebraica en x.

33. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **34.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

35. $\tan \operatorname{sen}^{-1}x$ **36.** $\cos \tan^{-1}x$

APLICACIONES

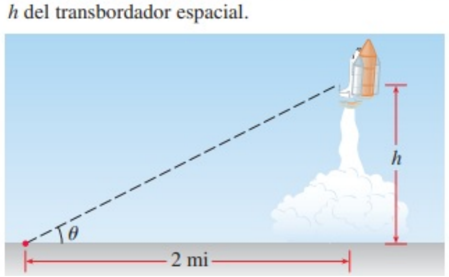
37. Escalera inclinada Una escalera de 20 pies está apoyada contra un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿A qué altura llega la escalera en el edificio?

38. Ángulo del Sol Un árbol de 96 pies proyecta una sombra que mide 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

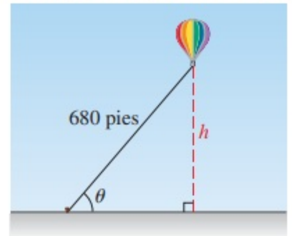
39. Altitud de un transbordador espacial Un observador mira al transbordador espacial desde una distancia de 2 millas de la plataforma de lanzamiento.

(a) Exprese la altitud del transbordador espacial como función del ángulo de elevación θ.

(b) Exprese el ángulo de elevación θ como función de la altitud h del transbordador espacial.



(b) Encuentre el ángulo si el globo está a 500 pies de altura.



42. Vista desde un satélite Las figuras indican que cuanta más alta sea la órbita de un satélite, más se puede "ver" de la Tierra desde el satélite. Sean θ, s y h como en la figura, y suponga que la Tierra es una esfera de radio 3960 millas.

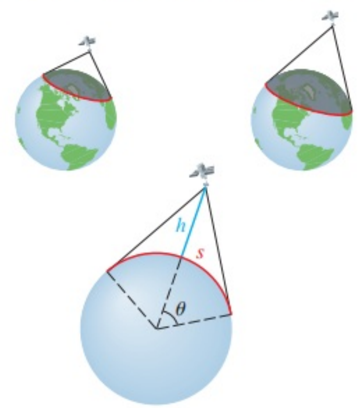
(a) Exprese el ángulo θ como función de h.

(b) Exprese la distancia s como función de θ.

(c) Exprese la distancia s como función de h. [*Sugerencia:* Encuentre la composición de las funciones de las partes (a) y (b).]

(d) Si el satélite está a 100 millas sobre la Tierra, ¿cuál es la distancia s que puede ver?

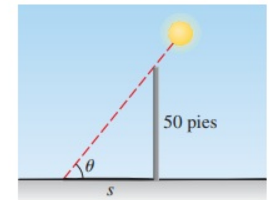
(e) ¿A qué altura debe estar el satélite para que vea Los Ángeles y Nueva York, que están a 2450 millas entre sí?



40. Altura de un poste Un poste de 50 pies proyecta una sombra como se ve en la figura.

(a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol como función de la longitud s de la sombra.

(b) Encuentre el ángulo θ de elevación del Sol cuando la sombra sea de 20 pies de largo.



41. Altitud de un globo Encuentre el ángulo θ si el globo está a una altitud de 500 pies.

(a) Exprese el ángulo como una función de la altura h del globo.

43. Surfeando en la ola perfecta Para que se pueda surfear una ola, ésta no puede romper toda a la vez. Robert Guza y Tony Bowen han demostrado que una ola tiene un "hombro" que se puede surfear si golpea la línea de la orilla a un ángulo θ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{(2n+1)\tan\beta}\right)$$

donde β es el ángulo al cual la playa hace pendiente y donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Para $\beta = 10°$, encuentre θ cuando $n = 3$.

(b) Para $\beta = 15°$, encuentre θ cuando $n = 2$, 3 y 4. Explique por qué la fórmula no da un valor para θ cuando $n = 0$ o 1.

7.1 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Simplificación de expresiones trigonométricas ▶ Demostración de identidades trigonométricas

Empezamos por hacer una lista de algunas identidades trigonométricas básicas. Ya estudiamos la mayor parte de éstas en los Capítulos 5 y 6; pedimos al estudiante demuestre las identidades de cofunción en el Ejercicio 102.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares e impares

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades hacen posible que escribamos la misma expresión en formas diferentes. A veces es posible reescribir una expresión de aspecto complicado como una mucho más sencilla. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos factorización, denominadores comunes y las Fórmulas de Productos Notables. Para simplificar expresiones trigonométricas, usamos estas mismas técnicas junto con las identidades trigonométricas fundamentales.

EJEMPLO 1 | Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

SOLUCIÓN Empezamos por reescribir la expresión en términos de seno y coseno:

$$\begin{aligned}
\cos t + \tan t \operatorname{sen} t &= \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t && \text{Identidad recíproca} \\
&= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{1}{\cos t} && \text{Identidad de Pitágoras} \\
&= \sec t && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

EJEMPLO 2 | Simplificación por combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

SOLUCIÓN Combinamos las fracciones usando un común denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} &= \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Distribuya sen } \theta \\
&= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} && \text{Identidad de Pitágoras} \\
&= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta && \text{Cancele y use identidad recíproca}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 21

Demostración de identidades trigonométricas

Numerosas identidades se originan en las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen, aprenderemos a demostrar que una ecuación trigonométrica determinada es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

En primer término, es fácil determinar cuándo una ecuación dada *no es* una identidad. Todo lo que es necesario hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algún valor de la variable (o variables). Entonces la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para verificar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un lado de la ecuación en el otro lado mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Empezar con un lado.** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
2. **Usar identidades conocidas.** Use álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Lleve las expresiones fraccionarias a un denominador común, factorice y use las identidades fundamentales para simplificar expresiones.
3. **Convertir a senos y cosenos.** Si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Advertencia: Para demostrar una identidad, *no sólo* ejecutamos las mismas operaciones en ambos lados de la ecuación. Por ejemplo, Si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

(1) $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos lados, obtenemos la ecuación

(2) $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

que es claramente una identidad. ¿Significa esto que la ecuación original es una identidad? Por supuesto que no. El problema aquí es que la operación de elevar al cuadrado **no es reversible** en el sentido de que no podemos regresar a (1) a partir de (2) al tomar raíces cuadradas (invirtiendo el procedimiento). Sólo las operaciones que son reversibles necesariamente transformarán una identidad en una identidad.

EJEMPLO 3 | Demostrar una identidad reescribiéndola en términos de seno y coseno

Considere la ecuación $\cos\theta(\sec\theta - \cos\theta) = \text{sen}^2\theta$.

(a) Verifique algebraicamente que la ecuación sea una identidad.

(b) Confirme gráficamente que la ecuación es una identidad.

$$\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$$

SOLUCIÓN

(a) El lado izquierdo (LI) se ve más complicado, de modo que empezamos con él y tratamos de transformarlo en el lado derecho (LD):

$$\begin{aligned}
\text{LI} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\
&= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\
&= 1 - \cos^2\theta && \text{Expandir} \\
&= \text{sen}^2\theta = \text{LD} && \text{Teorema de Pitágoras}
\end{aligned}$$

(b) Graficamos cada lado de la ecuación para ver si la gráfica coincide. De la Figura 1 vemos que las gráficas de $y = \cos\theta(\sec\theta - \cos\theta)$ y $y = \text{sen}^2\theta$ son idénticas. Esto confirma que la ecuación es una identidad.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

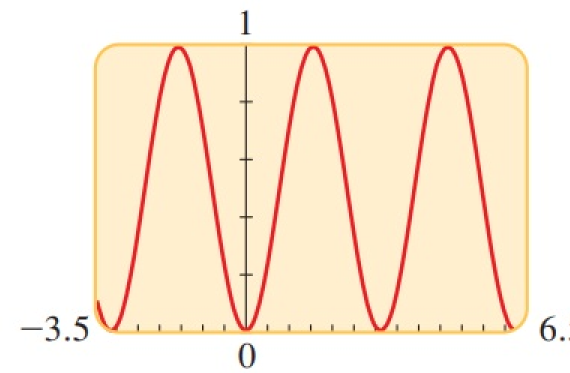


FIGURA 1

EJEMPLO 4 | Demostrar una identidad combinando fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

SOLUCIÓN Hallando un denominador común y combinando las fracciones del lado derecho de esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{LD} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Denominador común} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplifique} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad de Pitágoras} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorice} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{LI} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

EJEMPLO 6 | Probar una identidad trabajado separadamente con ambos lados

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1}$.

SOLUCIÓN Probamos la identidad al cambiar cada lado separadamente en la misma expresión. Dé las razones para cada paso:

$$\text{LI} = \frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\text{LD} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se deduce que LI = LD, de modo que la ecuación es una identidad.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81** ■

EJEMPLO 7 | Sustitución trigonométrica

Sustituya sen θ por x en la expresión $\sqrt{1 - x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \le \theta \le \pi/2$.

SOLUCIÓN Haciendo $x = \text{sen}\ \theta$, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - x^2} &= \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} && \text{Sustituya } x = \text{sen}\ \theta \\ &= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad de Pitágoras} \\ &= \cos\theta && \text{Tome raíz cuadrada} \end{aligned}$$

La última igualdad es verdadera porque $\cos\theta \ge 0$ para todos los valores de θ en cuestión.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **91** ■

7.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una ecuación se llama identidad si es válida para _____valores de la variable. La ecuación $2x = x + x$ es una identidad algebraica, y la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x =$ ______es una identidad trigonométrica.

2. Para cualquier x es verdadero que $\cos(-x)$ tiene el mismo valor que $\cos x$. Expresamos este hecho como la identidad___________.

HABILIDADES

3-12 ■ Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y luego simplifique.

3. $\cos t \tan t$
4. $\cos t \csc t$
5. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta$
6. $\tan\theta \csc\theta$
7. $\tan^2 x - \sec^2 x$
8. $\dfrac{\sec x}{\csc x}$
9. $\operatorname{sen} u + \cot u \cos u$
10. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta)$
11. $\dfrac{\sec\theta - \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$
12. $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta - \operatorname{sen}\theta}$

13-26 ■ Simplifique la expresión trigonométrica.

13. $\dfrac{\operatorname{sen} x \sec x}{\tan x}$
14. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$
15. $\dfrac{1 + \cos y}{1 + \sec y}$
16. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$
17. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$
18. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$
19. $\dfrac{1 + \csc x}{\cos x + \cot x}$
20. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$
21. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + \operatorname{sen} u}$
22. $\tan x \cos x \csc x$
23. $\dfrac{2 + \tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$
24. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$
25. $\tan\theta + \cos(-\theta) + \tan(-\theta)$
26. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

27-28 ■ Considere la ecuación dada. **(a)** Verifique algebraicamente que la ecuación sea una identidad. **(b)** Confirme gráficamente que la ecuación sea una identidad.

27. $\dfrac{\cos x}{\sec x \operatorname{sen} x} = \csc x - \operatorname{sen} x$
28. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$

29-90 ■ Verifique la identidad.

29. $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\tan\theta} = \cos\theta$
30. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \operatorname{sen} x$
31. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$
32. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$
33. $\operatorname{sen} B + \cos B \cot B = \csc B$
34. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$
35. $\cot(-\alpha)\cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) = -\csc\alpha$
36. $\csc x\,[\csc x + \operatorname{sen}(-x)] = \cot^2 x$
37. $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\csc\theta$
38. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x$
39. $(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta) = \dfrac{1}{\csc^2\beta}$
40. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} = 1$
41. $\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$
42. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^4 = (1 + 2\operatorname{sen} x \cos x)^2$
43. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \operatorname{sen}^2 t$
44. $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\sec x - \tan x)^2$
45. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$
46. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$
47. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\operatorname{sen} x$
48. $\operatorname{sen}^4\theta - \cos^4\theta = \operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta$
49. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$
50. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$
51. $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
52. $(\tan y + \cot y)\operatorname{sen} y \cos y = 1$
53. $\dfrac{1 - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$
54. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$
55. $\tan^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \tan^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$
56. $\cot^2\theta\cos^2\theta = \cot^2\theta - \cos^2\theta$
57. $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}$
58. $\dfrac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$
59. $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t \cos t} = 2 + \sec t \csc t$
60. $\sec t \csc t\,(\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$
61. $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$
62. $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$
63. $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x\,(\sec x + \tan x)$
64. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$
65. $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$
66. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$
67. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$
68. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2\csc x$
69. $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$
70. $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x$
71. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$
72. $\dfrac{\tan v \operatorname{sen} v}{\tan v + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan v - \operatorname{sen} v}{\tan v \operatorname{sen} v}$
73. $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$
74. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$
75. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \csc\theta}{\cos\theta - \cot\theta}$
76. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$
77. $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$
80. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4\tan x \sec x$
81. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$
82. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$
83. $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$
84. $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
85. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$
86. $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \operatorname{sen} v \cos v$
87. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = (\tan x + \sec x)^2$
88. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$
89. $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x$
90. $(\operatorname{sen}\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha - \cot\alpha) = (\cos\alpha - 1)(\operatorname{sen}\alpha - 1)$

91-96 ■ Haga la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica dada y simplifique (vea Ejemplo 7). Suponga que $0 \le \theta \le \pi/2$.

91. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \operatorname{sen}\theta$
92. $\sqrt{1 + x^2}$, $x = \tan\theta$
93. $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec\theta$
94. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$, $x = 2\tan\theta$
95. $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3\operatorname{sen}\theta$
96. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$, $x = 5\sec\theta$

97-100 ■ Grafique f y g en el mismo rectángulo de vista. ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Pruebe su respuesta.

97. $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
98. $f(x) = \tan x\,(1 + \operatorname{sen} x)$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$
99. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$, $g(x) = 1$
100. $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$, $g(x) = 2\cos^2 x - 1$

101. Demuestre que la ecuación no es una identidad.
   (a) $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x$
   (b) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
   (c) $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$
   (d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x + \sec x$