

# 7

## Similitud, análisis dimensional y modelado

Aunque muchos problemas prácticos de ingeniería relacionados con la mecánica de fluidos se pueden resolver usando las ecuaciones y los procedimientos analíticos descritos en los capítulos precedentes, existe un gran número de problemas cuya solución depende de datos obtenidos experimentalmente. De hecho, probablemente es justo mencionar que muy pocos problemas con fluidos reales se pueden resolver sólo por análisis. La solución de muchos problemas se logra mediante el empleo de una combinación de análisis y datos experimentales. Así, los ingenieros que trabajan sobre problemas de mecánica de fluidos deben conocer el método experimental para estos problemas, de modo que puedan interpretar y usar los datos obtenidos por otros, como los que aparecen en manuales, o poder planificar y realizar los experimentos necesarios en sus propios laboratorios. En este capítulo se considerarán algunas técnicas e ideas importantes en la planificación y ejecución de experimentos, así como para comprender y correlacionar datos quizá obtenidos por otros investigadores.

Un objetivo evidente de cualquier experimento es hacer que los resultados tengan tanta aplicación como sea posible. Para lograr este objetivo, a menudo se usa el concepto de similitud, de modo que las mediciones efectuadas en un sistema (por ejemplo, en el laboratorio) se puedan usar para describir el comportamiento de otros sistemas semejantes (fuera del laboratorio). Los sistemas de laboratorio suelen concebirse como *modelos* y se usan para estudiar el fenómeno de interés en condiciones cuidadosamente controladas. A partir de estos estudios de modelos es posible obtener fórmulas empíricas o hacer predicciones específicas de una o más características de algún otro sistema semejante. Para este efecto, es necesario establecer la relación entre el modelo de laboratorio y el "otro" sistema. En las secciones siguientes se descubrirá cómo se puede lograr esto de manera sistemática.

### 7.1 Análisis dimensional

Para ilustrar un problema representativo de mecánica de fluidos en que se requiere experimentación, considérese el flujo estable de un fluido newtoniano incompresible a través de una larga tubería circular

horizontal de pared lisa. Una característica importante de este sistema, que debe ser interesante para un ingeniero que diseña una tubería, es la caída de presión por unidad de longitud que se crea a lo largo de la tubería como resultado de la fricción. Aunque este problema de flujo podría parecer relativamente simple, en general no es posible resolverlo analíticamente (inclusive con auxilio de grandes computadoras) sin el empleo de datos experimentales.

El primer paso en la planificación de un experimento para estudiar este problema sería decidir sobre los factores, o variables, que afectan la caída de presión por unidad de longitud,  $\Delta p_f$ . Es de esperar que la lista incluya el diámetro de la tubería,  $D$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , la viscosidad del fluido,  $\mu$ , y la velocidad media,  $V$ , a que el fluido circula por la tubería. Así, esta relación se puede expresar como

$$\Delta p_f = f(D, \rho, \mu, V) \quad (7.1)$$

la cual simplemente expresa matemáticamente que es de esperar que la caída de presión por unidad de longitud sea alguna función de los factores entre paréntesis. En este momento se desconoce la naturaleza de la función y el objetivo de los experimentos que habrán de realizarse es determinar la naturaleza de esta función.

Para efectuar los experimentos de manera sistemática y que tenga sentido podría ser necesario cambiar una de las variables, como la velocidad, en tanto las demás se mantienen constantes, y medir la caída de presión correspondiente. Esta serie de pruebas produciría datos que se pueden representar gráficamente como se ilustra en la figura 7.1a. Cabe aclarar que esta gráfica sólo sería válida para la tubería y el fluido específicos usados en las pruebas, y ciertamente no proporciona la expresión general que se busca. Se podría repetir el proceso variando a su vez cada una de las otras variables, como se ilustra en las figuras 7.1b, 7.1c y 7.1d. Este método para determinar la relación funcional entre la caída de presión y los diversos factores que la afectan, aunque lógico en cuanto a su concepción, está lleno de dificultades. Puede ser que la realización de algunos de los experimentos sea difícil; por ejemplo, para obtener los datos que se ilustran en la figura 7.1c es necesario variar la densidad del fluido en tanto se mantiene constante la viscosidad. ¿Cómo se podría lograr esto? Finalmente, una vez que se obtienen las diversas curvas que se muestran en las figuras 7.1a, 7.1b, 7.1c y 7.1d, ¿cómo se podrían combinar estos datos para obtener la relación funcional general buscada entre  $\Delta p_f$ ,  $D$ ,  $\rho$ ,  $\mu$  y  $V$  que sea válida para cualquier sistema de tubería semejante?

Afortunadamente, existe un método mucho más sencillo para abordar este problema, con el que se eliminan las dificultades antes descritas. En las secciones siguientes se demostrará que en vez de trabajar con la lista original de variables, como se describe en la ecuación 7.1, es posible reunir éstas en

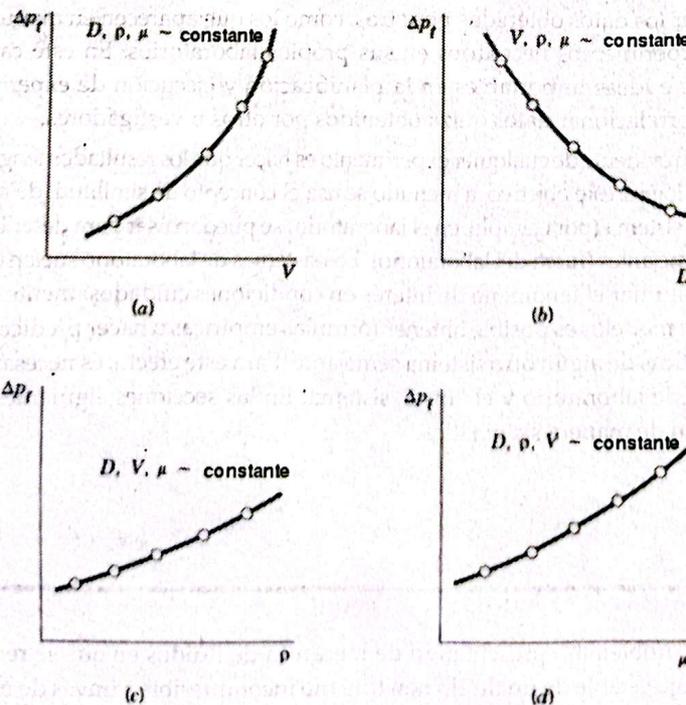


FIGURA 7.1 Gráficas ilustrativas que muestran cómo la caída de presión en una tubería se puede ver afectada por varios factores diferentes.

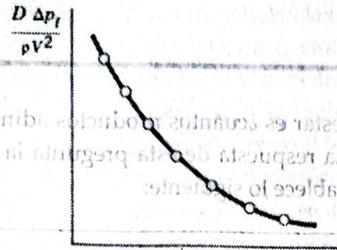


FIGURA 7.2 Gráfica ilustrativa de los datos de caída de presión usando parámetros adimensionales.

dos combinaciones adimensionales de variables (denominadas *productos adimensionales* o *grupos adimensionales*) de modo que

$$\frac{D \Delta p_l}{\rho V^2} = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right) \quad (7.2)$$

Así, en lugar de tener que trabajar con cinco variables, ahora sólo se tienen dos. El experimento necesario consistiría simplemente en hacer variar el producto adimensional  $\rho V D / \mu$  y determinar el valor correspondiente de  $D \Delta p_l / \rho V^2$ . Luego, los resultados del experimento se podrían representar por medio de una sola curva universal como se ilustra en la figura 7.2. Esta curva sería válida para cualquier combinación de tubo de pared lisa y fluido newtoniano incompresible. Para obtener esta curva se podrían elegir una tubería de tamaño conveniente y un fluido con el que sea fácil trabajar. Obsérvese que no sería necesario tener que trabajar con tuberías de tamaños distintos o inclusive con fluidos diferentes. Resulta evidente que el experimento sería mucho más sencillo, fácil de realizar y menos costoso (lo que ciertamente debe impresionar al jefe).

La base para efectuar esta simplificación reside en una consideración de las dimensiones de la variable en cuestión. Como se analizó en el capítulo 1, las cantidades físicas se pueden describir cualitativamente en términos de dimensiones básicas como la masa,  $M$ , la longitud,  $L$ , y el tiempo,  $T$ .<sup>1</sup> Alternativamente, como dimensiones básicas se podrían usar la fuerza,  $F$ ,  $L$  y  $T$ , ya que por la segunda ley de Newton

$$F \doteq MLT^{-2}$$

(Recuérdese del capítulo 1 que la notación  $\doteq$  se usa para indicar igualdad dimensional.) Las dimensiones de las variables en el ejemplo de flujo en una tubería son  $\Delta p_l \doteq FL^{-3}$ ,  $D \doteq L$ ,  $\rho \doteq FL^{-4}T^2$ ,  $\mu \doteq FL^{-2}T$  y  $V \doteq LT^{-1}$ . Al comprobar rápidamente las dimensiones de los dos grupos que aparecen en la ecuación 7.2 se observa que, en efecto, se trata de productos *adimensionales*; es decir,

$$\frac{D \Delta p_l}{\rho V^2} \doteq \frac{L(F/L^3)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} \doteq F^0 L^0 T^0$$

$$\frac{\rho V D}{\mu} \doteq \frac{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)}{(FL^{-2}T)} \doteq F^0 L^0 T^0$$

No sólo se ha reducido el número de variables de cinco a dos, sino que los nuevos grupos son combinaciones adimensionales de variables, lo cual significa que los resultados presentados en la forma de la figura 7.2 son independientes del sistema de unidades que se elija usar. Este tipo de análisis se denomina *análisis dimensional*, y la base para su aplicación a una diversidad de problemas se encuentra en el *teorema pi de Buckingham*, que se describirá en la siguiente sección.

<sup>1</sup> Como se observó en el capítulo 1,  $T$  se usará para representar la dimensión básica del tiempo, aunque  $T$  también se usa para indicar la temperatura en relaciones termodinámicas (como la ley de los gases ideales).

## 7.2 Teorema pi de Buckingham

Una pregunta fundamental que se debe contestar es ¿cuántos productos adimensionales se requieren para sustituir la lista original de variables? La respuesta de esta pregunta la proporciona el teorema fundamental del análisis dimensional, que establece lo siguiente:

Si una ecuación de  $k$  variables es dimensionalmente homogénea, se puede reducir a una relación entre  $k - r$  productos adimensionales independientes, donde  $r$  es el número mínimo de dimensiones de referencia necesarias para describir las variables.

Es común referirse a los productos adimensionales como "términos pi", y el teorema se denomina teorema pi de Buckingham.<sup>2</sup> Buckingham usó el símbolo  $\Pi$  para representar un producto adimensional, y esta notación es de uso ordinario. Aunque el teorema pi es simple, su demostración no lo es tanto, por lo que no se presentará aquí. Muchos libros completos se han dedicado al tema del análisis de similitud y dimensional, varios de los cuales se mencionan en la bibliografía al final de este capítulo (referencias 1 a 15). El estudiante interesado en continuar estudiando el tema con mayor profundidad (incluyendo la demostración del teorema pi) pueden consultar alguno de estos libros.

El teorema pi se basa en la idea de homogeneidad dimensional introducida en el capítulo 1. Esencialmente se supone que para cualquier ecuación con sentido físico en la que aparecen  $k$  variables, como

$u_1 = f(u_2, u_3, \dots, u_k)$

las dimensiones de la variable del miembro izquierdo deben ser iguales a las dimensiones de cualquier término que aparezca en el miembro derecho de la igualdad. Entonces se concluye que la ecuación se puede reordenar en un conjunto de productos adimensionales (términos pi) de modo que

$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$

El número necesario de términos pi es menor por  $r$  que el número de variables originales, donde  $r$  está determinado por el mínimo número de dimensiones de referencia necesarias para describir la lista original de variables. Casi siempre las dimensiones de referencia necesarias para describir las variables son las dimensiones básicas  $M, L$  y  $T$  o  $F, L$  y  $T$ . Sin embargo, en algunos casos quizá sólo se requieran dos dimensiones, como  $L$  y  $T$ , o quizá sólo una, como  $L$ . También, en unos cuantos casos excepcionales las variables se pueden describir por medio de alguna combinación de dimensiones básicas, como  $M/T^2$  y  $L$ , y en este caso  $r$  sería igual a dos en vez de a tres. Aunque el empleo del teorema pi puede parecer un tanto misterioso y complicado, en realidad se puede elaborar un procedimiento sistemático sencillo a fin de obtener los términos pi para un problema dado.

## 7.3 Determinación de los términos pi

Para formar los productos adimensionales, o términos pi, que se presentan en análisis dimensional se pueden usar varios métodos. Esencialmente, se busca un método con el que sea posible formar de manera sistemática los términos pi de modo que se tenga la certeza de que son adimensionales e independientes, y que su número sea el correcto. El método que se describirá en detalle en esta sección se denomina *método de las variables repetidas*. En el apéndice D se describe otro método comparable.

Será de utilidad descomponer el método de las variables repetidas en una serie de pasos distintos que se pueden seguir para cualquier problema dado. Con un poco de práctica es posible realizar fácilmente un análisis dimensional para el problema en cuestión.

<sup>2</sup> Aunque varios investigadores actuales, incluyendo a Lord Rayleigh (1842-1919) en el siglo XIX, contribuyeron al desarrollo del análisis dimensional, con el teorema fundamental suele asociarse el nombre de Edgar Buckingham (1867-1940). Buckingham estimuló el interés sobre el tema en Estados Unidos de América a través de su publicación durante la primera parte del siglo XX. Ver, por ejemplo, su obra *On Physically Similar Systems: Illustrations of the Use of Dimensional Equations*, *Phys. Rev.*, 4 (1914), 345-376.

**Paso 1.** Enumerar todas las variables que aparecen en el problema. Este paso es el más difícil y, por supuesto, es sumamente importante que se incluyan todas las variables pertinentes. En caso contrario, el análisis dimensional no será correcto. El término "variable" se usa para contemplar cualquier cantidad, incluyendo constantes dimensionales o adimensionales, que participe en el fenómeno bajo investigación. Todas estas cantidades se deben incluir en la lista de "variables" que serán consideradas en el análisis dimensional. La determinación de las variables se debe efectuar con base en el conocimiento que el experimentador tenga sobre el problema y en las leyes físicas que rigen el fenómeno. De ordinario, en las variables se incluirá a aquellas que son necesarias para describir la geometría del sistema (como el diámetro de la tubería), definir cualquier propiedad del fluido (como la viscosidad) e indicar los efectos externos que afectan al sistema (como una presión impulsora). Se pretende que estas clases generales de variables sean categorías amplias que deben ser útiles para identificar variables. Sin embargo, es probable que haya variables que no entren fácilmente en alguna de estas categorías, por lo que cada problema se debe analizar con cuidado.

En virtud de que se desea tener un número reducido de variables, de modo que se pueda disminuir la cantidad de trabajo de laboratorio, es importante que todas las variables sean independientes. Por ejemplo, si en un problema el área de la sección transversal de una tubería es una variable importante, se podría usar el área o el diámetro de la tubería, pero no ambos, ya que evidentemente no son independientes. De manera semejante, si tanto la densidad del fluido,  $\rho$ , como el peso específico,  $\gamma$ , son variables importantes, se pueden enumerar  $\rho$  y  $\gamma$ , o  $\rho$  y  $g$  (aceleración de la gravitación), o  $\gamma$  y  $g$ . Sin embargo, sería incorrecto usar estas tres variables, ya que  $\gamma = \rho g$ ; es decir,  $\rho$ ,  $\gamma$  y  $g$  no son independientes. Obsérvese que aunque  $g$  normalmente sería constante en un experimento dado, este hecho es irrelevante por lo que toca al análisis dimensional.

**Paso 2.** Expresar cada una de las variables en términos de dimensiones básicas. Para problemas de mecánica de fluidos, las dimensiones básicas son  $M$ ,  $L$  y  $T$  o  $F$ ,  $L$  y  $T$ . Dimensionalmente, estos dos conjuntos se relacionan por medio de la segunda ley de Newton ( $F = ma$ ) de modo que  $F \equiv MLT^{-2}$ . Por ejemplo,  $\rho \equiv ML^{-3}$  o  $\rho \equiv FL^{-4}T^{-2}$ . Así, se puede usar cualquier conjunto. En la tabla 1.1 del capítulo 1 se muestran las dimensiones básicas para variables comunes encontradas en problemas de mecánica de fluidos.

**Paso 3.** Determinar el número requerido de términos pi. Esto es posible mediante el teorema pi de Buckingham, el cual indica que el número de términos pi es igual a  $k - r$ , donde  $k$  es el número de variables del problema (que se determinó en el paso 1) y  $r$  es el número de dimensiones de referencia necesarias para describir estas variables (que se determinó en el paso 2). Las dimensiones de referencia suelen corresponder a las dimensiones básicas, y se pueden determinar por inspección de las dimensiones de las variables obtenidas en el paso 2. Como ya se observó, hay ocasiones (usualmente excepcionales) en que las dimensiones básicas aparecen en combinaciones, de modo que el número de dimensiones de referencia es menor que el número de dimensiones básicas. Esta posibilidad se ilustra en el ejemplo 7.2.

**Paso 4.** Elegir un número de variables repetidas, donde el número necesario es igual al número de dimensiones de referencia. Esencialmente, lo que se hace es elegir de la lista original de variables varias de las que se puedan combinar con cada una de las variables restantes para formar un término pi. Todas las dimensiones de referencia se deben incluir en el grupo de variables repetidas, y cada variable que se repite debe ser dimensionalmente independiente de las otras (es decir, las dimensiones de una variable que se repite no pueden ser reproducidas por ninguna combinación de productos de potencias de las variables restantes repetidas). Esto significa que las variables repetidas no se pueden combinar para formar un producto adimensional.

Para cualquier problema dado normalmente se tiene interés en determinar cómo una variable particular es afectada por las demás. Ésta se considera como la variable dependiente y conviene que aparezca sólo en un término pi. Así, no elegir la variable dependiente como una de las variables repetidas, ya que éstas en general aparecen en más de un término pi.

**Paso 5.** Formar un término  $\pi_i$  multiplicando una de las variables que se no repiten por el producto de las variables repetidas, cada una elevada a un exponente que haga adimensional la combinación. Esencialmente, cada término  $\pi_i$  es de la forma  $u_1^{a_i} u_2^{b_i} u_3^{c_i}$ , donde  $u_i$  es una de las variables que se no repiten;  $u_1, u_2$  y  $u_3$  son las variables repetidas; y los exponentes  $a_i, b_i$  y  $c_i$  están determinados de modo que la combinación es adimensional.

**Paso 6.** Repetir el paso 5 para cada una de las demás variables que se no repiten. El conjunto resultante de términos  $\pi_i$  corresponde al número requerido que se obtuvo en el paso 3. En caso contrario, se debe comprobar el trabajo realizado: es posible que se haya cometido un error.

**Paso 7.** Comprobar todos los términos  $\pi_i$  resultantes para asegurarse que son adimensionales. Es fácil equivocarse al obtener los términos  $\pi_i$ . Sin embargo, esto se puede comprobar sustituyendo simplemente las dimensiones de las variables en los términos  $\pi_i$  para confirmar que todos son adimensionales. Una forma aceptable para hacer lo anterior es expresar las variables en términos de  $M, L$  y  $T$  si inicialmente se usaron las dimensiones básicas  $F, L$  y  $T$ , o viceversa, y luego comprobar para tener la certeza de que los términos  $\pi_i$  son adimensionales.

**Paso 8.** Expresar la forma final como una relación entre los términos  $\pi_i$  y pensar en su significado. En general, la forma final se puede escribir como

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$$

donde  $\Pi_1$  debe contener la variable dependiente en el numerador. Se debe recalcar que si se comenzó con la lista correcta de variables (y los demás pasos se efectuaron correctamente), entonces para describir el problema se puede usar la relación en función de los términos  $\pi_i$ . Basta trabajar con los términos  $\pi_i$ , no con las variables individuales. Sin embargo, se debe observar claramente que es hasta aquí que se puede llegar con el análisis dimensional; es decir, la relación funcional real entre los términos  $\pi_i$  se debe determinar experimentalmente.

Para ilustrar los pasos anteriores, nuevamente se considerará el primer problema analizado en este capítulo, relacionado con el flujo estable de un fluido newtoniano incompresible por una larga tubería circular horizontal de pared lisa. Se tiene interés en la caída de presión por unidad de longitud,  $\Delta p_L$ , a lo largo de la tubería. Según el paso 1 es necesario enumerar todas las variables pertinentes relacionadas con el caso según la experiencia del experimentador. En este problema se supondrá que

$$\Delta p_L = f(D, \rho, \mu, V)$$

donde  $D$  es el diámetro de la tubería,  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido, respectivamente, y  $V$  es la velocidad media.

Luego (paso 2), todas las variables se expresan en términos de las dimensiones básicas. Usando  $F, L$  y  $T$  como dimensiones básicas se concluye que

$$\Delta p_L \doteq FL^{-3}$$

$$D \doteq L$$

$$\rho \doteq FL^{-4}T^2$$

$$\mu \doteq FL^{-2}T$$

$$V \doteq LT^{-1}$$

Si se desea, también se hubieran podido usar  $M, L$  y  $T$  como dimensiones básicas: el resultado final es el mismo. Obsérvese que para la densidad, que es masa por unidad de volumen ( $ML^{-3}$ ), se usó la relación  $F \doteq MLT^{-2}$  para expresar la densidad en términos de  $F, L$  y  $T$ . No se deben mezclar las dimensiones básicas; es decir, se debe usar  $F, L$  y  $T$  o  $M, L$  y  $T$ .

Ahora ya es posible aplicar el teorema  $\pi$  para determinar el número requerido de términos  $\pi_i$  (paso 3). Una inspección de las dimensiones de las variables del paso 2 revela que son necesarias las tres dimensiones básicas para describir las variables. Como hay cinco ( $k = 5$ ) variables (no olvidar contar la variable dependiente,  $\Delta p_L$ ) y tres dimensiones de referencia requeridas ( $r = 3$ ), entonces según el teorema  $\pi$  son necesarios ( $5 - 3$ ) o dos términos  $\pi_i$ .

Las variables repetidas que serán usadas para formar los términos pi (paso 4) se deben elegir de la lista  $D, \rho, \mu$  y  $V$ . Recuérdese que no se recomienda usar la variable dependiente como una de las variables repetidas. Como se requieren tres dimensiones de referencia, será necesario elegir tres variables repetidas. En general, una opción es elegir como variables repetidas a las más simples desde un punto de vista dimensional. Por ejemplo, si una de las variables tiene la dimensión de una longitud, entonces hay que elegirla como una de las variables repetidas. En este ejemplo se usarán  $D, V$  y  $\rho$ . Obsérvese que éstas son dimensionalmente independientes, ya que  $D$  es una longitud,  $V$  indica tanto longitud como tiempo y fuerza, longitud y tiempo. Lo anterior significa que a partir de este conjunto no es posible formar un producto adimensional.

Ahora ya es posible formar los dos términos pi (paso 5). De ordinario, se empezaría con la variable dependiente y se combinaría con las variables repetidas para formar el primer término pi; es decir,

$$\Pi_1 = \Delta p_t D^a V^b \rho^c$$

Como esta combinación debe ser adimensional, se concluye que

$$(FL^{-3})(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0L^0T^0$$

Los exponentes,  $a, b$  y  $c$  se deben determinar de modo que el exponente obtenido para cada una de las dimensiones básicas,  $F, L$  y  $T$ , debe ser cero (de modo que la combinación resultante sea adimensional). Así, es posible escribir

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 && \text{(para } F\text{)} \\ -3a + a + b - 4c &= 0 && \text{(para } L\text{)} \\ -b + 2c &= 0 && \text{(para } T\text{)} \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones algebraicas proporciona los valores deseados para  $a, b$  y  $c$ . Se concluye que  $a = 1, b = -2, c = -1$  y, en consecuencia,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_t D}{\rho V^2}$$

Ahora se repite el proceso para las demás variables que no se repiten (paso 6). En este ejemplo sólo hay una variable adicional ( $\mu$ ), de modo que

$$\Pi_2 = \mu D^a V^b \rho^c$$

o bien,

$$(FL^{-2}T)(L)^a(LT^{-1})^b(FL^{-4}T^2)^c \doteq F^0L^0T^0$$

y, por consiguiente,

$$\begin{aligned} 1 + c &= 0 && \text{(para } F\text{)} \\ -2 + a + b - 4c &= 0 && \text{(para } L\text{)} \\ 1 - b + 2c &= 0 && \text{(para } T\text{)} \end{aligned}$$

Al resolver simultáneamente estas ecuaciones se obtiene  $a = -1, b = -1, c = -1$ , de modo que

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho}$$

Obsérvese que se termina con el número correcto de términos pi, según se determinó en el paso 3.

En este instante hay que detenerse y comprobar que los términos pi son realmente adimensionales (paso 7). Se comprobará con las dimensiones  $FLT$  y las dimensiones  $MLT$ . Así,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_t D}{\rho V^2} \doteq \frac{(FL^{-3})(L)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})^2} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(L)(LT^{-1})(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

o bien, de manera alternativa,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \frac{(ML^{-2}T^{-2})(L)}{(ML^{-3})(LT^{-1})^2} = M^0 L^0 T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{DV\rho} = \frac{(ML^{-1}T^{-1})}{(L)(LT^{-1})(ML^{-3})} = M^0 L^0 T^0$$

Por último, (paso 8), el resultado del análisis dimensional se puede expresar como

$$\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \tilde{\phi} \left( \frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

Este resultado indica que este problema se puede estudiar en función de estos dos términos  $\pi$ , en lugar de las cinco variables originales con las que se empezó. Sin embargo, el análisis dimensional *no* proporciona la forma de la función  $\tilde{\phi}$ . Ésta sólo se puede obtener a partir de un conjunto apropiado de experimentos. Si se desea, los términos  $\pi$  se pueden reordenar; es decir, se puede usar el recíproco de  $\mu/DV\rho$  y, por supuesto, cambiar el orden en que se escriben las variables. Así, por ejemplo,  $\Pi_2$  se puede expresar como

$$\Pi_2 = \frac{\rho V D}{\mu}$$

y la relación entre  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  como

$$\frac{D \Delta p_\ell}{\rho V^2} = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

Ésta es la forma previamente usada en el análisis inicial de este problema (ecuación 7.2). El producto adimensional  $\rho V D / \mu$  es bastante conocido en mecánica de fluidos; se trata del número de Reynolds. Este número se mencionó brevemente en los capítulos 1 y 6 y se analizará con mayor detalle en la sección 7.6.

En resumen, los pasos a seguir en la ejecución de un análisis dimensional usando el método de variables repetidas son los siguientes:

- Paso 1.** Enumerar todas las variables relacionadas con el problema.
- Paso 2.** Expresar cada una de las variables en términos de dimensiones básicas.
- Paso 3.** Determinar el número necesario de términos  $\pi$ .
- Paso 4.** Elegir un número de variables repetidas, donde el número requerido es igual al número de variables de referencia (usualmente el mismo que el número de dimensiones básicas).
- Paso 5.** Formar un término  $\pi$  multiplicando una de las variables no repetidas por el producto de variables repetidas, cada una elevada a un exponente que haga adimensional la combinación.
- Paso 6.** Realizar de nuevo el paso 5 para cada una de las demás variables repetidas.
- Paso 7.** Comprobar todos los términos  $\pi$  resultantes a fin de asegurarse que son adimensionales.
- Paso 8.** Expresar la forma final como una relación entre los términos  $\pi$  y pensar en su significado.

## EJEMPLO 7.1

Una delgada placa rectangular de ancho  $w$  y alto  $h$  está en posición normal a una corriente móvil de fluido. Supóngase que el arrastre,  $\mathcal{D}$ , que el fluido ejerce sobre la placa es función de  $w$  y  $h$ , de la viscosidad y densidad del fluido,  $\mu$  y  $\rho$ , respectivamente, y de la velocidad  $V$  del fluido que se aproxima a la placa. Determinar un conjunto de términos  $\pi$  apropiados para estudiar experimentalmente este problema.

### SOLUCIÓN

A partir del enunciado del problema se puede escribir

$$\mathcal{D} = f(w, h, \mu, \rho, V)$$

donde esta ecuación expresa la relación funcional general entre el arrastre y las diversas variables que lo afectan. Las dimensiones de las variables (usando el sistema  $MLT$ ) son

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\doteq MLT^{-2} \\ w &\doteq L \\ h &\doteq L \\ \mu &\doteq ML^{-1}T^{-1} \\ \rho &\doteq ML^{-3} \\ V &\doteq LT^{-1} \end{aligned}$$

Se observa que son necesarias las tres dimensiones básicas para definir las seis variables de modo que el teorema pi de Buckingham establece que se requieren tres términos pi (seis variables menos tres dimensiones de referencia,  $k - r = 6 - 3$ ).

A continuación se eligen tres variables repetidas, como  $w, V$  y  $\rho$ . Una rápida inspección de estas variables revela que son dimensionalmente independientes, ya que cada una contiene una dimensión básica no incluida en las otras. Obsérvese que sería incorrecto usar a  $w$  y  $h$  como variables repetidas, ya que tienen las mismas dimensiones.

Comenzando con la variable dependiente,  $\mathcal{D}$ , el primer término pi se puede formar al combinar  $\mathcal{D}$  con las variables repetidas de modo que

$$\Pi_1 = \mathcal{D} w^a V^b \rho^c$$

y en términos de dimensiones,

$$(MLT^{-2})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

Así, para que  $\Pi_1$  sea adimensional se concluye que

$$1 + c = 0 \quad (\text{para } M)$$

$$1 + a + b - 3c = 0 \quad (\text{para } L)$$

$$-2 - b = 0 \quad (\text{para } T)$$

y, en consecuencia,  $a = -2, b = -2$  y  $c = -1$ . Entonces, el término pi se convierte en

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{D}}{w^2 V^2 \rho}$$

A continuación se repite el procedimiento con la segunda variable no repetida,  $h$ , de modo que

$$\Pi_2 = h w^a V^b \rho^c$$

Se concluye que

$$(L)(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

y

$$c = 0 \quad (\text{para } M)$$

$$1 + a + b - 3c = 0 \quad (\text{para } L)$$

$$b = 0 \quad (\text{para } T)$$

de modo que  $a = -1, b = 0$  y  $c = 0$  y, en consecuencia,

$$\Pi_2 = \frac{h}{w}$$

La variable que no se repite restante es  $\mu$ , de modo que

$$\Pi_3 = \mu w^a V^b \rho^c$$

con

$$(ML^{-1}T^{-1})(L)^a(LT^{-1})^b(ML^{-3})^c \doteq M^0L^0T^0$$

y, por consiguiente,

$$1 + c = 0 \quad (\text{para } M)$$

$$-1 + a + b - 3c = 0 \quad (\text{para } L)$$

$$-1 - b = 0 \quad (\text{para } T)$$

La solución de estas ecuaciones es  $a = -1$ ,  $b = -1$  y  $c = -1$ , de modo que

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{wV\rho}$$

Ahora que se tienen los tres términos  $\pi$  requeridos se debe comprobar para tener la certeza de que son adimensionales. Para efectuar esta comprobación se usan  $F$ ,  $L$  y  $T$ , con lo cual también se verifica la que las dimensiones originales usadas son las apropiadas para las variables. Así,

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{D}}{w^2V^2\rho} \doteq \frac{(F)}{(L)(LT^{-1})^2(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_2 = \frac{h}{w} \doteq \frac{(L)}{(L)} \doteq F^0L^0T^0$$

$$\Pi_3 = \frac{\mu}{wV\rho} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(L)(LT^{-1})(FL^{-4}T^2)} \doteq F^0L^0T^0$$

Si no hay concordancia, es necesario volver a la lista original de variables, asegurarse de que se tienen las dimensiones correctas para cada una de las variables y luego comprobar las operaciones algebraicas efectuadas para obtener los exponentes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

Por último, los resultados del análisis dimensional se pueden expresar en la forma

$$\mathcal{D} = \tilde{\phi} \left( \frac{h}{w}, \frac{\mu}{wV\rho} \right)$$

(Respuesta)

Como en esta etapa del análisis se desconoce la naturaleza de la función  $\tilde{\phi}$ , si se desea se podría reordenar los términos  $\pi$ . Por ejemplo, el resultado final se podría expresar en la forma

$$\mathcal{D} = \phi \left( \frac{w}{h}, \frac{\rho Vw}{\mu} \right)$$

(Respuesta)

que sería más común, ya que la razón entre el ancho y la altura de la placa,  $w/h$ , se denomina *relación entre el ancho y la altura del cuadro*, y  $\rho Vw/\mu$  es el número de Reynolds. Para continuar, sería necesario realizar un conjunto de experimentos para determinar la naturaleza de la función  $\phi$ , según se analizará en la sección 7.7.

## 7.4 Algunos comentarios adicionales sobre el análisis dimensional

En la sección precedente se dio un procedimiento sistemático para realizar el análisis dimensional. Se podrían usar otros métodos, aunque se cree que el método de las variables repetidas es el más fácil para los estudiantes principiantes. En el apéndice D se describe otro procedimiento. Como se verá en la sección 7.5, los términos  $\pi$  también se pueden formar por inspección. Sin importar cuál sea el método específico que se use para efectuar el análisis dimensional, hay ciertos aspectos de esta importante herramienta ingenieril que deben parecer un tanto confusos y misteriosos para el estudiante (y algunas veces también para el investigador experimentado). En esta sección se intentará trabajar sobre algunas de las cuestiones más sutiles que, con base en la experiencia del autor, pueden ser un rompecabezas para los estudiantes.

### 7.4.1 Selección de variables

Uno de los pasos más importantes, y difíciles, al aplicar el análisis dimensional a cualquier problema dado es la selección de las variables. Como ya se observó, por conveniencia se usará el término "variable" para indicar cualquier cantidad, incluyendo constantes dimensionales y no dimensionales. No existe ningún procedimiento simple con el que las variables se puedan identificar fácilmente. En general, es necesario basarse en una buena comprensión del fenómeno que se trate y de las leyes físicas rectoras. Si se incluyen variables extrañas, entonces en la solución final aparecen demasiados términos  $\pi$  y podría ser difícil, tardado y costoso eliminar experimentalmente estos términos. Si se omiten variables importantes, entonces se obtiene un resultado incorrecto; y otra vez, averiguar esto puede ser costoso y difícil. Por consiguiente, es imperativo otorgar suficiente tiempo y atención a este primer paso en que se determinan las variables.

Casi todos los problemas de ingeniería suponen ciertas hipótesis de simplificación que afectan las variables a considerar. Por lo general se desea mantener el problema lo más simple posible, quizá aun a costa de algo de exactitud. Una meta aconsejable es obtener un equilibrio apropiado entre sencillez y exactitud. Cuán "exacta" debe ser la solución depende del objetivo del estudio; es decir, se podría tener interés sólo en tendencias generales y, en consecuencia, considerar que algunas variables tienen un efecto menor en el problema, por lo que es posible ignorarlas a fin de simplificar las cosas.

En casi todos los problemas de ingeniería (incluyendo áreas ajenas a la mecánica de fluidos), las variables pertinentes se pueden clasificar en tres grupos generales: geometría, propiedades materiales y efectos externos.

**Geometría.** Las características geométricas se pueden prescribir casi siempre por medio de una serie de longitudes y ángulos. En la mayoría de los problemas la geometría del sistema desempeña un papel importante, por lo que para describir el sistema es necesario incluir una cantidad suficiente de variables geométricas. Estas variables suelen identificarse fácilmente.

**Propiedades materiales.** Debido a que la respuesta de un sistema a efectos externos aplicados como fuerzas, presiones y cambios de temperatura depende de la naturaleza de los materiales del sistema, se deben incluir como variables las propiedades materiales que relacionan los efectos externos y las respuestas. Por ejemplo, para fluidos newtonianos, la viscosidad del fluido es la propiedad que relaciona las fuerzas aplicadas con las razones de deformación del fluido. A medida que el comportamiento del material se hace más complejo, como es el caso para los fluidos no newtonianos, la determinación de las propiedades materiales se dificulta, y resulta problemático identificar esta clase de variables.

**Efectos externos.** Esta terminología se usa para denotar cualquier variable que produzca, o tienda a producir, un cambio en el sistema. Por ejemplo, en mecánica estructural las fuerzas (concentradas o distribuidas) aplicadas a un sistema tienden a cambiar su geometría, y se deben considerar como variables pertinentes. En cuanto a mecánica de fluidos, las variables de esta clase están relacionadas con presiones, velocidades o con la fuerza de gravedad.

Las clases generales de variables mencionadas están planteadas como grandes categorías que deben ser útiles para la identificación de variables. Sin embargo, es probable que haya variables importantes que no se ubiquen fácilmente en ninguna de las categorías anteriores, por lo que cada problema se debe revisar cuidadosamente.

Como se desea que el número de variables sea mínimo, es importante que las variables sean independientes. Por ejemplo, si en un problema dado se sabe que una variable importante es el momento de inercia del área de una placa circular, como variable pertinente se puede enumerar el momento de inercia o el diámetro de la placa. Sin embargo, sería innecesario incluir tanto el momento de inercia como el diámetro de la placa, suponiendo que el diámetro entra al problema sólo a través del momento de inercia. En términos más generales, si se tiene un problema en el que las variables son

$$f(p, q, r, \dots, u, v, w, \dots) = 0 \quad (7.3)$$

y se sabe que entre algunas de las variables existe una relación adicional, por ejemplo

$$q = f(u, v, w, \dots) \quad (7.4)$$

entonces  $q$  no se requiere y se puede omitir. Recíprocamente, si se sabe que la única manera en que las variables  $u, v, w, \dots$  entran al problema es a través de la relación expresada por la ecuación 7.4, entonces las variables  $u, v, w, \dots$  se pueden sustituir por la simple variable  $q$ , reduciendo así el número de variables.

En resumen, en la selección de variables se deben considerar los siguientes puntos:

1. Definir claramente el problema ¿Cuál es la principal variable de interés (la variable dependiente)?
2. Considerar las leyes básicas que rigen el fenómeno. Inclusive puede servir una teoría elemental que describa los aspectos esenciales del sistema.
3. Comenzar el proceso de selección de variables agrupando las variables en tres grandes clases: geometría, propiedades materiales y efectos externos.
4. Considerar otras variables que pudieran no ubicarse en ninguna de las categorías mencionadas. Por ejemplo, el tiempo es una variable importante si cualquiera de las variables depende del tiempo.
5. Asegurarse de incluir todas las cantidades que entran en el problema, aun cuando algunas se puedan mantener constantes (por ejemplo, la aceleración debida a la gravedad,  $g$ ). Para un análisis dimensional lo que importa son las dimensiones de las cantidades, no sus valores específicos.
6. Asegurarse de que todas las variables son independientes. Buscar relaciones entre subconjuntos de las variables.

### 7.4.2 Determinación de las dimensiones de referencia

Para cualquier problema dado, evidentemente es deseable reducir al mínimo el número de términos  $\pi$  y, en consecuencia, se desea reducir al mínimo el número de variables; es decir, ciertamente no se quiere incluir variables extrañas. También es importante saber cuántas dimensiones de referencia son necesarias para describir las variables. Como se ha visto en los ejemplos precedentes, parece que  $F, L$  y  $T$  es un conjunto conveniente de dimensiones básicas para caracterizar cantidades en mecánica de fluidos. Sin embargo, no existe nada de "fundamental" en este conjunto y, como ya se mencionó, también serían adecuadas  $M, L$  y  $T$ . En realidad, cualquier conjunto de cantidades medibles se podría usar como dimensiones básicas, en el supuesto de que la combinación elegida se pueda usar para describir todas las cantidades secundarias. Sin embargo, el empleo de  $FLT$  o  $MLT$  como dimensiones básicas es el más sencillo, y éstas se pueden usar para describir fenómenos de mecánica de fluidos. Por supuesto, en algunos problemas sólo se requiere una o dos de esas dimensiones. Además, ocasionalmente se encuentra que el número de dimensiones de referencia necesarias para describir todas las variables es menor que el número de dimensiones básicas. Esta cuestión se ilustra en el ejemplo 7.2. En el libro de Huntley (referencia 4) y de Isaacson e Isaacson (referencia 12) se pueden consultar análisis interesantes, tanto prácticos como filosóficos, relativos al concepto de dimensiones básicas.

### EJEMPLO 7.2

Un recipiente cilíndrico abierto de diámetro  $D$  está sostenido alrededor de su circunferencia inferior y contiene un líquido de peso específico  $\gamma$  hasta una profundidad  $h$ . La desviación vertical,  $\delta$ , del centro del fondo es función de  $D, h, d, \gamma$  y  $E$ , donde  $d$  es el grosor del fondo y  $E$  es el módulo de elasticidad del material del fondo. Realizar un análisis dimensional de este problema.

### SOLUCIÓN

A partir del enunciado del problema

$$\delta = f(D, h, d, \gamma, E)$$

y las dimensiones de las variables son

$$\delta \doteq L$$

$$D \doteq L$$

$$h \doteq L$$

$$d \doteq L$$

$$\gamma \doteq FL^{-3} \doteq ML^{-2}T^{-2}$$

$$E \doteq FL^{-2} \doteq ML^{-1}T^{-2}$$

donde las dimensiones se han expresado en términos de los sistemas  $FLT$  y  $MLT$ .

A continuación se aplica el teorema pi para determinar el número requerido de términos pi. Primero, como sistema de dimensiones básicas se usarán  $F$ ,  $L$  y  $T$ . Existen seis variables y dos dimensiones de referencia ( $F$  y  $L$ ) necesarias, de modo que se requieren cuatro términos pi. Como variables repetidas se puede elegir  $D$  y  $\gamma$  de modo que

$$\Pi_1 = \delta D^a \gamma^b$$

$$(L)(L^a)(FL^{-3})^b \doteq F^0 L^0$$

$$1 + a - 3b = 0 \quad (\text{para } L)$$

$$b = 0 \quad (\text{para } F)$$

Por consiguiente,  $a = -1$ ,  $b = 0$  y

$$\Pi_1 = \frac{\delta}{D}$$

De manera semejante,

$$\Pi_2 = h D^a \gamma^b$$

y siguiendo el mismo procedimiento que antes,  $a = -1$ ,  $b = 0$  de modo que

$$\Pi_2 = \frac{h}{D}$$

Los dos términos pi restantes se pueden encontrar aplicando el mismo procedimiento, con lo que se obtiene

$$\Pi_3 = \frac{d}{D} \quad \Pi_4 = \frac{E}{D\gamma}$$

Así, este problema se puede estudiar usando la relación

$$\left(\frac{\delta}{D}\right) \left(\frac{h}{D}\right) \left(\frac{d}{D}\right) \left(\frac{E}{D\gamma}\right) = \phi$$

(Respuesta)

A continuación se resolverá el mismo problema usando el sistema  $MLT$ . Aunque el número de variables es claramente el mismo, parece que se requieren tres dimensiones de referencia, en vez de dos. Si, en efecto, esto fuese cierto, sería totalmente fortuito, ya que el número de términos pi requeridos se reduciría de cuatro a tres. ¿Parece correcto? ¿Cómo es posible reducir el número de términos pi requeridos usando simplemente el sistema  $MLT$  de dimensiones básicas? La respuesta es que no es posible, y un análisis más detallado de las dimensiones de las variables enumeradas antes revela que en realidad sólo se requieren dos dimensiones de referencia,  $MT^{-2}$  y  $L$ .

Éste es un ejemplo de situación en que el número de dimensiones de referencia difiere del número de dimensiones básicas. Este hecho no es muy frecuente y se puede detectar analizando las dimensiones de las variables (sin importar cuál sistema se use) y asegurándose de cuántas dimensiones de referencia se requieren realmente para describir las variables. Una vez que se ha determinado el número de dimensiones de referencia se puede proceder como antes. Ya que el número de variables repetidas debe ser igual al número de dimensiones de referencia, se concluye que aún son necesarias dos dimensiones de referencia, por lo que es posible usar nuevamente  $D$  y  $\gamma$  como variables repetidas. Los términos pi se pueden determinar de la misma manera. Por ejemplo, el término pi que contiene a  $E$  se obtendría como

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= ED^a \gamma^b \\ (ML^{-1}T^{-2})(L)^a (ML^{-2}T^{-2})^b &\doteq (MT^{-2})^0 L^0 \\ 1 + b &= 0 \quad (\text{para } MT^{-2}) \\ -1 + a - 2b &= 0 \quad (\text{para } L) \end{aligned}$$

y, en consecuencia,  $a = -1, b = -1$ , de modo que

$$\Pi_4 = \frac{E}{D\gamma}$$

que es igual al  $\Pi_4$  que se obtuvo usando el sistema FLT. Los otros términos pi deben ser los mismos y el resultado final es igual; es decir,

$$\frac{\delta}{D} = \phi \left( \frac{h}{D}, \frac{d}{D}, \frac{E}{D\gamma} \right)$$

(Respuesta)

Lo anterior siempre es cierto; no es posible afectar el número necesario de términos pi usando  $M, L$  y  $T$  en vez de  $F, L$  y  $T$  o viceversa.

### 7.4.3 Unicidad de los términos pi

Al reflexionar un poco sobre el proceso usado para determinar los términos pi con el método de variables repetidas revela que los términos pi específicos obtenidos dependen de la selección algo arbitraria de variables repetidas. Por ejemplo, en el problema de estudiar la caída de presión en una tubería, como variables repetidas se eligieron  $D, V$  y  $\rho$ . Lo anterior condujo al planteamiento del problema en función de los términos pi como

$$\frac{\Delta p_\ell D}{\rho V^2} = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right) \tag{7.5}$$

¿Qué hubiera sucedido si como variables repetidas se hubiera elegido  $D, V$  y  $\mu$ ? Una rápida comprobación revela que el término pi que incluye a  $\Delta p_\ell$  se convierte en

$$\frac{\Delta p_\ell D^2}{V\mu}$$

y el segundo término pi permanece igual. Así, el resultado final se puede expresar como

$$\frac{\Delta p_\ell D^2}{V\mu} = \phi_1 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right) \tag{7.6}$$

Ambos resultados son correctos, y con ambos se llegaría a la misma ecuación final para  $\Delta p_\ell$ . Sin embargo, obsérvese que las funciones  $\phi$  y  $\phi_1$  en las ecuaciones 7.5 y 7.6 son diferentes porque los términos pi dependientes son diferentes en las dos relaciones.

A partir de esta ilustración se puede concluir que al efectuar un análisis dimensional *no* se obtiene un conjunto único de términos pi. Sin embargo, el número requerido de términos pi es fijo y una vez que se ha determinado un conjunto correcto, a partir de este conjunto es posible obtener los demás conjuntos posibles mediante la combinación de productos de potencias del conjunto original. Entonces, si se tiene un problema que con, por ejemplo, tres términos pi,

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

a partir de este conjunto siempre es posible formar un nuevo conjunto combinando los términos pi. Por ejemplo, se podría formar un nuevo término pi,  $\Pi'_2$ , haciendo

$$\Pi'_2 = \Pi_2^a \Pi_3^b$$

donde  $a$  y  $b$  son exponentes arbitrarios. Entonces, la relación se podría expresar como

$$\Pi_1 = \phi_1(\Pi'_2, \Pi_3)$$

o bien, como

$$\Pi_1 = \phi_2(\Pi_2, \Pi'_2)$$

Expresiones que serían, todas, correctas. Sin embargo, se debe recalcar que el número requerido de términos pi no se puede reducir con este método; sólo se modifica la forma de los términos pi. Mediante la aplicación de esta técnica se observa que los términos pi en la ecuación 7.6 se pueden obtener a partir de los términos pi de la ecuación 7.5; es decir, en la ecuación 7.5  $\Pi_1$  se multiplica por  $\Pi_2$ , de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2}\right) \left(\frac{\rho V D}{\mu}\right) = \frac{\Delta p_l D^2}{V \mu}$$

que es el  $\Pi_1$  de la ecuación 7.6.

No existe una respuesta simple para contestar la pregunta ¿cuál forma de los términos pi es la mejor? Casi siempre la única orientación es mantener los términos pi lo más simple posible. También, puede ser que en la ejecución real de los experimentos sea más fácil trabajar con ciertos términos pi. La elección final todavía es arbitraria y generalmente depende del contexto y de la experiencia del investigador. Sin embargo, nuevamente se debe recalcar que a pesar de que para un problema dado no existe un conjunto único de términos pi, el número necesario de éstos es fijo en concordancia con el teorema pi. En el apéndice D se da una explicación algo más rigurosa de la no unicidad de los términos pi.

## 7.5 Determinación por inspección de los términos pi

En la sección 7.3 se presentó un método para formar términos pi, y en el apéndice D se presentará otro método. Estos métodos proporcionan un procedimiento paso a paso con el que, si se ejecuta correctamente, se obtiene un conjunto completo y correcto de términos pi. Aunque estos métodos son simples y directos, son más bien tediosos, especialmente para problemas con un gran número de variables. Como las únicas restricciones impuestas a los términos pi son que deben ser (1) correctos en número, (2) adimensionales y (3) independientes, los términos pi se pueden formar simplemente por inspección, sin aplicar ninguno de los procedimientos formales.

Para ilustrar este método, nuevamente se considerará la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de una tubería lisa. Sin importar la técnica que se aplique, el punto de partida es el mismo: determinar las variables, que en este caso son

$$\Delta p_l = f(D, \rho, \mu, V)$$

A continuación se enumeran las dimensiones de las variables:

$$\Delta p_l \doteq FL^{-3}$$

$$D \doteq L$$

$$\rho \doteq FL^{-4}T^2$$

$$\mu \doteq FL^{-2}T$$

$$V \doteq LT^{-1}$$

y luego se determina el número de dimensiones de referencia. Después, la aplicación del teorema pi establece cuántos términos pi se requieren. En este problema, como hay cinco variables y tres dimensiones de referencia, se necesitan dos términos pi. Así, el número requerido de términos pi se puede determinar fácilmente, y la determinación de este número siempre se debe efectuar al inicio del análisis.

Una vez que se conoce el número de términos pi, cada término pi se puede formar por inspección usando simplemente el hecho de que cada término pi debe ser adimensional. Siempre se dejará que  $\Pi_1$  contenga la variable dependiente, que en este ejemplo es  $\Delta p_l$ . Como las dimensiones de esta variable son  $FL^{-3}$ , es necesario combinarla con otras variables para obtener un producto adimensional. Una posibilidad es primero dividir  $\Delta p_l$  entre  $\rho$  de modo que

$$\frac{\Delta p_l}{\rho} \doteq \frac{(FL^{-3})}{(FL^{-4}T^2)} \doteq \frac{L}{T^2}$$

Se ha eliminado la dependencia con respecto a  $F$ , pero resulta evidente que  $\Delta p_l / \rho$  no es adimensional. Para eliminar la dependencia con respecto a  $T$  se puede dividir entre  $V^2$ , de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_l}{\rho}\right) \frac{1}{V^2} \doteq \left(\frac{L}{T^2}\right) \frac{1}{(LT^{-1})^2} \doteq \frac{1}{L}$$

Finalmente, para hacer que la combinación sea adimensional se multiplica por  $D$ , de modo que

$$\left(\frac{\Delta p_l}{\rho V^2}\right) D \doteq \left(\frac{1}{L}\right) (L) \doteq L^0$$

Así,

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho V^2}$$

Luego, el segundo término  $\pi_2$  se forma eligiendo la variable que no se usó en  $\Pi_1$ , que en este caso es  $\mu$ . Simplemente se combina  $\mu$  con las demás variables para hacer adimensional la combinación (pero en  $\Pi_2$  no se usa  $\Delta p_l$ , ya que se desea que la variable dependiente sólo aparezca en  $\Pi_1$ ). Por ejemplo, dividir  $\mu$  entre  $\rho$  (para eliminar a  $F$ ), luego entre  $V$  (para eliminar a  $T$ ) y finalmente entre  $D$  (para eliminar a  $L$ ). Así,

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} \doteq \frac{(FL^{-2}T)}{(FL^{-4}T^2)(LT^{-1})(L)} \doteq F^0 L^0 T^0$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho V^2} \equiv \phi \left( \frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

que es, por supuesto, el mismo resultado que se obtuvo aplicando el método de las variables repetidas.

Cuando los términos  $\pi_i$  se forman por inspección, una cuestión adicional es asegurarse de que todos sean independientes. En el ejemplo del flujo en una tubería,  $\Pi_2$  contiene a  $\mu$ , que no aparece en  $\Pi_1$ , y, en consecuencia, estos dos términos  $\pi_i$  son claramente independientes. En un caso más general, un término  $\pi_i$  no sería independiente de los demás en un problema dado si se puede formar por medio de alguna combinación de los demás. Por ejemplo, si  $\Pi_2$  se puede formar mediante una combinación de  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  y  $\Pi_5$  tal que

$$\Pi_2 = \frac{\Pi_3^2 \Pi_4}{\Pi_5}$$

entonces  $\Pi_2$  no es un término  $\pi_i$  independiente. Se puede asegurar que cada término  $\pi_i$  es independiente de los precedentes incorporando una nueva variable en cada término  $\pi_i$ .

Aunque la formación de términos  $\pi_i$  por inspección es esencialmente equivalente al método de las variables repetidas, es menos estructurada. Con un poco de práctica los términos  $\pi_i$  se pueden formar fácilmente por inspección, y este método ofrece una opción a los procedimientos más formales.

## 7.6 Grupos dimensionales comunes en mecánica de fluidos

En la parte superior de la tabla 7.1 se muestra una lista de variables que se presentan en problemas de mecánica de fluidos. Es claro que la lista no es exhaustiva, pero indica una diversidad de variables que es probable encontrar en un problema representativo. Afortunadamente, no todas estas variables se encuentran en todos los problemas. Sin embargo, cuando se tienen combinaciones de estas variables, se acostumbra combinarlas en alguno de los grupos dimensionales comunes (términos  $\pi_i$ ) proporciona-

dos en la tabla 7.1. Estas combinaciones aparecen con tanta frecuencia que se les han asignado denominaciones especiales, como se indica en la tabla.

Asimismo, a menudo es posible dar una interpretación física a los grupos adimensionales, lo cual puede ser útil para evaluar su influencia en una aplicación particular. Por ejemplo, el número de Froude es un índice de la razón de la fuerza debida a la aceleración de una partícula de fluido a la fuerza debida a la gravitación (peso). Este hecho se puede demostrar considerando una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente (figura 7.3). La magnitud de la componente de la fuerza de inercia  $F_I$  a lo largo de la línea de corriente se puede expresar como  $F_I = a_s m$ , donde  $a_s$  es la magnitud de la aceleración a lo largo de la línea de corriente para una partícula de masa  $m$ . Con base en el estudio del movimiento de una partícula a lo largo de una trayectoria curva (ver la sección 3.1) se sabe que

$$a_s = \frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{dV_s}{ds}$$

donde  $s$  se mide a lo largo de la línea de corriente. Si la velocidad  $V_s$  y la longitud  $s$  se escriben en forma adimensional, es decir,

$$V_s^* = \frac{V_s}{V} \quad s^* = \frac{s}{\ell}$$

donde  $V$  y  $\ell$  representan alguna velocidad y longitud características, respectivamente, entonces

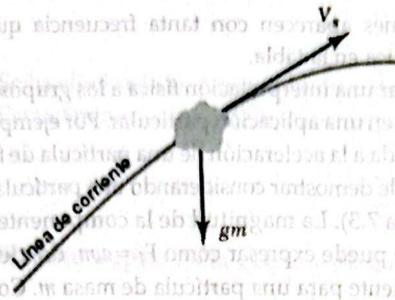
$$a_s^* = \frac{V^2}{\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*}$$

**TABLA 7.1** Algunas variables y grupos adimensionales comunes en mecánica de fluidos

**Variables:** Aceleración de la gravitación,  $g$ ; Módulo volumétrico,  $E_v$ ; Longitud característica,  $\ell$ ; Densidad,  $\rho$ ; Frecuencia del flujo oscilatorio,  $\omega$ ; Presión,  $p$  (o  $\Delta p$ ) Velocidad del sonido,  $c$ ; Tensión superficial,  $\sigma$ ; Velocidad,  $V$ ; Viscosidad,  $\mu$

| Grupos adimensionales          | Denominación           | Interpretación (índice de la razón de fuerzas indicada)     | Tipos de aplicaciones   |
|--------------------------------|------------------------|---|---|
| $\frac{\rho V \ell}{\mu}$      | Número de Reynolds, Re | fuerza de inercia<br>fuerza viscosa                         | Generalmente de importancia en todos los tipos de problemas de dinámica de fluidos. |
| $\frac{V}{\sqrt{g \ell}}$      | Número de Froude, Fr   | fuerza de inercia<br>fuerza de gravitación                  | Flujo con una superficie libre  |
| $\frac{p}{\rho V^2}$           | Número de Euler, Eu    | fuerza de presión<br>fuerza de inercia                      | Problemas en que la presión, o las diferencias de presión, son de interés           |
| $\frac{\rho V^2}{E_v}$         | Número de Cauchy,* Ca  | fuerza de inercia<br>fuerza de compresibilidad              | Flujos en que la compresibilidad del fluido es importante                           |
| $\frac{V}{c}$                  | Número de Mach,* Ma    | fuerza de inercia<br>fuerza de compresibilidad              | Flujos en que la compresibilidad del fluido es importante                           |
| $\frac{\omega \ell}{V}$        | Número de Strouhal, St | fuerza de inercia (local)<br>fuerza de inercia (convectiva) | Flujo inestable con una frecuencia de oscilación característica                     |
| $\frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$ | Número de Weber, We    | fuerza de inercia<br>fuerza de tensión superficial          | Problemas en que la tensión superficial es importante                               |

\*El número de Cauchy y el número de Mach están relacionados y se puede usar cualquiera como índice de los efectos relativos de la inercia y la compresibilidad. Ver el análisis adjunto.



**FIGURA 7.3** La fuerza de la gravitación que actúa sobre una partícula de fluido que se mueve a lo largo de una línea de corriente.

$$y = \frac{Vb}{ab} \quad y = \frac{Vb}{ab} = \dots$$

$$F_I = \frac{V^2}{\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*} m$$

La magnitud del peso del partícula,  $F_G$ , es  $F_G = gm$ , de modo que la razón de la inercia a la fuerza gravitacional es

$$\frac{F_I}{F_G} = \frac{V^2}{g\ell} V_s^* \frac{dV_s^*}{ds^*}$$

Así, la razón de fuerzas  $F_I/F_G$  es proporcional a  $V^2/g\ell$  y la raíz cuadrada de esta razón,  $V/\sqrt{g\ell}$  se denomina número de Froude. Se observa que la interpretación física del número de Froude es la de una medida, o un índice, de la importancia relativa de las fuerzas inerciales que actúan sobre partículas de fluido al peso de la partícula. Obsérvese que el número de Froude no es realmente igual a esta razón de fuerzas, sino simplemente un tipo de medida media de la influencia de estas dos fuerzas. En un problema en que la gravedad (o el peso) no es importante, el número de Froude no aparece como un término pi importante. Como se ilustra en la tabla 7.1, otros grupos adimensionales se pueden interpretar de manera semejante en términos de índices de razones de fuerza, y en la última sección de este capítulo se da un análisis más detallado de la base para este tipo de interpretación. A continuación se dan algunos detalles más sobre estos importantes grupos adimensionales, y en la última columna de la tabla 7.1 se anotaron brevemente los tipos de aplicación o problema en que se presentan esos grupos.

**Número de Reynolds.** El número de Reynolds es sin duda el parámetro adimensional más conocido en mecánica de fluidos. Su nombre es en honor a Osborne Reynolds (1842–1912), ingeniero británico quien fue el primero en demostrar que esta combinación de variables se podía usar como criterio para distinguir entre flujo laminar y flujo turbulento. En casi todos los problemas de flujo de fluidos hay una longitud,  $\ell$ , y una velocidad,  $V$ , características, así como las propiedades de densidad,  $\rho$ , y viscosidad,  $\mu$ , del fluido, que son variables relevantes en el problema. Así, con estas variables el número de Reynolds

$$Re = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

surge de manera natural a partir del análisis dimensional. El número de Reynolds es una medida de la razón de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido a la fuerza viscosa sobre un elemento. Cuando estos dos tipos de fuerzas son importantes en un problema dado, el número de Reynolds desempeña un papel importante. Sin embargo, si el número de Reynolds es muy pequeño ( $Re \ll 1$ ), esto indica que las fuerzas viscosas son dominantes en el problema, por lo que es posible ignorar los efectos inerciales; es decir, la densidad del fluido no es una variable importante. Los flujos con números de Reynolds muy pequeños suelen denominarse "flujos reptantes", como se analizó en la sección 6.10. Recíprocamente, para flujos con grandes números de Reynolds los efectos viscosos son pequeños con respecto a los efectos inerciales y en estos casos puede ser posible ignorar el efecto de la viscosidad y considerar el problema como uno que implica un fluido "no viscoso". Este tipo de problema se consideró en detalle en las secciones 6.4 a 6.7.

**Número de Froude.** El número de Froude

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{g\ell}}$$

se distingue de los demás grupos adimensionales de la tabla 7.1 en que contiene la aceleración debida a la gravedad,  $g$ . La aceleración de la gravitación se vuelve una variable importante en un problema de dinámica de fluidos en que el peso específico del fluido es una fuerza importante. Como se analiza, el número de Froude es una medida de la razón de la fuerza de inercia sobre un elemento de fluido al peso del elemento. En general, es importante en problemas de flujos con superficies libres, ya que la gravedad afecta principalmente a este tipo de flujo. Problemas típicos incluyen el estudio del flujo de agua en torno a barcos (con la acción de oleaje resultante), o el flujo a través de ríos o conductos abiertos. El número de Froude se denomina así en honor de William Froude (1810–1879), ingeniero civil, matemático y arquitecto naval inglés que fue el pionero en el empleo de depósitos de remolque para el estudio del diseño de barcos. Debe observarse que el número de Froude también suele definirse como el cuadrado del número de Froude presentado en la tabla 7.1.

**Número de Euler.** El número de Euler

$$Eu = \frac{p}{\rho V^2}$$

se puede interpretar como una medida de la razón de las fuerzas de presión a las fuerzas inerciales, donde  $p$  es alguna presión característica en el campo de flujo. Muy a menudo el número de Euler se describe en términos de una diferencia de presión,  $\Delta p$ , de modo que  $Eu = \Delta p / \rho V^2$ . También, esta combinación expresada como  $\Delta p / 1/2\rho V^2$  se denomina *coeficiente de presión*. Normalmente, en problemas en que la presión o la diferencia de presión entre dos puntos es una variable importante se usa alguna forma del número de Euler. El número de Euler se denomina así en honor de Leonhard Euler (1707–1783), famoso matemático suizo que fue el pionero del trabajo sobre la relación entre presión y flujo. Para problemas en que la cavitación es importante, se usa el grupo adimensional  $(p_r - p_v) / 1/2\rho V^2$ , donde  $p_v$  es la presión de vapor y  $p_r$  es alguna presión de referencia. Aunque este grupo adimensional es de la misma forma que el número de Euler, en general se denomina *número de cavitación*.

**Número de Cauchy y número de Mach.** El número de Cauchy

$$Ca = \frac{\rho V^2}{E_v}$$

y el número de Mach

$$Ma = \frac{V}{c}$$

son grupos adimensionales importantes en problemas en que la compresibilidad del fluido es un factor importante. Como la velocidad del sonido,  $c$ , en un fluido es igual a  $c = \sqrt{E_v / \rho}$  (ver la sección 1.7.3), se concluye que

$$Ma = V \sqrt{\frac{\rho}{E_v}}$$

y el cuadrado del número de Mach

$$Ma^2 = \frac{\rho V^2}{E_v} = Ca$$

es igual al número de Cauchy. Así, en problemas en que la compresibilidad del fluido es un factor importante se puede usar cualquier número (pero no ambos). Ambos números se pueden interpretar como si representaran un índice de la razón de las fuerzas inerciales a las fuerzas de compresibilidad. Cuando el número de Mach es relativamente pequeño (por ejemplo, menor que 0.3), las fuerzas inerciales inducidas por el movimiento del fluido no son suficientemente grandes para producir un cambio importante en la densidad del fluido, y en este caso es posible ignorar la compresibilidad del fluido. El número de Mach es el parámetro de uso más común en problemas de flujo compresible,

especialmente en los campos de dinámica de gases y aerodinámica. El número de Cauchy se denomina así en honor de Augustin Louis de Cauchy (1789–1857), ingeniero, matemático y experto en hidrodinámica francés. El número de Mach se denomina así en honor de Ernst Mach (1838–1916), físico y filósofo austriaco.

**Número de Strouhal.** El número de Strouhal

$$St = \frac{\omega \ell}{V}$$

es un parámetro adimensional que probablemente puede ser importante en problemas de flujo oscilatorio inestable donde la frecuencia de oscilación es  $\omega$ . Representa una medida de la razón de las fuerzas inerciales debidas a la inestabilidad del flujo (aceleración local) a las fuerzas inerciales debidas a cambios de velocidad de un punto a otro en el campo de flujo (aceleración convectiva). Este tipo de flujo inestable se puede crear cuando un fluido circula por un cuerpo sólido (como un alambre o un cable) colocado en la corriente móvil. Por ejemplo, en cierto intervalo del número de Reynolds, un flujo periódico se crea corriente abajo de un cilindro colocado en un fluido móvil debido a un patrón regular de vórtices emitidos por el cuerpo. (Ver la fotografía al inicio de este capítulo y la figura 9.23). Este sistema de vórtices, denominado *huella del vórtice de Kármán* en honor de Theodor von Kármán (1881–1963), famoso experto en mecánica de fluidos crea un flujo oscilatorio a una frecuencia discreta,  $\omega$ , tal que el número de Strouhal se puede correlacionar positivamente con el número de Reynolds. Cuando la frecuencia está en el intervalo audible, es posible escuchar un sonido y parece que los cuerpos “cantan”. De hecho, el número de Strouhal se denomina así en honor de Vincenz Strouhal (1850–1922), quien usó este parámetro en su estudio de “alambres que cantan”. La evidencia más dramática de este fenómeno ocurrió en 1940 cuando se derrumbó el puente Tacoma Narrows. La frecuencia de emisión de los vórtices coincidió con la frecuencia natural del puente, estableciendo una condición de resonancia que terminó por producir la caída del puente.

Por supuesto, hay otros tipos de flujos oscilatorios. Por ejemplo, el torrente sanguíneo en las arterias es periódico y se puede analizar descomponiendo el movimiento periódico en una serie de componentes armónicos (análisis por medio de series de Fourier), donde cada componente posee una frecuencia que es un múltiplo de la frecuencia fundamental,  $\omega$  (la razón de pulsación). En vez de usar el número de Strouhal en este tipo de problema, se usa un grupo adimensional formado por el producto de  $St$  y  $Re$ ; es decir,

$$St \times Re = \frac{\rho \omega \ell^2}{\mu}$$

La raíz cuadrada de este grupo adimensional a menudo se denomina *parámetro de frecuencia*.

**Número de Weber.** El número de Weber

$$We = \frac{\rho V^2 \ell}{\sigma}$$

puede ser importante en problemas en que hay una interfase entre dos fluidos. En esta situación la tensión superficial puede desempeñar un papel importante en el fenómeno de interés. El número de Weber se puede entender como un índice de la fuerza inercial a la fuerza de tensión superficial que actúan sobre un elemento de fluido. Ejemplos comunes de problemas en los que este parámetro puede ser importante abarcan el flujo de películas delgadas de líquido, o en la formación de gotas o burbujas. Resulta evidente que no todos los problemas de flujos con una interfase requieren la inclusión de la tensión superficial. El flujo de agua en un río no es afectado de manera importante por la tensión superficial, ya que los efectos inerciales y gravitacionales son dominantes ( $We \gg 1$ ). Sin embargo, como se analizará en una sección ulterior, para modelos de ríos (que pueden ser poco profundos) se requiere cuidado de modo que la tensión superficial no se vuelva importante en el modelo, en tanto no sea importante en el río real. El número de Weber se denomina así en honor de Moritz Weber (1871–1951), profesor alemán de mecánica naval quien contribuyó a la formalización del empleo general de grupos adimensionales como base para estudios de similitud.

## 7.7 Correlación de datos experimentales

Uno de los usos más importantes del análisis dimensional es como auxilio en el eficaz manejo, interpretación y correlación de datos empíricos. Debido a que el campo de la mecánica de fluidos depende bastante de datos empíricos, no es sorprendente que el análisis dimensional sea una herramienta tan importante en este campo. Como ya se observó, el análisis dimensional no puede dar una respuesta completa a un problema dado, ya que el análisis sólo proporciona los grupos adimensionales que describen el fenómeno y no la relación específica que hay entre los grupos. Para determinar esta relación es necesario obtener datos experimentales apropiados. El grado de dificultad asociado a este proceso depende del número de términos  $\pi_i$  y de la naturaleza de los experimentos (¿cuán difícil es obtener las mediciones?). Es evidente que los problemas más simples son aquéllos con la menor cantidad de términos  $\pi_i$ , y en las siguientes secciones se indicará cómo al aumentar el número de términos  $\pi_i$  crece la complejidad del análisis.

### 7.7.1 Problemas con un término $\pi$

La aplicación de teorema  $\pi$  indica que si el número de variables menos el número de dimensiones de referencia es igual a la unidad, entonces para describir el fenómeno sólo se requiere un término  $\pi$ . La relación funcional que debe existir para un término  $\pi$  es

$$\Pi_1 = C(\text{términos})$$

donde  $C$  es una constante. Ésta es una situación en que el análisis dimensional revela la forma específica de la relación y, como se ilustra en el siguiente ejemplo, muestra cómo están relacionadas las variables individuales. Sin embargo, el valor de la constante aún se debe determinar experimentalmente.

## EJEMPLO 7.3

Supóngase que el arrastre,  $\mathcal{D}$ , que actúa sobre una partícula esférica que cae muy lentamente a través de un fluido viscoso es función del diámetro de la partícula,  $d$ , de la velocidad de la partícula,  $V$ , y de la viscosidad del fluido,  $\mu$ . Determinar, mediante análisis dimensional, cómo el arrastre depende de la velocidad de la partícula.

### SOLUCIÓN

A partir de la información, se concluye que

$$\mathcal{D} = f(d, V, \mu)$$

y las dimensiones de las variables son

$$\mathcal{D} \doteq F$$

$$d \doteq L$$

$$V \doteq LT^{-1}$$

$$\mu \doteq FL^{-2}T$$

Se observa que hay cuatro variables y tres dimensiones de referencia ( $F$ ,  $L$  y  $T$ ) necesarias para describir las variables. Así, según el teorema  $\pi$ , se requiere un término  $\pi$ . Este término  $\pi$  se puede formar fácilmente por inspección y se puede expresar como

$$\Pi_1 = \frac{\mathcal{D}}{\mu V d}$$

Ya que sólo hay un término  $\pi$ , se concluye que

$$\frac{\mathcal{D}}{\mu V d} = C$$

o bien,

$$\mathcal{D} = C\mu Vd$$

Así, para una partícula y un fluido dados, el arrastre varía directamente con la velocidad de modo que

$$\mathcal{D} \propto V \quad \text{(Respuesta)}$$

En realidad, el análisis dimensional revela que el arrastre no sólo varía directamente con la velocidad, sino que también varía directamente con el diámetro de la partícula y la viscosidad del fluido. Sin embargo, no es posible predecir el valor del arrastre, ya que se desconoce la constante  $C$ . Es necesario realizar un experimento en que se midan el arrastre y la velocidad correspondiente para una partícula y un fluido dados. Aunque en principio bastaría ejecutar una sola prueba, ciertamente es aconsejable repetirla varias veces a fin de obtener un valor confiable para  $C$ . Se debe recalcar que una vez que se ha determinado el valor de  $C$  no es necesario ejecutar pruebas semejantes usando partículas esféricas y fluidos diferentes; es decir,  $C$  es una constante universal en tanto que el arrastre es sólo función del diámetro y la velocidad de la partícula, así como de la viscosidad del fluido.

Una solución aproximada de este problema también se puede obtener teóricamente, a partir de lo cual se encuentra que  $C = 3\pi$ , de modo que

$$\mathcal{D} = 3\pi\mu Vd$$

Esta ecuación se denomina *ley de Stokes* y se usa en el estudio del asentamiento de partículas. Los experimentos revelan que este resultado sólo es válido para números de Reynolds pequeños ( $\rho Vd/\mu \ll 1$ ). Este hecho se concluye porque en la lista original de variables se ignoraron los efectos inerciales (la densidad del fluido no se incluyó como variable). La inclusión de una variable adicional conduciría a otro término  $\pi$ , de modo que habría dos términos  $\pi$  en vez de uno.

### 7.7.2 Problemas con dos o más términos $\pi$

Si un fenómeno dado se puede describir con dos términos  $\pi$  de modo que

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2)$$

entonces la relación funcional entre las variables se puede determinar haciendo variar a  $\Pi_2$  y midiendo los valores correspondientes de  $\Pi_1$ . Para este caso, los resultados se pueden presentar de manera conveniente graficando  $\Pi_1$  contra  $\Pi_2$  como se ilustra en la figura 7.4. Se debe recalcar que la curva mostrada en la figura 7.4 debe ser "universal" para el fenómeno particular estudiado. Lo anterior significa que si las variables y el análisis dimensional resultante son correctos, entonces entre  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  existe sólo una relación, como se ilustra en la figura 7.4. Sin embargo, como se trata de una relación empírica, sólo se puede afirmar que es válida sobre el intervalo de  $\Pi_2$  cubierto por los experimentos. Sería poco prudente extrapolar más allá de este intervalo, ya que como se indica con las líneas discontinuas de la figura, la naturaleza del fenómeno puede cambiar drásticamente a medida que se extiende el intervalo de  $\Pi_2$ . Además de presentar gráficamente los datos, es posible (y aconsejable) obtener una ecuación empírica que relacione  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  usando una técnica estándar de ajuste de curvas.

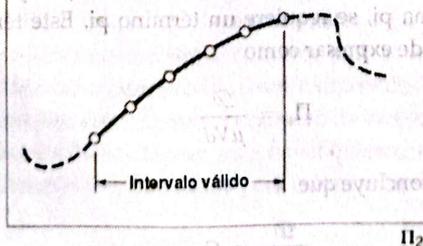


FIGURA 7.4 Representación gráfica de los datos para problemas con dos términos  $\pi$ , con una ilustración del peligro potencial de extrapolar los datos.

# EJEMPLO 7.4

Experimentalmente se determinará la relación entre la caída de presión por unidad de longitud a lo largo de una tubería horizontal de pared lisa y las variables que afectan la caída de presión. En el laboratorio se midió la caída de presión sobre una longitud de 5 pies de tubería de pared lisa de diámetro interior igual a 0.496 pulg. El fluido usado fue agua a 60 °F ( $\mu = 2.34 \times 10^{-5}$  lb·s/ pie<sup>2</sup>,  $\rho = 1.94$  slugs/ pie<sup>3</sup>). Se efectuaron pruebas en que se hizo variar la velocidad y se midió la caída de presión correspondiente. A continuación se muestran los resultados de estas pruebas:

|   |      |      |      |      |       |       |       |       |
|---|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| Velocidad (pies/ s)   | 1.17 | 1.95 | 2.91 | 5.84 | 11.13 | 16.92 | 23.34 | 28.73 |
| Caída de presión (lb/ pie <sup>2</sup> )<br>(para una longitud de 5 pies) | 6.26 | 15.6 | 30.9 | 106  | 329   | 681   | 1200  | 1730  |

Con estos datos, obtener una relación general entre la caída de presión por unidad de longitud y las demás variables.

## SOLUCIÓN

El primer paso es efectuar un análisis dimensional durante la etapa de planificación *antes* de ejecutar realmente los experimentos. Como se analizó en la sección 7.3, se supondrá que la caída de presión por unidad de longitud,  $\Delta p_L$ , es función del diámetro de la tubería,  $D$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , la viscosidad del fluido,  $\mu$ , y la velocidad,  $V$ . Así,

$$\Delta p_L = f(D, \rho, \mu, V)$$

y al aplicar el teorema pi se obtiene

$$\frac{D \Delta p_L}{\rho V^2} = \phi \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

Para determinar la forma de la relación es necesario hacer variar el número de Reynolds,  $\rho V D / \mu$ , y medir los valores correspondientes de  $D \Delta p_L / \rho V^2$ . El número de Reynolds varía al cambiar cualquiera de las variables  $\rho$ ,  $V$ ,  $D$  o  $\mu$ , o cualquier combinación de ellas. Sin embargo, la forma más sencilla de lograr lo anterior es variando la velocidad, ya que así es posible usar el mismo fluido y la misma tubería. Con base en los datos es posible calcular valores para los dos términos pi, obteniéndose

|                                 |                    |                    |                    |                    |
|---------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{D \Delta p_L}{\rho V^2}$ | 0.0195             | 0.0175             | 0.0155             | 0.0132             |
| $\frac{\rho V D}{\mu}$          | $4.01 \times 10^3$ | $6.68 \times 10^3$ | $9.97 \times 10^3$ | $2.00 \times 10^4$ |
|                                 | 0.0113             | 0.0101             | 0.00939            | 0.00893            |
|                                 | $3.81 \times 10^4$ | $5.80 \times 10^4$ | $8.00 \times 10^4$ | $9.85 \times 10^4$ |

Estos grupos son adimensionales, de modo que sus valores son independientes del sistema de unidades usado en tanto sea un sistema consistente. Por ejemplo, si la velocidad está en pies/ s, entonces el diámetro debe estar en pies, no en pulgadas o en metros. Obsérvese que como todos los números de Reynolds son mayores que 2 100, el flujo en la tubería es turbulento.

Ahora ya es posible hacer una gráfica de estos dos términos pi, con los resultados que se muestran en la figura E7.4a. Parece que la correlación es bastante aceptable, pero si no lo fuese, indicaría que se cometieron grandes errores experimentales de medición o que quizá se omitió una variable importante. La curva que se muestra en la figura E7.4a representa la relación general entre la caída de presión y los demás factores en el intervalo de los números de Reynolds entre  $4.01 \times 10^3$  y  $9.85 \times 10^4$ . Así, para este intervalo de números de Reynolds *no* es necesario repetir las pruebas para otros tamaños de tubería u otros fluidos, en el supuesto de que las variables independientes asumidas ( $D, \rho, \mu, V$ ) son las únicas importantes.

En virtud de que la relación entre  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  no es lineal, no es inmediatamente obvio qué forma de la ecuación empírica se puede usar para describir la relación. Sin embargo, si los mismos datos se grafican en papel logarítmico, como se muestra en la figura E7.4b, los datos forman una recta, sugiriendo que una ecuación apropiada es de la forma  $\Pi_1 = A \Pi_2^n$ , donde  $A$  y  $n$  son constantes empíricas que se determinarán con base en los datos usando una técnica adecuada de ajuste de curvas, como un

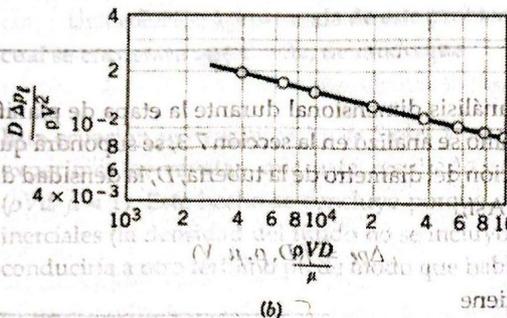
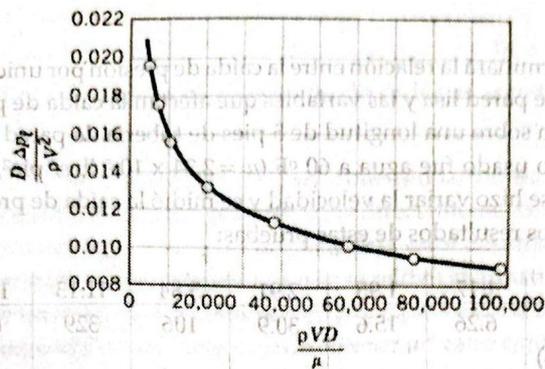


FIGURA E7.4

programa de regresión no lineal. Para los datos proporcionados en este ejemplo, un buen ajuste de datos se obtiene con la ecuación

$$\Pi_1 = 0.150 \Pi_2^{-0.25} \quad \text{(Respuesta)}$$

En 1911, H. Blasius (1883-1970), experto alemán en mecánica de fluidos, estableció una ecuación empírica semejante que se usa mucho para predecir la caída de presión en tuberías lisas en el intervalo  $4 \times 10^3 < Re < 10^5$  (referencia 16). Esta ecuación se puede expresar en la forma

$$\frac{D \Delta p_f}{\rho V^2} = 0.1582 \left( \frac{\rho V D}{\mu} \right)^{-1/4}$$

La denominada fórmula de Blasius se basa en numerosos resultados experimentales del tipo usado en este ejemplo. El flujo en tuberías se analizará con más detalle en el siguiente capítulo, donde se demostrará cómo la rugosidad de la tubería (que introduce otra variable) puede afectar los resultados dados en este ejemplo (que son para tubos de pared lisa).

A medida que aumenta el número de términos pi requeridos se hace más difícil presentar los resultados en forma gráfica conveniente y determinar una ecuación empírica específica que describa el fenómeno. Para problemas con tres términos pi

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3)$$

aún es posible mostrar las correlaciones de datos sobre gráficas simples trazando familias de curvas como se ilustra en la figura 7.5. Ésta es una forma informativa y útil de representar los datos de manera general. También puede ser posible determinar una ecuación empírica apropiada que relacione los tres términos pi. Sin embargo, a medida que crece el número de términos pi, lo que corresponde a un incremento en la complejidad general del problema de interés, tanto la representación gráfica como la determinación de una ecuación empírica apropiada se vuelven intratables. Para estos problemas más complicados, a menudo es más factible usar modelos para predecir características específicas del sistema en vez de intentar obtener correlaciones generales.

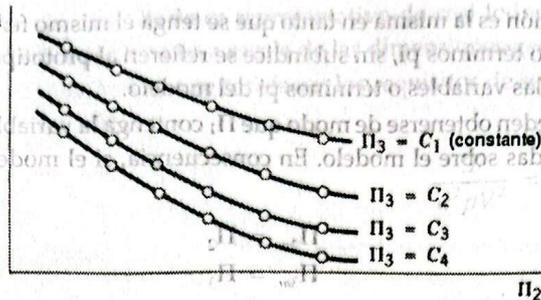


FIGURA 7.5 Representación gráfica de datos para problemas con tres términos pi.

## 7.8 Modelado y similitud

En mecánica de fluidos se usan ampliamente los modelos. Proyectos importantes de ingeniería que se relacionan con estructuras, aviones, barcos, ríos, puertos, presas, contaminación del aire y del agua, etc., frecuentemente utilizan modelos. Aunque el término "modelo" se usa en muchos contextos diferentes, el "modelo ingenieril" se ajusta a la siguiente definición. Un modelo es una representación de un sistema físico que se puede usar para predecir el comportamiento del sistema en algún aspecto deseado. El sistema físico para el que se hacen las predicciones se denomina prototipo. Aunque los modelos matemáticos o de computadora también se pueden ajustar a la definición anterior, el interés lo constituirán los modelos físicos; es decir, modelos que se parecen al prototipo, pero que generalmente son de diferente tamaño, pueden usar fluidos distintos y a menudo operan en diferentes condiciones (presiones, velocidades, etc.). Casi siempre un modelo es más pequeño que el prototipo. En consecuencia, es más fácil manejarlo en el laboratorio y es menos costoso de construir y operar que un prototipo grande. Algunas veces, si el prototipo es muy pequeño, puede ser conveniente contar con un modelo más grande que el prototipo, de modo que sea posible estudiarlo más fácilmente. Por ejemplo, para estudiar el movimiento de los glóbulos rojos, que miden aproximadamente 8  $\mu$ m de diámetro, se han usado modelos grandes. Con la obtención exitosa de un modelo válido es posible predecir el comportamiento del prototipo bajo cierto conjunto de condiciones. También se podría querer examinar a priori el efecto de posibles cambios de diseño propuestos para una estructura hidráulica o un sistema de flujo de fluidos. Por supuesto, existe un peligro inherente en el empleo de modelos, en el sentido de que se pueden hacer predicciones erróneas de modo que el error no se detecta sino hasta que se descubre que el prototipo no funciona como se predijo. Por tanto, es imperativo diseñar y probar en forma adecuada el modelo e interpretar correctamente los resultados. En las siguientes secciones se construirán los procedimientos para diseñar modelos de forma que el modelo y el prototipo se comporten de manera semejante.

### 7.8.1 Teoría de modelos

La teoría de modelos se puede construir fácilmente usando los principios del análisis dimensional. Se ha demostrado que cualquier problema dado se puede describir en función de un conjunto de términos pi como

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n) \tag{7.7}$$

En el planteamiento de esta relación sólo se requiere conocer la naturaleza general del fenómeno físico y las variables en cuestión. Para realizar el análisis dimensional no se requieren valores específicos de las variables (tamaño de las componentes, propiedades del fluido, etc.). Así, la ecuación 7.7 es válida para cualquier sistema que esté regido por las mismas variables. Si la ecuación 7.7 describe el comportamiento de un prototipo particular, para un modelo de este prototipo se puede escribir una relación semejante; es decir

$$\Pi_{1m} = \phi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \dots, \Pi_{nm}) \tag{7.8}$$

donde la forma de la función es la misma en tanto que se tenga el mismo fenómeno en el prototipo y en el modelo. Las variables, o términos  $\pi$ , sin subíndice se refieren al prototipo, en tanto que el subíndice  $m$  se usará para designar las variables o términos  $\pi$  del modelo.

Los términos  $\pi$  pueden obtenerse de modo que  $\Pi_1$  contenga la variable que será predicha a partir de observaciones efectuadas sobre el modelo. En consecuencia, si el modelo se diseña y opera en las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \Pi_{2m} &= \Pi_2 \\ \Pi_{3m} &= \Pi_3 \\ &\vdots \\ \Pi_{nm} &= \Pi_n \end{aligned} \tag{7.9}$$

entonces con la suposición previa de que la forma de  $\phi$  es la misma para el modelo y el prototipo, se concluye que

$$\Pi_1 = \Pi_{1m} \tag{7.10}$$

La ecuación 7.10 es la ecuación de predicción buscada e indica que el valor medido de  $\Pi_{1m}$  obtenido con el modelo es igual al valor de  $\pi_1$  correspondiente para el prototipo en tanto que los demás términos  $\pi$  sean iguales. Las condiciones especificadas por las ecuaciones 7.9 constituyen las condiciones de diseño del modelo, también denominadas requisitos de semejanza o leyes de modelado.

Como ejemplo del procedimiento, considérese el problema de determinar el arrastre,  $\mathcal{D}$ , sobre una delgada placa rectangular (de tamaño  $w \times h$ ) colocada en posición normal a un fluido con velocidad  $V$ . El análisis dimensional de este problema se efectuó en el ejemplo 7.1, donde se supuso que

Al aplicar el teorema  $\pi$  se obtuvo

$$\frac{\mathcal{D}}{w^2 \rho V^2} = \phi \left( \frac{w}{h}, \frac{\rho V w}{\mu} \right) \tag{7.11}$$

Ahora se tiene interés en diseñar un modelo que se pueda usar para predecir el arrastre sobre cierto prototipo (que presumiblemente es de tamaño diferente que el modelo). Como la relación expresada por la ecuación 7.11 es válida para el prototipo y el modelo, se supondrá que la ecuación 7.11 rige el prototipo, con una relación semejante

$$\frac{\mathcal{D}_m}{w_m^2 \rho_m V_m^2} = \phi \left( \frac{w_m}{h_m}, \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m} \right) \tag{7.12}$$

para el modelo. En consecuencia, las condiciones de diseño del modelo, o requisitos de semejanza, son

$$\frac{w_m}{h_m} = \frac{w}{h} \quad \frac{\rho_m V_m w_m}{\mu_m} = \frac{\rho V w}{\mu}$$

El tamaño del modelo se obtiene a partir del primer requisito, el cual indica que

$$w_m = \frac{h_m}{h} w \tag{7.13}$$

Se tiene libertad para establecer la razón de altura  $h_m/h$ , pero entonces el ancho de la placa del modelo,  $w_m$ , es fijo, en concordancia con la ecuación 7.13.

El segundo requisito de semejanza indica que el prototipo y el modelo deben operar al mismo número de Reynolds. Así, la velocidad requerida para el modelo se obtiene a partir de la relación

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{w}{w_m} V \tag{7.14}$$

Obsérvese que este diseño de modelo requiere no sólo modificar la escala geométrica, como especifica la ecuación 7.13, sino también la modificación correcta de la velocidad, en concordancia con la ecuación

7.14. Este resultado es representativo de casi todos los diseños de modelos; el diseño es más que la simple modificación a escala de las dimensiones geométricas!

Una vez que se satisfacen los requisitos de semejanza anteriores, la ecuación de predicción para el arrastre es

$$\frac{\mathcal{D}}{w^2 \rho V^2} = \frac{\mathcal{D}_m}{w_m^2 \rho_m V_m^2}$$

o bien,

$$\mathcal{D} = \left(\frac{w}{w_m}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_m}\right) \left(\frac{V}{V_m}\right)^2 \mathcal{D}_m$$

Así, para obtener el valor predicho del arrastre del prototipo,  $\mathcal{D}$ , es necesario multiplicar un arrastre medido sobre el modelo,  $\mathcal{D}_m$ , por la razón del cuadrado de los anchos de la placa, la razón de las densidades del fluido y la razón del cuadrado de las velocidades.

En general, como se ilustra en este ejemplo, a fin de lograr semejanza entre el comportamiento del modelo y el prototipo, *todos los términos pi correspondientes se deben igualar entre el modelo y el prototipo*. Usualmente, uno o más de estos términos pi incluye razones de longitudes importantes (como  $w/h$  en el ejemplo anterior); es decir, son puramente geométricos. Así, cuando se igualan los términos pi que incluyen razones de longitud se está requiriendo que haya *semejanza geométrica* completa entre el modelo y el prototipo. Esto significa que el modelo debe ser una versión a escala del prototipo. La modificación geométrica a escala se puede extender a las características más sutiles del sistema, como rugosidad superficial o pequeñas protuberancias sobre una estructura, ya que estos tipos de características geométricas pueden afectar significativamente el flujo. Cualquier desviación con respecto a la semejanza geométrica completa para un modelo se debe considerar cuidadosamente. Algunas veces puede ser difícil lograr la modificación geométrica a escala completa, especialmente cuando se trabaja con rugosidad superficial, ya que ésta es difícil de caracterizar y controlar.

Otro grupo de términos pi representativos (como el número de Reynolds en el ejemplo anterior) incluye razones de fuerza como se observó en la tabla 7.1. La igualdad de estos términos pi requiere que la razón de fuerzas parecidas en el modelo y el prototipo sea la misma. Así, para flujos en que los números de Reynolds son iguales, la razón de fuerzas viscosas en el modelo y el prototipo es igual a la razón de fuerzas inerciales. Si se tienen otros términos pi, como el número de Froude o el número de Weber, es posible obtener una conclusión semejante; es decir, la igualdad de estos términos pi requiere que la razón de fuerzas semejantes en el modelo y el prototipo sea la misma. Por tanto, cuando estos tipos de términos pi son iguales en el modelo y el prototipo se tiene *semejanza dinámica* entre el modelo y el prototipo. Se concluye que con semejanzas geométrica y dinámica los patrones de las líneas de corriente son iguales y las razones de velocidad correspondientes ( $V_m/V$ ) y las razones de aceleración ( $a_m/a$ ) son constantes en todo el campo de flujo. Así, entre el modelo y el prototipo existe *semejanza cinemática*. Para tener semejanza completa entre el modelo y el prototipo es necesario mantener las semejanzas geométrica, cinemática y dinámica entre los dos sistemas. Lo anterior se concluye de inmediato si en el análisis dimensional se incluyen todas las variables importantes y si se cumplen todos los requisitos de semejanza basados en los términos pi resultantes.

## EJEMPLO 7.5

Una larga componente estructural de un puente tiene la sección transversal mostrada en la figura E7.5. Se sabe que cuando un viento estable sopla por este tipo de cuerpo romo, en el lado viento abajo se pueden formar vórtices emitidos de manera regular a una frecuencia definida. En virtud de que estos vórtices pueden crear fuerzas periódicas dañinas que actúan sobre la estructura, es importante determinar la frecuencia de emisión. Para la estructura específica de interés,  $D = 0.1$  m,  $H = 0.3$  m y una velocidad representativa del viento es de 50 km/h. Se puede suponer aire normal. La frecuencia de emisión se debe determinar mediante el empleo de un modelo a pequeña escala que será probado en un túnel de agua. Para el modelo,  $D_m = 20$  mm y la temperatura del agua es de 20 °C. Determinar la dimensión  $H_m$  del modelo y la velocidad  $a$  que se debe efectuar la prueba. Si se encuentra que la frecuencia de emisión para el modelo es de 49.9 Hz, ¿cuál es la frecuencia correspondiente para el prototipo?

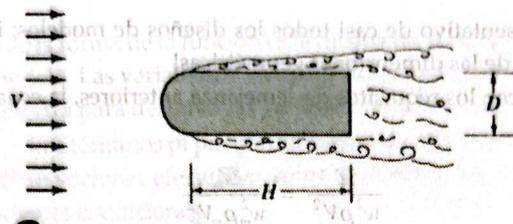


FIGURA E7.5

**SOLUCIÓN**

Se espera que la frecuencia de emisión,  $\omega$ , dependa de las longitudes  $D$  y  $H$ , de la velocidad de aproximación,  $V$ , y de la densidad y viscosidad del fluido,  $\rho$  y  $\mu$ , respectivamente. Así,

$$\omega = f(D, H, V, \rho, \mu)$$

donde

$$\omega \equiv T^{-1}$$

$$D \equiv L$$

$$H \equiv L$$

$$V \equiv LT^{-1}$$

$$\rho \equiv ML^{-3}$$

$$\mu \equiv ML^{-1}T^{-1}$$

Como hay seis variables y tres dimensiones de referencia ( $MLT$ ), se requieren tres términos  $\pi$ . Al aplicar el teorema  $\pi$  se obtiene

$$\frac{\omega D}{V} = \phi \left( \frac{D}{H}, \frac{\rho V D}{\mu} \right)$$

El término  $\pi$  de la izquierda se reconoce como el número de Strouhal, y el análisis dimensional indica que el número de Strouhal es función del parámetro geométrico,  $D/H$ , y del número de Reynolds. Así, para mantener la semejanza entre el modelo y el prototipo

$$\frac{D_m}{H_m} = \frac{D}{H}$$

y

$$\frac{\rho_m V_m D_m}{\mu_m} = \frac{\rho V D}{\mu}$$

Con base en el primer requisito de semejanza,

$$H_m = \frac{D_m}{D} H = \frac{(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{(0.3 \text{ m})} (0.3 \text{ m})$$

$$H_m = 60 \times 10^{-3} \text{ m} = 60 \text{ mm}$$

(Respuesta)

El segundo requisito de semejanza indica que el número de Reynolds debe ser el mismo para el modelo y para el prototipo, de modo que la velocidad para el modelo debe cumplir la condición

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{D}{D_m} V \tag{1}$$

Para aire en condiciones normales,  $\mu = 1.79 \times 10^{-5} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ , y para agua a  $20^\circ\text{C}$ ,  $\mu = 1.00 \times 10^{-3} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$ ,  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ . La velocidad del fluido para el prototipo es

$$V = \frac{(50 \times 10^3 \text{ m/h})}{(3600 \text{ s/h})} = 13.9 \text{ m/s}$$

Ahora, a partir de la ecuación 1 ya es posible calcular la velocidad requerida como

$$V_m = \frac{[1.00 \times 10^{-3} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})](1.23 \text{ kg}/\text{m}^3)(0.1 \text{ m})}{[1.79 \times 10^{-5} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})](998 \text{ kg}/\text{m}^3)(20 \times 10^{-3} \text{ m})} \quad (13.9 \text{ m/s})$$

$$V_m = 4.79 \text{ m/s} \quad \text{(Respuesta)}$$

Ésta es una velocidad razonable que se puede alcanzar fácilmente en un túnel de agua.

Una vez que se cumplen los dos requisitos de semejanza, se concluye que los números de Strouhal para el prototipo y el modelo son iguales, de modo que

$$\frac{\omega D}{V} = \frac{\omega_m D_m}{V_m}$$

y la frecuencia de emisión de vórtices predicha para el prototipo es

$$\omega = \frac{V}{D} \frac{D_m}{V_m} \omega_m$$

$$= \frac{(13.9 \text{ m/s})}{(4.79 \text{ m/s})} \frac{(20 \times 10^{-3} \text{ m})}{(0.1 \text{ m})} (49.9 \text{ Hz})$$

$$\omega = 29.0 \text{ Hz} \quad \text{(Respuesta)}$$

Éste mismo modelo se podría usar también para predecir el arrastre por unidad de longitud,  $\mathcal{D}_l$ , sobre el prototipo, ya que el arrastre dependería de las mismas variables que las usadas para la frecuencia. Así, los requisitos de semejanza son los mismos y una vez satisfechos éstos se concluye que el arrastre por unidad de longitud expresado en forma adimensional, como  $\mathcal{D}_l / D \rho V^2$ , es igual en el modelo y en el prototipo. El arrastre medido sobre el modelo se puede entonces relacionar con el arrastre correspondiente sobre el prototipo mediante la expresión

$$\mathcal{D}_l = \left( \frac{D}{D_m} \right) \left( \frac{\rho}{\rho_m} \right) \left( \frac{V}{V_m} \right)^2 \mathcal{D}_{lm}$$

### 7.8.2 Escalas de modelos

Por la sección precedente resulta claro que la razón de cantidades semejantes para el modelo y el prototipo surge de manera natural a partir de las requisitos de semejanza. Por ejemplo, si en un problema dado hay dos variables de longitud  $\ell_1$  y  $\ell_2$ , el requisito de semejanza resultante basado en un término pi que se obtiene a partir de estas dos variables es

$$\frac{\ell_1}{\ell_2} = \frac{\ell_{1m}}{\ell_{2m}}$$

de modo que

$$\frac{\ell_{1m}}{\ell_1} = \frac{\ell_{2m}}{\ell_2}$$

La razón  $\ell_{1m}/\ell_1$  o  $\ell_{2m}/\ell_2$  se define como *escala de longitud*. Para modelos reales sólo existe una escala de longitud, y todas las longitudes se fijan según esta escala. Sin embargo, hay otras escalas como la de velocidad,  $V_m/V$ , densidad,  $\rho_m/\rho$ , viscosidad,  $\mu_m/\mu$ , etc. De hecho, es posible definir una escala para cada una de las variables del problema. Así, realmente no tiene sentido hablar de una "escala" para el modelo sin especificar de cuál se trata.

La escala de longitud se designará por  $\lambda_\ell$  y las otras escalas por  $\lambda_V, \lambda_\rho, \lambda_\mu$ , etc., donde el subíndice indica la escala particular. También, la razón del valor para el modelo al valor para el prototipo se considerará como la escala (en vez de la inversa). Las escalas de longitud se especifican, por ejemplo, como 1:10 o como modelo a escala 1/10. El significado de esta especificación es que el modelo mide la

décima parte que el prototipo, y la suposición tácita es que todas las longitudes relevantes están a escala de manera correspondiente, de modo que el modelo es geoméricamente semejante al prototipo.

### 7.8.3 Aspectos prácticos del empleo de modelos

**Validación del diseño del modelo.** En casi todos los estudios de modelos se usan hipótesis de simplificación con respecto a las variables a considerar. Aunque el número de hipótesis a menudo es menos estricto que las hipótesis necesarias para los modelos matemáticos, a pesar de ello introducen cierta incertidumbre en el diseño del modelo. Por consiguiente, es aconsejable comprobar experimentalmente el diseño siempre que sea posible. En algunas situaciones el objetivo del modelo es predecir los efectos de ciertos cambios propuestos en un prototipo dado, y en este caso se puede contar con algunos datos reales del prototipo. El modelo se puede diseñar, construir y probar, y la predicción para el modelo se puede comparar con estos datos. Si la concordancia es satisfactoria, entonces el modelo se puede cambiar según se requiera y el efecto correspondiente sobre el prototipo se puede predecir con más confianza.

Otro procedimiento útil e informativo es realizar pruebas con una serie de modelos de diferentes tamaños, donde se puede pensar que uno de los modelos es el prototipo y los otros son "modelos" de este prototipo. Con los modelos diseñados y operados con base en el diseño propuesto, una condición necesaria para la validez del diseño del modelo es que sea posible hacer una predicción exacta entre cualquier pareja de modelos, ya que uno siempre se puede considerar como modelo del otro. Aunque una concordancia idónea en las pruebas de validación de este tipo no indica inequívocamente un diseño de modelo correcto (por ejemplo, las escalas de longitud entre modelos de laboratorio pueden ser significativamente diferentes de lo requerido para hacer predicciones reales de prototipos), ciertamente es verdad que si en estas pruebas no es posible lograr concordancia entre modelos, entonces no hay ninguna razón para esperar que el mismo diseño de modelos se pueda usar para predecir correctamente el comportamiento del prototipo.

**Modelos distorsionados.** Aunque la idea general que sustenta el establecimiento de requisitos de semejanza para modelos es directa (simplemente se igualan los términos  $\pi$ ), no siempre es posible satisfacer todos los requisitos conocidos. Si no se cumple uno o más de los requisitos de semejanza, por ejemplo, si  $\Pi_{2m} \neq \Pi_2$ , entonces se concluye que la ecuación de predicción  $\Pi_1 = \Pi_{1m}$  no es verdadera; es decir,  $\Pi_1 \neq \Pi_{1m}$ . Los modelos para los cuales no se cumplen uno o más de los requisitos de semejanza se denominan *modelos distorsionados*.

Los modelos distorsionados son más bien comunes, y pueden surgir debido a varias razones. Por ejemplo, quizá porque no es posible encontrar un fluido apropiado para el modelo. El ejemplo clásico de un modelo distorsionado ocurre en el estudio de flujos en canal abierto o con una superficie libre. Típicamente, en estos problemas tanto el número de Reynolds,  $\rho V \ell / \mu$ , como el número de Froude,  $V / \sqrt{g \ell}$ , están presentes.

La semejanza del número de Froude requiere

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g \ell}}$$

Si el modelo y el prototipo operan en el mismo campo de gravitación, entonces la escala de velocidad requerida es

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell}$$

La semejanza del número de Reynolds requiere

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

y la escala de velocidad es

donde  $v = 1, 2, \dots$ . A medida que el número de términos de longitud  $\ell_v$  aumenta, la geometría básica del sistema puede ser importante la rugosidad de las superficies en contacto con el fluido. Si la altura media de los elementos de rugosidad superficial se define como  $\epsilon$ , entonces el término pi que representa la rugosidad es  $\epsilon/\ell_v$ . Este parámetro también debe ser a

Como la escala de velocidad debe ser igual a la raíz cuadrada de la escala de longitud, se concluye que

$$\frac{\mu_m/\rho_m}{\mu/\rho} = \frac{v_m}{v} = (\lambda_\ell)^{3/2} \tag{7.15}$$

donde la razón  $\mu/\rho$  es la viscosidad cinemática,  $\nu$ . Aunque en principio puede ser posible satisfacer esta condición de diseño, puede ser difícil, si no es que imposible, encontrar un fluido adecuado para el modelo, especialmente para escalas de longitud pequeñas. Para problemas que implican ríos, vertederos y puertos, en los que el fluido para el prototipo es agua, los modelos también son relativamente grandes, de modo que el único fluido práctico para el modelo es agua. Sin embargo, en este caso (con la escala de viscosidad cinemática igual a la unidad) no se cumple la ecuación 7.15 y se obtiene un modelo distorsionado. En general, los modelos hidráulicos de este tipo son distorsionados y se diseñan con base en el número de Froude, donde el número de Reynolds es diferente en el modelo y en el prototipo.

Los modelos distorsionados se pueden usar exitosamente, pero la interpretación de los resultados obtenidos con este tipo de modelos obviamente es más difícil que la interpretación de los resultados obtenidos con *modelos reales* para los que se cumplen todos los requisitos de semejanza. No existen reglas generales para trabajar con modelos distorsionados, y esencialmente cada problema se debe considerar con base en sus propias características. El éxito de usar modelos distorsionados depende en gran medida de la habilidad y experiencia del investigador responsable del diseño del modelo y en la interpretación de los datos experimentales obtenidos a partir del modelo. Los modelos distorsionados se usan bastante, y en la bibliografía proporcionada al final de capítulo se puede encontrar más información. Las referencias 14 y 15 contienen análisis detallados de varios ejemplos prácticos de flujo distorsionado de fluidos y modelos hidráulicos.

## 7.9 Algunos estudios de modelos representativos

Los modelos se usan para investigar muchos tipos diferentes de problemas de mecánica de fluidos, y es difícil caracterizar de manera general todos los requisitos de semejanza necesarios, ya que cada problema es único. Sin embargo, es posible clasificar ampliamente muchos de los problemas con base en la naturaleza general del flujo, y más tarde construir algunas características generales de diseños de modelos en cada una de estas clasificaciones. En las siguientes secciones se considerarán modelos para el estudio de (1) flujo a través de conductos cerrados, (2) flujo en torno a cuerpos inmersos y (3) flujo con una superficie libre. En el capítulo 12 se considerarán modelos de turbomáquinas.

### 7.9.1 Flujo a través de conductos cerrados

Algunos ejemplos comunes de este tipo de flujo son el flujo por tuberías y el flujo a través de válvulas, accesorios y dispositivos de medición. Aunque a menudo los conductos son circulares, también pueden tener otras formas y contener expansiones o contracciones. Como el fluido no tiene interfaces o superficies libres, las fuerzas dominantes son inerciales y viscosas, de modo que el número de Reynolds es un parámetro de semejanza importante. Para números de Mach bajos ( $Ma < 0.3$ ), los efectos de compresibilidad son insignificantes para flujo de líquidos o gases. Para esta clase de problemas, se debe mantener la semejanza geométrica entre el modelo y el prototipo. En general, las características geométricas se pueden describir por medio de una serie de términos de longitud  $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_i$  y  $\ell$ , donde  $\ell$  es alguna dimensión particular de longitud para el sistema. Esta serie de términos de longitud conduce a un conjunto de términos pi de la forma

$$\Pi_i = \frac{\ell_i}{\ell}$$

donde  $i = 1, 2, \dots$ , etc. Además de la geometría básica del sistema, puede ser importante la rugosidad de las superficies internas en contacto con el fluido. Si la altura media de los elementos de rugosidad superficial se define como  $\epsilon$ , entonces el término  $\pi_i$  que representa la rugosidad es  $\epsilon/\ell$ . Este parámetro indica que para que la semejanza geométrica sea completa, la rugosidad superficial también debe ser a escala. Obsérvese que lo anterior indica que para escalas de longitud menores que 1, las superficies del modelo deben ser más lisas que las del prototipo, ya que  $\epsilon_m = \lambda \epsilon$ . Para complicar aún más la situación, el patrón de los elementos de rugosidad en el modelo y en el prototipo debe ser semejante. Hay condiciones que son casi imposibles de satisfacer exactamente. Por fortuna, en algunos problemas la rugosidad superficial desempeña un papel menor y se puede ignorar. Sin embargo, en otros problemas (como en flujo turbulento a través de tubos), la rugosidad puede ser muy importante.

Con base en el análisis anterior se concluye que para flujo en conductos cerrados a bajos números de Mach, cualquier término  $\pi_i$  dependiente (el que contiene la variable particular de interés, como la caída de presión) se puede expresar como

$$\text{Término } \pi_i \text{ dependiente} = \phi \left( \frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\epsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu} \right) \tag{7.16}$$

Éste es un planteamiento general para este tipo de problema. Los dos primeros términos  $\pi_i$  del miembro derecho de la ecuación 7.16 conducen al requisito de semejanza geométrica de modo que

$$\frac{\ell_m}{\ell} = \frac{\epsilon_m}{\epsilon} = \lambda$$

o bien,

Este resultado indica que el investigador es libre de elegir una escala de longitud,  $\lambda \ell$ , pero una vez que se ha elegido esta escala, se debe aplicar a las demás longitudes pertinentes.

El requisito de semejanza adicional surge de la igualdad de los números de Reynolds

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

A partir de esta condición, la escala de velocidad se establece de modo que

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\ell}{\ell_m} \tag{7.17}$$

y el valor real de la escala de velocidad depende de las escalas de viscosidad y densidad, así como de la escala de longitud. En el modelo y el prototipo se pueden usar líquidos diferentes. Sin embargo, si se usa el mismo fluido (con  $\mu_m = \mu$  y  $\rho_m = \rho$ ), entonces

$$\frac{V_m}{V} = \frac{\ell}{\ell_m}$$

Así,  $V_m = V/\lambda$ , lo cual indica que la velocidad del fluido en el modelo es mayor que la del prototipo para cualquier escala de longitud menor que 1. Como las escalas de longitud comúnmente son mucho menores que la unidad, la semejanza del número de Reynolds puede ser difícil de lograr debido a las grandes velocidades requeridas en el modelo.

Una vez que se satisfacen estos requisitos de semejanza, se concluye que el término  $\pi_i$  dependiente es igual en el modelo y en el prototipo. Por ejemplo, si la variable dependiente de interés es el diferencial del presión,<sup>3</sup>  $\Delta p$ , entre dos puntos a lo largo de un conducto cerrado, entonces el término  $\pi_i$  dependiente se puede expresar como

<sup>3</sup> En algunos ejemplos previos se usó el diferencial de presión por unidad de longitud,  $\Delta p/\ell$ . Lo anterior es apropiado para flujo en tuberías o conductos largos donde la presión varía linealmente con la distancia. Sin embargo, en el caso más general la presión puede no variar linealmente con la posición, de modo que es necesario considerar al diferencial de presión,  $\Delta p$ , como la variable dependiente. En este caso, la distancia entre los tapones de presión es una variable adicional (así como la distancia de uno de los tapones medida con respecto a algún punto de referencia dentro del sistema de flujo).

Se deben mostrar los coeficientes adimensionales con respecto al modelado de flujos en conductos...  $\Pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$

La caída de presión del prototipo se obtiene entonces a partir de la relación

$$\Delta p = \frac{\rho}{\rho_m} \left( \frac{V}{V_m} \right)^2 \Delta p_m$$

de modo que a partir de un diferencial de presión medido en el modelo,  $\Delta p_m$ , es posible predecir el diferencial de presión correspondiente para el prototipo. Obsérvese que, en general,  $\Delta p \neq \Delta p_m$ .

**EJEMPLO 7.6**

Se piensa realizar pruebas en un modelo para estudiar el flujo a través de una gran válvula que tiene una entrada de 2 pies de diámetro y que permite el paso de agua a un caudal de 30 pies<sup>3</sup>/s. El fluido de trabajo en el modelo es agua a la misma temperatura que en el prototipo. Entre el modelo y el prototipo hay completa semejanza geométrica y el diámetro de entrada del modelo mide 3 pulgadas. Determinar el caudal requerido en el modelo.

**SOLUCIÓN**

A fin de asegurar la semejanza dinámica, las pruebas en el modelo se deben realizar de modo que

$$Re_m = Re$$

o bien,

$$\frac{V_m D_m}{\nu} = \frac{V D}{\nu}$$

donde  $V$  y  $D$  corresponden a la velocidad y al diámetro de entrada, respectivamente. Como en el modelo y en el prototipo se usa el mismo fluido,  $\nu = \nu_m$ , y entonces

$$\frac{V_m}{V} = \frac{D}{D_m}$$

La descarga,  $Q$ , es igual a  $VA$ , donde  $A$  es el área de entrada, de modo que

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{V_m A_m}{VA} = \left( \frac{D}{D_m} \right) \left[ \frac{(\pi/4) D_m^2}{(\pi/4) D^2} \right]$$

$$= \frac{D_m}{D}$$

y para los datos proporcionados

$$Q_m = \frac{(3/12 \text{ pies})}{(2 \text{ pies})} (30 \text{ pies}^3/\text{s})$$

$$Q_m = 3.75 \text{ pies}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

Aunque este caudal es grande para pasar a través de una tubería de 3 pulg de diámetro (la velocidad correspondiente es de 76.4 pies/s), se puede lograr en una instalación de laboratorio. Sin embargo, se debe observar que si se intenta usar un modelo más pequeño, por ejemplo uno con  $D = 1$  pulg, la velocidad requerida para el modelo es de 229 pies/s, una velocidad muy elevada que es difícil de lograr. Estos resultados son indicativos de una de las dificultades que se encuentran al mantener la semejanza del número de Reynolds; puede ser impráctico obtener las velocidades requeridas por el modelo.

Se deben mencionar dos cuestiones adicionales con respecto al modelado de flujos en conductos cerrados. Primero, para grandes números de Reynolds, las fuerzas inerciales son mucho mayores que las fuerzas viscosas, y en este caso puede ser posible ignorar los efectos viscosos. La consecuencia práctica importante de este hecho es que podría no ser necesario mantener la semejanza del número de Reynolds entre el modelo y el prototipo. Sin embargo, el modelo y el prototipo, *ambos*, deben poder operar a grandes números de Reynolds. En virtud de que no se sabe, *a priori*, qué es un "gran número de Reynolds", el efecto de los números de Reynolds se debe determinar a partir del modelo. Lo anterior se puede lograr haciendo variar el número de Reynolds para el modelo a fin de determinar el intervalo (en caso de haber alguno) sobre el que el término pi dependiente deja de ser afectado por cambios en el número de Reynolds.

La segunda cuestión está relacionada con la posibilidad de que haya cavitación en el flujo a través de conductos cerrados. Por ejemplo, el flujo a través de los pasajes complejos que pueden existir en válvulas puede conducir a regiones locales de alta velocidad (y así, de baja presión), que pueden hacer que el fluido cavite. Si el modelo se usa para estudiar fenómenos de cavitación, entonces la presión de vapor,  $p_v$ , se vuelve una variable importante y se necesita un requisito de semejanza adicional, como la igualdad del número de cavitación  $(p_r - p_v) / \rho V^2$ , donde  $p_r$  es alguna presión de referencia. El empleo de modelos para estudiar cavitación es complicado, ya que no se ha comprendido completamente bien cómo se forman y crecen las burbujas de vapor. Parece que la iniciación de las burbujas es afectada por las partículas microscópicas que existen en casi todos los líquidos, y no resulta evidente cómo este aspecto del problema afecta los estudios de modelos. Otros detalles se pueden consultar en la referencia 17.

### 7.9.2 Flujo en torno a cuerpos inmersos

Los modelos han sido ampliamente usados para estudiar las características de flujo asociadas con cuerpos que están completamente inmersos en un fluido móvil. Algunos ejemplos son el flujo en torno a aviones, automóviles, pelotas de golf y edificios. (Estos tipos de modelos se prueban en túneles de aire como se ilustra en la figura 7.6). Las leyes de modelado para estos problemas son semejantes a las descritas en la sección precedente; es decir, se requiere semejanza geométrica y del número de Reynolds. Debido a que en el fluido no hay interfases, la tensión superficial (y por tanto el número de Weber) no es importante. También, la gravitación no afecta los patrones de flujo, de modo que no es necesario considerar el número de Froude. El número de Mach es importante para flujos a alta velocidad en los que la compresibilidad se vuelve un factor importante, pero para fluidos incompresibles (como líquidos o para gases a velocidades relativamente bajas) el número de Mach se puede omitir como requisito de semejanza. En este caso, un planteamiento general para estos problemas es

$$\text{Término pi dependiente} = \phi \left( \frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu} \right) \tag{7.18}$$

donde  $\ell$  es alguna longitud característica del sistema y  $\ell_i$  representa otras longitudes pertinentes,  $\varepsilon/\ell$  es la rugosidad relativa de la superficie (o superficies) y  $\rho V \ell / \mu$  es el número de Reynolds.

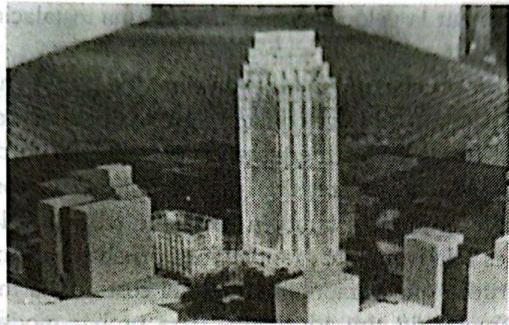
A menudo, la variable dependiente de interés para este tipo de problema es el arrastre,  $\mathcal{D}$ , creado sobre el cuerpo, y en esta situación el término pi dependiente se expresa en la forma de un *coeficiente de arrastre*,  $C_D$ , donde

$$C_D = \frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2}$$

El factor numérico,  $1/2$ , es arbitrario pero comúnmente incluido, y  $\ell^2$  se toma como algún área representativa del objeto. Así, los estudios sobre arrastre se pueden efectuar con el planteamiento

$$\frac{\mathcal{D}}{\frac{1}{2} \rho V^2 \ell^2} = C_D = \phi \left( \frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho V \ell}{\mu} \right) \tag{7.19}$$

A partir de la ecuación 7.19 resulta evidente que la semejanza geométrica



**FIGURA 7.6** Modelo del National Bank of Commerce, San Antonio, Texas, para la medición de picos, errores cuadráticos medios (ecm) y distribuciones de presión media. El modelo está localizado en un túnel de aire meteorológico de una larga sección de pruebas. (Fotografía cortesía de Cermak Peterka Petersen, Inc.)

así como la semejanza del número de Reynolds

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu}$$

se deben mantener. Si se satisfacen estas condiciones,

$$\frac{\rho_m V_m^2 \ell_m^2}{\mu_m} = \frac{\rho V^2 \ell^2}{\mu}$$

o bien,

$$\mathcal{D} = \frac{\rho}{\rho_m} \left( \frac{V}{V_m} \right)^2 \left( \frac{\ell}{\ell_m} \right)^2 \mathcal{D}_m$$

Entonces, a partir de esta relación es posible usar mediciones del arrastre sobre el modelo,  $\mathcal{D}_m$ , para predecir el arrastre correspondiente,  $\mathcal{D}$ , sobre el prototipo.

Como se analizó en la sección precedente, una de las dificultades comunes con modelos está relacionada con el requisito de semejanza del número de Reynolds, que establece la velocidad para el modelo como

$$V_m = \frac{\mu_m}{\mu} \frac{\rho}{\rho_m} \frac{\ell}{\ell_m} V \tag{7.20}$$

o bien,

$$V_m = \frac{\nu_m}{\nu} \frac{\ell}{\ell_m} V \tag{7.21}$$

donde  $\nu_m/\nu$  es la razón de viscosidades cinemáticas. Si para el modelo y el prototipo se usa el mismo fluido de modo que  $\nu_m = \nu$ , entonces

$$V_m = \frac{\ell}{\ell_m} V$$

y, en consecuencia, la velocidad requerida para el modelo es superior a la velocidad del prototipo para  $\ell/\ell_m$  mayor que 1. Como esta razón a menudo es relativamente grande, el valor requerido de  $V_m$  puede ser grande. Por ejemplo, para una escala de longitud de 1/10 y una velocidad del prototipo de 500 mph, la velocidad requerida para el modelo es 500 mph. Éste es un valor irrazonablemente elevado de alcanzar con líquidos, y para flujos de gases este valor estaría en el intervalo en que la compresibilidad sería importante en el modelo (pero no en el prototipo).

Como opción, a partir de la ecuación 7.21 se observa que  $V_m$  se puede reducir usando un fluido diferente en el modelo de modo que  $\nu_m/\nu < 1$ . Por ejemplo, la razón de la viscosidad cinemática del agua a la del aire es aproximadamente 1/10, de modo que si el fluido para el prototipo fuese aire, se podrían ejecutar pruebas sobre el modelo usando agua. Lo anterior reduciría la velocidad requerida para el

modelo, pero aún sería difícil alcanzar la velocidad necesaria en una instalación de prueba adecuada, como un túnel de agua.

Otra posibilidad para realizar pruebas en un túnel de aire sería incrementar la presión del aire en el túnel de modo que  $\rho_m > \rho$ , reduciendo así la velocidad requerida para el modelo como especifica la ecuación 7.20. La viscosidad del fluido no es fuertemente afectada por la presión. Aunque se han utilizado túneles presurizados, es evidente que resultan más complicados y costosos.

La velocidad requerida para el modelo también se puede reducir si la escala de longitud es modesta; es decir, si el modelo es relativamente grande. Para pruebas en túneles de aire, lo anterior requiere una gran sección de prueba que aumenta bastante el costo de la instalación. Sin embargo, actualmente se usan grandes túneles de aire adecuados para probar modelos (o prototipos) muy grandes. Uno de esos túneles, situado en el NASA Ames Research Center en Moffet Field, California, posee una sección de prueba de 40 pies por 80 pies y puede permitir velocidades de prueba hasta de 345 mph. Resulta evidente que esta instalación de prueba grande y costosa no es factible para laboratorios universitarios o industriales, por lo que casi todas las pruebas de modelos se deben realizar con modelos relativamente pequeños.

## EJEMPLO 7.7

El arrastre sobre un avión que se desplaza a 240 mph en aire normal se debe determinar a partir de pruebas sobre un modelo a escala 1:10 colocado en un túnel de aire presurizado. Para minimizar los efectos de compresibilidad, la velocidad del aire en el túnel también debe ser de 240 mph. Determinar la presión requerida para el aire en el túnel (suponiendo la misma temperatura del aire para el modelo y el prototipo), y el arrastre sobre el prototipo correspondiente a una fuerza medida de 1 lb sobre el modelo.

### SOLUCIÓN

Por la ecuación 7.19 se concluye que el arrastre se puede predecir a partir de un modelo geoméricamente semejante si los números de Reynolds para el modelo y para el prototipo son iguales. Así,

$$\frac{\rho_m V_m \ell_m}{\mu_m} = \frac{\rho V \ell}{\mu} \quad (7.20)$$

$$= \frac{\mu_m}{\mu} (1)(10)$$

Para este ejemplo,  $V_m = V$  y  $\ell_m / \ell = 1/10$ , de modo que

$$\text{y en consecuencia,} \quad (7.21)$$

$$\frac{\rho_m}{\rho} = 10 \frac{\mu_m}{\mu}$$

Este resultado muestra que si ha de mantenerse la semejanza del número de Reynolds, no se puede usar el mismo fluido con  $\rho_m = \rho$  y  $\mu_m = \mu$ . Una posibilidad es presurizar el túnel de aire a fin de incrementar la densidad del aire. Se supone que un incremento en la presión no cambia significativamente la viscosidad, de modo que el incremento requerido en densidad está dado por la relación

$$\frac{\rho_m}{\rho} = 10$$

Para un gas ideal,  $p = \rho RT$ , de modo que

$$\frac{p_m}{p} = \frac{\rho_m}{\rho}$$

para temperatura constante ( $T = T_m$ ). Por consiguiente, el túnel de aire necesita ser presurizado de modo que

Como el prototipo opera a presión atmosférica estándar, la presión requerida en el túnel de aire es de 10 atmósferas, o bien

$$p_m = 10(14.7 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)}) = 147 \text{ lb/pulg}^2 \text{ (abs)} \quad \text{(Respuesta)}$$

Así, se observa que se requiere una alta presión que no se puede alcanzar fácilmente o a bajo costo. Sin embargo, en estas condiciones se puede lograr la semejanza del número de Reynolds y el arrastre se puede obtener a partir de la ecuación 7.19 de modo que

$$\frac{\rho V^2 L^2}{\mu} = \frac{\rho_m V_m^2 L_m^2}{\mu} \Rightarrow \frac{V^2 L^2}{\mu} = \frac{V_m^2 L_m^2}{\mu} \Rightarrow V = \frac{L_m}{L} V_m = \frac{1}{10} (10^2) \frac{\mu}{\rho} = 10 \frac{\mu}{\rho}$$

Así, para una arrastre de 1 lb sobre el modelo, el arrastre correspondiente sobre el prototipo es  $\Phi = 10 \text{ lb}$  (Respuesta)

Afortunadamente, en muchas situaciones las características de flujo no son fuertemente afectadas por el número de Reynolds sobre el intervalo de operación de interés. En estos casos se puede evitar el requisito de semejanza más bien restrictivo de hacer corresponder los números de Reynolds. A fin de ilustrar esta cuestión, considérese la variación en el coeficiente de arrastre con el número de Reynolds

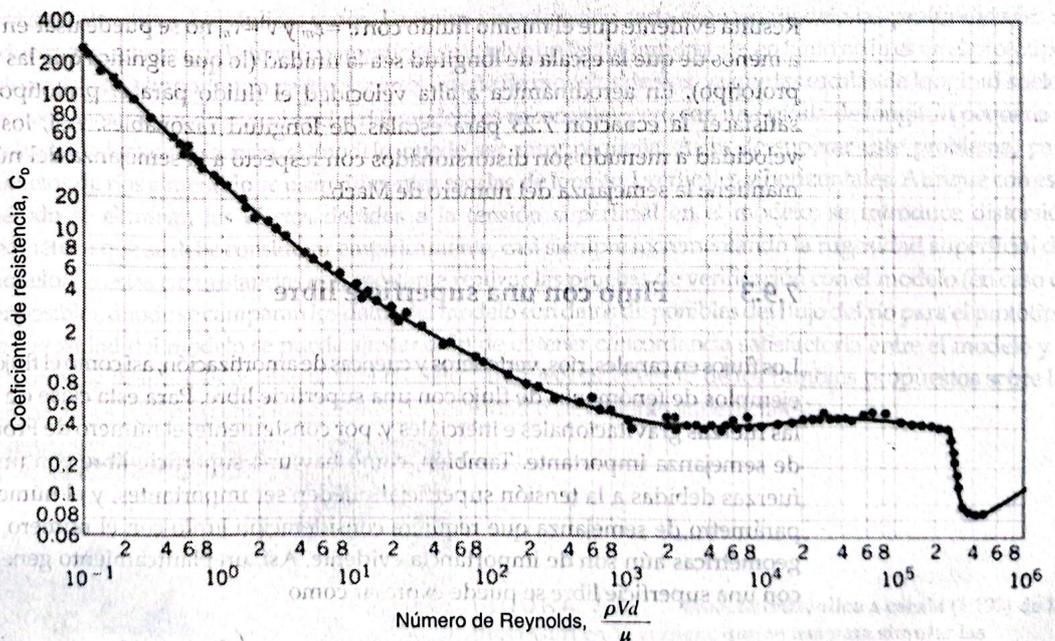


FIGURA 7.7 Efecto del número de Reynolds sobre el coeficiente de arrastre,  $C_D$ , para una esfera con  $C_D = \Phi/(1/2)A\rho V^2$ , donde  $A$  es el área proyectada de la esfera,  $\pi d^2/4$ . (Datos autorizados tomados de la referencia 16.)

para una esfera lisa de diámetro  $d$  colocada en una corriente uniforme con velocidad de aproximación  $V$ . En la figura 7.7 se muestran algunos datos representativos. Se observa que para números de Reynolds entre aproximadamente  $10^3$  y  $2 \times 10^5$  el coeficiente de arrastre es relativamente constante y no depende del valor específico del número de Reynolds. Así, en este intervalo no se requiere la semejanza exacta del número de Reynolds. Para otras formas geométricas, comúnmente se encuentra que para altos números de Reynolds las fuerzas inerciales son dominantes (en vez de las fuerzas viscosas), y que el arrastre es esencialmente independiente del número de Reynolds.

Otra cuestión interesante a observar a partir de la figura 7.7 es la caída más bien abrupta en el coeficiente de arrastre cerca de un número de Reynolds igual a  $3 \times 10^5$ . Como se analizará en la sección 9.3.3, lo anterior se debe a un cambio en las condiciones de flujo cerca de la superficie de la esfera. Estos cambios son afectados por la rugosidad superficial y, de hecho, el coeficiente de arrastre para una esfera con una superficie más "rugosa" es, en general, menor que el de la esfera lisa para altos números de Reynolds. Por ejemplo, los hoyuelos en una pelota de golf sirven para reducir el arrastre con respecto al que ocurriría en una pelota de golf lisa. Aunque este hecho es de indudable interés para el aficionado al golf, también es importante para los ingenieros responsables de modelos de flujo de fluidos, ya que recalca la importancia potencial de la rugosidad superficial. Sin embargo, para cuerpos que son suficientemente angulares con esquinas pronunciadas, es probable que la rugosidad superficial real desempeñe un papel secundario en comparación con las principales características geométricas del cuerpo.

Para problemas con altas velocidades en donde el número de Mach es aproximadamente mayor que 0.3, la influencia de la compresibilidad y, por tanto, el número de Mach (o el número de Cauchy), se vuelve importante. En este caso la semejanza completa requiere no sólo semejanza geométrica y del número de Reynolds, sino también semejanza del número de Mach, de modo que

$$\frac{V_m}{c_m} = \frac{V}{c} \tag{7.22}$$

Cuando este requisito de semejanza se combina con el requisito de semejanza del número de Reynolds (ecuación 7.21) se obtiene

$$\frac{c}{c_m} = \frac{v}{v_m} \frac{\ell_m}{\ell} \tag{7.23}$$

Resulta evidente que el mismo fluido con  $c = c_m$  y  $v = v_m$  no se puede usar en el modelo y en el prototipo, a menos de que la escala de longitud sea la unidad (lo que significa que las pruebas se realizan sobre el prototipo). En aerodinámica a alta velocidad el fluido para el prototipo suele ser aire, y es difícil satisfacer la ecuación 7.23 para escalas de longitud razonables. Así, los modelos con flujos a alta velocidad a menudo son distorsionados con respecto a la semejanza del número de Reynolds, pero se mantiene la semejanza del número de Mach.

### 7.9.3 Flujo con una superficie libre

Los flujos en canales, ríos, vertederos y cuencas de amortización, así como el flujo en torno a barcos son, todos, ejemplos de fenómenos de flujo con una superficie libre. Para esta clase de problemas son importantes las fuerzas gravitacionales e inerciales y, por consiguiente, el número de Froude se vuelve un parámetro de semejanza importante. También, como hay una superficie libre con una interfase líquido-aire, las fuerzas debidas a la tensión superficial pueden ser importantes, y el número de Weber se vuelve otro parámetro de semejanza que requiere consideración junto con el número de Reynolds. Las variables geométricas aún son de importancia evidente. Así, un planteamiento general para problemas de flujo con una superficie libre se puede expresar como

$$\text{Término pi dependiente} = \phi \left( \frac{\ell_i}{\ell}, \frac{\varepsilon}{\ell}, \frac{\rho v \ell}{\mu}, \frac{v}{\sqrt{g \ell}}, \frac{\rho v^2 \ell}{\sigma} \right) \tag{7.24}$$

Como ya se analizó,  $\ell$  es alguna longitud característica del sistema,  $\ell_i$  representa otras longitudes pertinentes y  $\epsilon/\ell$  es la rugosidad relativa de las diversas superficies. Como la gravitación es la fuerza de excitación en estos problemas, la semejanza del número de Froude se requiere definitivamente de modo que

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g \ell}}$$

Se espera que el modelo y el prototipo operen en el mismo campo de gravitación ( $g_m = g$ ) y, en consecuencia, se concluye que

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell} \tag{7.25}$$

Así, cuando los modelos se diseñan con base en la semejanza del número de Froude, la escala de velocidad es determinada por la raíz cuadrada de la escala de longitud. Como se analizó en la sección 7.8.3, para contar de manera simultánea con semejanza del número de Reynolds y del número de Froude es necesario que la escala de viscosidad cinemática esté relacionada con la escala de longitud como

$$\frac{\nu_m}{\nu} = (\lambda_\ell)^{3/2} \tag{7.26}$$

El fluido de trabajo para el prototipo suele ser agua dulce o agua salada, y la escala de longitud es pequeña. En estas circunstancias es virtualmente imposible satisfacer la ecuación 7.26, por lo que los modelos de flujos con una superficie libre suelen ser distorsionados. El problema se complica aún más si se intenta modelar los efectos debidos a la tensión superficial, ya que para esto se requiere igualdad de los números de Weber, lo que conduce a la condición

$$\frac{\sigma_m/\rho_m}{\sigma/\rho} = (\lambda_\ell)^2 \tag{7.27}$$

para la tensión superficial cinemática ( $\sigma/\rho$ ). De nuevo, resulta evidente que no se puede usar el mismo fluido en el modelo y en el prototipo si se ha de tener semejanza con respecto a los efectos debidos a la tensión superficial para  $\lambda_\ell \neq 1$ .

Afortunadamente, en muchos problemas de flujos con una superficie libre los efectos debidos a la tensión superficial y los efectos viscosos son pequeños, por lo que no es necesario ajustarse a la semejanza del número de Weber y del número de Reynolds. Ciertamente, la tensión superficial no es importante en grandes estructuras hidráulicas y ríos. La única preocupación sería si en un modelo las profundidades se reducen al punto en que la tensión superficial se vuelve un factor importante, en tanto no lo es en el prototipo. Esto reviste una importancia particular en el diseño de modelos de ríos, ya que las escalas de longitud suelen ser pequeñas (de modo que el ancho del modelo es razonable), pero con una escala de longitud pequeña la profundidad requerida para el modelo puede ser muy pequeña. A fin de superar este problema, para modelos de ríos a menudo se usan diferentes escalas de longitud verticales y horizontales. Aunque con este método se eliminan los efectos debidos a la tensión superficial en el modelo, se introduce distorsión geométrica que se debe considerar empíricamente, casi siempre incrementando la rugosidad superficial del modelo. En estas circunstancias es importante realizar las pruebas de verificación con el modelo (en caso de ser posible), donde se comparan los datos del modelo con datos disponibles del flujo del río para el prototipo. La rugosidad del modelo se puede ajustar a fin de obtener concordancia satisfactoria entre el modelo y el prototipo, y después es posible usar el modelo para predecir el efecto de los cambios propuestos sobre las características del río (como los patrones de velocidad o elevaciones superficiales).



FIGURA 7.8 Modelo hidráulico a escala (1:197) de la presa Guri en Venezuela, que se usa para simular las características del flujo por arriba y por abajo del vertedero y la erosión por abajo del vertedero. (Fotografía cortesía de St. Anthony Falls Hydraulic Laboratory.)

Para grandes estructuras hidráulicas, como los vertederos de las presas, los números de Reynolds son grandes, de modo que las fuerzas viscosas son pequeñas en comparación con las fuerzas debidas a la gravitación y a la inercia. En este caso no se mantiene la semejanza del número de Reynolds y los modelos se diseñan con base en la semejanza del número de Froude. Se debe tener cuidado a fin de asegurar que los números de Reynolds para el modelo también sean grandes, aunque no se requiere que sean iguales a los del prototipo. Este tipo de modelo hidráulico se hace lo más grande posible, de modo que el número de Reynolds sea grande. En la figura 7.8 se muestra un modelo de vertedero. También, para modelos relativamente grandes las características geométricas del prototipo se pueden modificar a escala con exactitud, así como la rugosidad superficial. Obsérvese que  $\epsilon_m = \lambda \epsilon$ , lo que indica que las superficies del modelo deben ser más lisas que las superficies correspondientes del prototipo para  $\lambda \epsilon < 1$ .

## EJEMPLO 7.8

El vertedero de una presa mide 20 m de ancho y está diseñado para permitir el paso de 125 m<sup>3</sup>/s en la etapa de flujo. Se construye un modelo a escala 1:15 para estudiar las características del flujo a través del vertedero. Determinar el ancho y el caudal requeridos para el modelo. ¿Qué tiempo de operación para el modelo corresponde a un periodo de 24 horas en el prototipo? Se ignoran los efectos debidos a la tensión superficial y a la viscosidad.

### SOLUCIÓN

El ancho,  $w_m$ , del modelo del vertedero se obtiene a partir de la escala de longitud,  $\lambda_\ell$ , de modo que

$$\frac{w_m}{w} = \lambda_\ell = \frac{1}{15}$$

$$w_m = \frac{20 \text{ m}}{15} = 1.33 \text{ m}$$

(Respuesta)

Por supuesto, todas las demás características geométricas (incluyendo la rugosidad superficial) del vertedero se deben modificar a escala en concordancia con la misma escala de longitud.

Al omitir la tensión superficial y la viscosidad, la ecuación 7.24 indica que se logrará semejanza dinámica si los números de Froude son iguales en el modelo y en el prototipo. Así,

$$\frac{V_m}{\sqrt{g_m \ell_m}} = \frac{V}{\sqrt{g \ell}}$$

y para  $g_m = g$

$$\frac{V_m}{V} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}}$$

Como el caudal está definido por  $Q = VA$ , donde  $A$  es un área de sección transversal idónea, se concluye que

$$\frac{Q_m}{Q} = \frac{V_m A_m}{VA} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} \left(\frac{\ell_m}{\ell}\right)^2$$

donde se ha usado la relación  $A_m/A = (\ell_m/\ell)^2$ . Para  $\lambda_\ell = 1/15$  y  $Q = 125 \text{ m}^3/\text{s}$

$$Q_m = \left(\frac{1}{15}\right)^{5/2} (125 \text{ m}^3/\text{s}) = 0.143 \text{ m}^3/\text{s}$$

(Respuesta)

La escala de tiempo se puede obtener a partir de la escala de velocidad, ya que la velocidad es igual a la distancia dividida entre el tiempo ( $V = \ell/t$ ) y, en consecuencia,

$$\frac{V}{V_m} = \frac{\ell}{t} \frac{t_m}{\ell_m}$$

$$\frac{t_m}{t} = \frac{V}{V_m} \frac{\ell_m}{\ell} = \sqrt{\frac{\ell_m}{\ell}} = \sqrt{\lambda_\ell}$$

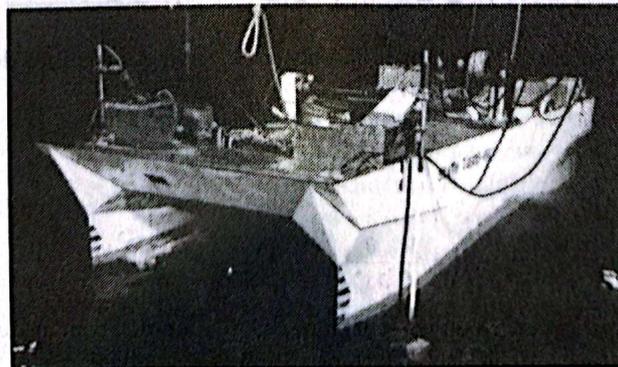
Este resultado indica que los intervalos de tiempo en el modelo serán más pequeños que los intervalos correspondientes en el prototipo si  $\lambda_\ell < 1$ . Para  $\lambda_\ell = 1/15$  y un intervalo de tiempo de 24 horas en el prototipo

$$t_m = \sqrt{\frac{1}{15}} (24 \text{ h}) = 6.20 \text{ h} \quad \text{(Respuesta)}$$

La capacidad para modificar la escala de tiempo puede ser bastante útil, ya que es posible "acelerar" eventos en el modelo que pueden ocurrir en un tiempo relativamente largo en el prototipo.

Desafortunadamente, hay problemas de flujo con una superficie libre en donde las fuerzas viscosas, inerciales y gravitacionales son, todas, importantes. El arrastre sobre un barco que se desplaza en agua se debe a esfuerzos cortantes viscosos que se desarrollan a lo largo del casco, así como a una componente del arrastre inducida por la presión causada tanto por la forma del casco como por la acción del oleaje. El arrastre por esfuerzo cortante es función del número de Reynolds, en tanto que el arrastre debido a la presión es función del número de Froude. Como la semejanza del número de Reynolds y del número de Froude no se puede lograr de manera simultánea usando agua como fluido para el modelo (que es el único fluido práctico para modelos de barcos), es necesario usar alguna otra técnica distinta a la prueba directa sobre el modelo. Un método común consiste en medir el arrastre total sobre un pequeño modelo geoméricamente semejante a medida que es remolcado a través de un recipiente modelo a números de Froude que corresponden a los del prototipo. El arrastre por esfuerzo cortante sobre el modelo se calcula usando técnicas analíticas del tipo descrito en el capítulo 9. Este valor calculado se resta después del arrastre total para obtener el arrastre debido a la presión, y usando la modificación a escala del número de Froude se puede predecir después el arrastre debido a la presión sobre el prototipo. El valor determinado experimentalmente se puede entonces combinar con un valor calculado del arrastre por esfuerzo cortante (usando nuevamente técnicas analíticas) a fin de obtener el arrastre total deseado sobre el barco. Los modelos de barcos se usan bastante para estudiar nuevos diseños, aunque para realizar las pruebas se requieren instalaciones bastante amplias (ver la figura 7.9).

Con base en el breve análisis anterior de varios tipos de modelos de flujos con una superficie libre resulta evidente que el diseño y uso de esos modelos requiere bastante ingenio, así como una comprensión aceptable de los fenómenos físicos presentes. Lo anterior es cierto para casi todos los estudios de modelos. El modelado es un arte y una ciencia. Los productores de películas usan bastante los modelos de barcos, incendios, explosiones y eventos semejantes. Es interesante tratar de observar las diferencias de flujo entre estos flujos de modelos distorsionados y el suceso real.



**FIGURA 7.9** Modelo instrumentado de un catamarán de área pequeña en el plano del agua suspendido de un remolcador. (Fotografía cortesía del David W. Taylor Research Center de la Marina de Estados Unidos de América.)

### 7.10 Similitud basada en ecuaciones diferenciales rectoras

En las secciones precedentes de este capítulo se usó el análisis dimensional para obtener leyes de semejanza. Éste es un método simple y directo de amplio uso para efectuar el modelado. El empleo del análisis dimensional requiere sólo el conocimiento de las variables que afectan el fenómeno de interés. Aunque la sencillez de este método es atractiva, es necesario aceptar que la omisión de una o más variables importantes puede conducir a graves errores en el diseño del modelo. Se cuenta con otro método si se conocen las ecuaciones (casi siempre ecuaciones diferenciales) rectoras del fenómeno. En esta situación, a partir de las ecuaciones rectoras es posible obtener leyes de semejanza, aun cuando quizá no sea posible obtener soluciones analíticas de las ecuaciones.

Para ilustrar el procedimiento, considérese el flujo de un fluido newtoniano incompresible. Para simplificar la situación, la atención se centrará en flujo bidimensional, aunque los resultados son aplicables al caso tridimensional general. Por el capítulo 6 se sabe que las ecuaciones rectoras son la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{7.28}$$

y las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{7.29}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \tag{7.30}$$

donde el eje  $y$  es vertical, de modo que la fuerza de gravitación del cuerpo,  $\rho g$ , sólo aparece en la "ecuación  $y$ ". Para continuar con la descripción matemática del problema es necesario especificar condiciones en la frontera. Por ejemplo, se pueden especificar las velocidades en todas las fronteras; es decir,  $u = u_B$  y  $v = v_B$  en todos los puntos límite  $x = x_B$  y  $y = y_B$ . En algunos tipos de problemas puede ser necesario especificar la presión sobre una porción de la frontera. Para problemas que dependen del tiempo también es necesario proporcionar las condiciones iniciales, lo que significa que se deben proporcionar los valores de todas las variables dependientes en algún instante (que se toma como  $t = 0$ ).

Una vez que se conocen las ecuaciones rectoras, incluyendo las condiciones en la frontera e iniciales, ya es posible proceder al desarrollo de los requisitos de semejanza. El paso siguiente es definir un nuevo conjunto de variables adimensionales. Para lograr lo anterior se elige una cantidad de referencia para cada tipo de variable. En este problema, las variables son  $u, v, p, x, y$  y  $t$ , de modo que se requieren una velocidad de referencia,  $V$ , una presión de referencia,  $p_0$ , una longitud de referencia,  $\ell$ , y un tiempo de referencia,  $\tau$ . Estas cantidades de referencia deben ser parámetros que aparecen en el problema. Por ejemplo,  $\ell$  podría ser una longitud característica de un cuerpo inmerso en un fluido o el ancho de un canal por el que circula el fluido. La velocidad,  $V$ , podría ser la velocidad de corriente libre o la velocidad de entrada. Las nuevas variables adimensionales (identificadas con un asterisco) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{V} & v^* &= \frac{v}{V} & p^* &= \frac{p}{p_0} \\ x^* &= \frac{x}{\ell} & y^* &= \frac{y}{\ell} & t^* &= \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

Las ecuaciones rectoras se pueden ahora volver a escribir en términos de estas nuevas variables. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V u^*}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{V}{\ell} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{V}{\ell} \frac{\partial}{\partial x^*} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right) \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{V}{\ell^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}}$$

Los demás términos que aparecen en las ecuaciones se pueden determinar de manera semejante. Así, en términos de las nuevas variables las ecuaciones rectoras se vuelven

El nivel de presión real se tiene interés en la cavitación. En caso contrario, los términos de la ecuación (7.31) se pueden dividir entre la cantidad  $\rho V^2 / \ell$ , que es el índice de la fuerza inercial convectiva. Así, la forma final adimensional se vuelve

$$\left[ \frac{\rho V}{\tau} \right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \left[ \frac{\rho V^2}{\ell} \right] \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = - \left[ \frac{p_0}{\ell} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[ \frac{\mu V}{\ell^2} \right] \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (7.32)$$

Los términos entre corchetes contienen las cantidades de referencia y se pueden interpretar como índices de las diversas fuerzas (por unidad de volumen) en cuestión. Así, como se indica en la ecuación 7.33,  $F_I$  = fuerza (local) de inercia,  $F_{IC}$  = fuerza (convectiva) de inercia,  $F_P$  = fuerza de presión,  $F_G$  = fuerza de gravitación y  $F_V$  = fuerza viscosa. Como paso final del proceso de adimensionalización, cada término de las ecuaciones 7.32 y 7.33 se divide entre una de las cantidades entre corchetes. Aunque se puede usar cualquiera de estas cantidades, se acostumbra dividir entre la cantidad  $\rho V^2 / \ell$ , que es el índice de la fuerza inercial convectiva. Así, la forma final adimensional se vuelve

$$\left[ \frac{\ell}{\tau V} \right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \left[ \frac{p_0}{\rho V^2} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[ \frac{\mu}{\rho V \ell} \right] \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (7.34)$$

$$\left[ \frac{\ell}{\tau V} \right] \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \left[ \frac{p_0}{\rho V^2} \right] \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left[ \frac{g \ell}{V^2} \right] + \left[ \frac{\mu}{\rho V \ell} \right] \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \quad (7.35)$$

Se observa que los términos entre corchetes son los grupos adimensionales normales (o sus recíprocos) que se obtuvieron a partir del análisis dimensional; es decir,  $\ell / \tau V$  es una forma del número de Strouhal,  $p_0 / \rho V^2$  es el número de Euler,  $g \ell / V^2$  es el recíproco del cuadrado del número de Froude y  $\mu / \rho V \ell$  es el recíproco del número de Reynolds. Con base en este análisis ahora resulta evidente cómo cada uno de los grupos adimensionales se puede interpretar como la razón de dos fuerzas y cómo estos grupos surgen de manera natural a partir de las ecuaciones rectoras.

Aunque en realidad no se ha avanzado en el sentido de obtener una solución analítica para estas ecuaciones (aún son complicadas y no son responsables de ninguna solución analítica), las formas adimensionales de las ecuaciones 7.31, 7.34 y 7.35 se pueden usar para establecer requisitos de semejanza. A partir de estas ecuaciones se concluye que si dos sistemas están regidos por estas ecuaciones, entonces las soluciones (en términos de  $u^*, v^*, p^*, x^*, y^*$  y  $t^*$ ) serán las mismas si los cuatro parámetros  $\ell / \tau V$ ,  $p_0 / \rho V^2$ ,  $V^2 / g \ell$  y  $\rho V \ell / \mu$  son iguales para los dos sistemas. Los dos sistemas serán dinámicamente semejantes. Por supuesto, las condiciones en la frontera e iniciales expresadas en forma adimensional también deben ser las mismas para los dos sistemas, y este hecho requiere semejanza geométrica completa. Estos requisitos de semejanza son los mismos que se determinarían mediante un análisis dimensional en caso de que se considerasen las mismas variables. Sin embargo, la ventaja de trabajar con las ecuaciones rectoras es que las variables aparecen de manera natural en las ecuaciones y no es necesario preocuparse por omitir una importante, en el supuesto de que las ecuaciones rectoras están correctamente especificadas. Así, es posible usar este método para deducir las condiciones en que dos soluciones son semejantes aun cuando una de las soluciones tenga más probabilidad de obtenerse experimentalmente.

En el análisis anterior se ha considerado un caso general en que el flujo puede ser inestable y sean importantes tanto el nivel de presión real,  $p_0$ , como el efecto de la gravitación. Si una o más de estas condiciones se elimina, es posible obtener una reducción en el número de requisitos de semejanza. Por ejemplo, si el flujo es estable, se puede eliminar el grupo adimensional  $\ell / \tau V$ .

El nivel de presión real sólo es importante si se tiene interés en la cavitación. En caso contrario, los patrones de flujo y las diferencias de presión no dependen del nivel de presión. En este caso,  $p_0$  se puede tomar como  $\rho V^2$  (o como  $1/2 \rho V^2$ ) y se puede eliminar el número de Euler como requisito de semejanza. Sin embargo, si se tiene interés en la cavitación (que ocurre en el campo de flujo si la presión en ciertos puntos alcanza el valor de la presión de vapor,  $p_v$ ), entonces el nivel de presión real es importante. Casi siempre, en este caso la presión característica,  $p_0$ , se define con respecto a la presión de vapor de modo que  $p_0 = p_r - p_v$ , donde  $p_r$  es alguna presión de referencia dentro del campo de flujo. Con  $p_0$  definida de esta manera, el parámetro de semejanza  $p_0 / \rho V^2$  se vuelve  $(p_r - p_v) / \rho V^2$ . Este parámetro a menudo se escribe como  $(p_r - p_v) / (1/2) \rho V^2$ , y en esta forma, como se observó en la sección 7.6, se denomina número de cavitación. Así, se puede concluir que si no se tiene interés en la cavitación, no se requiere un parámetro de semejanza que implique a  $p_0$ , pero si se debe modelar la cavitación, entonces el número de cavitación se vuelve un parámetro de semejanza importante.

El número de Froude, que surge debido a la inclusión de la gravitación, es importante para problemas en los que hay una superficie libre. Algunos ejemplos de este tipo de problemas son el estudio de ríos, el flujo a través de estructuras hidráulicas como vertederos y el arrastre sobre barcos. En estas situaciones la forma de la superficie libre es afectada por la fuerza de gravitación y, en consecuencia, el número de Froude se vuelve un parámetro de semejanza importante. Sin embargo, si no hay superficies libres, el único efecto de la gravitación es sobreponer una distribución de presión hidrostática sobre la distribución de presión creada por el movimiento del fluido. La distribución hidrostática se puede eliminar de la ecuación rectora (ecuación 7.30) definiendo una nueva presión,  $p' = p - \rho gy$ , y con este cambio el número de Froude no aparece en las ecuaciones rectoras adimensionales.

Con base en este análisis se concluye que para el flujo estable de un fluido incompresible sin superficies libres, las semejanzas dinámica y cinemática se logran si (para sistemas geoméricamente semejantes) existe semejanza del número de Reynolds. Si están incluidas superficies libres, también se debe mantener semejanza del número de Froude. Para flujos con superficies libres se supuso tácitamente que la tensión superficial no es importante. Sin embargo, se encuentra que si se incluye la tensión superficial, su efecto aparece en la condición en la frontera de la superficie libre, y el número de Weber,  $\rho V^2 \ell / \sigma$ , se vuelve un parámetro de semejanza adicional. Además, si se consideran las ecuaciones rectoras para fluidos compresibles, el número de Mach,  $V / c$ , aparece como un parámetro más de semejanza.

Resulta evidente que todos los grupos adimensionales comunes previamente obtenidos mediante el empleo del análisis dimensional aparecen en las ecuaciones rectoras que describen el movimiento de fluidos cuando estas ecuaciones se expresan en términos de variables adimensionales. Así, el uso de ecuaciones rectoras para obtener leyes de semejanza constituye una opción para el análisis dimensional.

Este método posee la ventaja de que se conocen las variables y las hipótesis en cuestión están claramente identificadas. Además, a menudo se puede obtener una interpretación física de los diversos grupos adimensionales.

## Bibliografía

1. Bridgman, P. W., *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, Conn.
2. Murphy, G., *Similitude in Engineering*, Ronald Press, New York.
3. Langhaar, H. L., *Dimensional Analysis and Theory of Models*, Wiley, New York.
4. Huntley, H. E., *Dimensional Analysis*, Macdonald, London.
5. Duncan, W. J., *Physical Similarity and Dimensional Analysis: An Elementary Treatise*, Edward Arnold, London.
6. Sedov, K. I., *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York.
7. Ipsen, D. C., *Units, Dimensions, and Dimensionless Numbers*, McGraw-Hill, New York.
8. Kline, S. J., *Similitude and Approximation Theory*, McGraw-Hill, New York.
9. Skoglund, V. J., *Similitude-Theory and Applications*, International Texbooh, Scranton, Pa.

10. Baker, W. E., Westline, P. S., y Dodge, F. T., *Similarity Methods in Engineering Dynamics-Theory and Practice of Scale Modeling*, Hayden (Spartan Books), Rochelle Park, N.J.
11. Taylor, E. S., *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, Oxford.
12. Issacson, E. De St. Q., y Issacson, M. de St. Q., *Dimensional Methods in Engineering and Physics*, Wiley, New York.
13. Schuring, D. J., *Scale Models in Engineering*, Pergamon Press, New York.
14. Yalin, M. S., *Theory of Hydraulic Models*, Macmillan, London.
15. Sharp, J. J., *Hydraulic Modeling*, Butterworth, London.
16. Schlichting, H., *Boundary-Layer Theory*, Seventh Ed., McGraw-Hill, New York.
17. Knapp, R. T., Daily, J. W., y Hammitt, F. G., *Cavitation*, McGraw-Hill, New York.

## Problemas

**Nota:** A menos que se indique lo contrario, utilice los valores de las propiedades del fluido de las tablas que aparecen al inicio del libro. Los problemas identificados con un asterisco (\*) se deben resolver con ayuda de una calculadora programable o una computadora. Los problemas indicados con una cruz (†) son problemas de "respuesta abierta" que requieren un razonamiento crítico en el sentido de que para resolverlos es necesario efectuar varias hipótesis y proporcionar los datos necesarios. Estos problemas no tienen una respuesta única.

7.1 El número de Reynolds,  $\rho V D / \mu$ , es un parámetro muy importante en mecánica de fluidos. Usando los sistemas FLT y MLT de dimensiones básicas, comprobar que el número de Reynolds es adimensional y determinar su valor para agua (a 70 °C) que fluye a una velocidad de 2 m/s a través de una tubería cuyo diámetro mide 1 pulgada.

7.2 ¿Cuáles son las dimensiones de densidad, presión, peso específico, tensión superficial y viscosidad dinámica en a) el sistema FLT y b) el sistema MLT? Comparar los resultados con los que se proporcionaron en la tabla 1.1 de capítulo 1.

7.3 Por una superficie aerodinámica cuya cuerda tiene una longitud,  $b$ , de 6 pies circula aire normal a una velocidad  $V$ . a) Determinar el número de Reynolds,  $\rho V b / \mu$ , para  $V = 150$  mph. b) Si esta superficie aerodinámica se sujeta a un avión que vuela a velocidad constante en una atmósfera normal y altitud de 10 000 pies, ¿cuál es el valor del número de Reynolds?

7.4 Algunas variables comunes en mecánica de fluidos son: caudal,  $Q$ , aceleración de la gravitación,  $g$ , viscosidad,  $\mu$ , densidad,  $\rho$ , y longitud,  $l$ . ¿Cuáles de las siguientes combinaciones de estas variables son adimensionales? a)  $Q^2 / g l^2$ , b)  $\rho Q / \mu l$ , c)  $g l^2 / Q$ , d)  $\rho Q l / \mu$ .

7.5 Para el flujo de una delgada película de un líquido con una profundidad  $h$  y una superficie libre, dos parámetros adimensionales importantes son el número de Froude,  $V / \sqrt{gh}$ , y el número de Weber,  $\rho V^2 h / \sigma$ . Determinar el valor de estos dos parámetros para glicerina (a 20 °C) que fluye a una velocidad de 0.5 m/s a una profundidad de 2 mm.

7.6 El número de Mach para un cuerpo que se mueve a través de un fluido a una velocidad  $V$  se define como  $V/c$ , donde  $c$  es la velocidad

del sonido en el fluido. Este parámetro adimensional se considera importante en problemas de dinámica de fluidos cuando su valor es superior a 0.3. ¿Cuál sería la velocidad de un cuerpo a un número de Mach de 0.3 si el fluido es a) aire a presión atmosférica normal y 20 °C y b) agua a la misma temperatura y presión?

7.7 En una contracción repentina en una tubería el diámetro cambia de  $D_1$  a  $D_2$ . La caída de presión,  $\Delta p$ , que se crea a través de la contracción es función de  $D_1$  y  $D_2$ , así como de la velocidad,  $V$ , en el tubo más ancho, la densidad,  $\rho$ , y la viscosidad,  $\mu$ , del fluido. Usando  $D_1$ ,  $V$  y  $\mu$  como variables repetidas, determinar un conjunto apropiado de parámetros adimensionales. ¿Por qué sería incorrecto incluir como variable adicional la velocidad en el tubo más estrecho?

7.8 Supóngase que la potencia,  $\mathcal{P}$ , necesaria para accionar un ventilador es función del diámetro del ventilador,  $D$ , la densidad del fluido  $\rho$ , la velocidad rotacional,  $\omega$ , y el caudal,  $Q$ . Usando  $D$ ,  $\omega$  y  $\rho$  como variables repetidas, determinar un conjunto apropiado de términos pi.

7.9 Supóngase que el caudal,  $Q$ , de un gas que sale de una chimenea es función de la densidad del aire ambiente,  $\rho_a$ , la densidad del gas dentro de la chimenea,  $\rho_g$ , la aceleración de la gravitación,  $g$ , y la altura y diámetro de la chimenea,  $h$  y  $d$ , respectivamente. Usando  $\rho_a$ ,  $d$  y  $g$  como variables repetidas, obtener un conjunto de términos pi que pueda usarse para describir este problema.

7.10 Sobre una presa fluye agua como se ilustra en la figura P7.10. Supóngase que el caudal,  $q$ , por unidad de longitud a lo largo de la

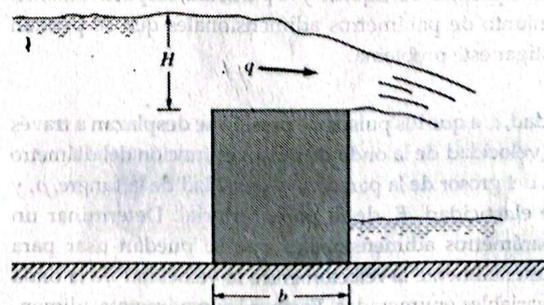


FIGURA P7.10

presa depende de la carga,  $H$ , el ancho,  $b$ , la aceleración de la gravitación,  $g$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , y la viscosidad del fluido,  $\mu$ . Desarrollar un conjunto apropiado de parámetros adimensionales para este problema, usando a  $b$ ,  $g$  y  $\rho$  como variables repetidas.

7.11 El aumento de presión,  $\Delta p$ , a través de una bomba se puede expresar como

$$\Delta p = f(D, \rho, \omega, Q)$$

donde  $D$  es el diámetro del propulsor,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\omega$  es la velocidad rotacional y  $Q$  es el caudal. Determinar un conjunto apropiado de parámetros adimensionales.

7.12 El arrastre,  $\mathcal{D}$ , sobre una placa en forma de arandela colocada normal a una corriente de fluido se puede expresar como

$$\mathcal{D} = f(d_1, d_2, V, \mu, \rho)$$

donde  $d_1$  es el diámetro externo,  $d_2$  es el diámetro interno,  $V$  es la velocidad del fluido,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $\rho$  es la densidad del fluido. Se pretende realizar algunos experimentos en un túnel de aire para determinar el arrastre. ¿Qué parámetros adimensionales usaría el lector para organizar estos datos?

7.13 Un delgado alambre elástico se coloca entre soportes rígidos. Por el alambre circula un fluido y se desea estudiar la desviación estática,  $\delta$ , en el centro del alambre debido al arrastre del fluido. Supóngase que

$$\delta = f(\ell, d, \rho, \mu, V, E)$$

donde  $\ell$  es la longitud del alambre,  $d$  es el diámetro del alambre,  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $V$  es la velocidad del fluido y  $E$  es el módulo de elasticidad del material del alambre. Obtener un conjunto apropiado de términos pi para este problema.

7.14 Un fluido circula a una velocidad  $V$  a través de una tubería horizontal de diámetro  $D$ . En el tubo se coloca una placa que tiene un orificio de diámetro  $d$ . Se desea investigar la caída de presión,  $\Delta p$ , a través de la placa. Supóngase que

$$\Delta p = f(D, d, \rho, V)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido. Obtener un conjunto apropiado de términos pi.

7.15 La velocidad,  $V$ , de una partícula que cae lentamente en un líquido viscoso se puede expresar como

$$V = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$$

donde  $d$  es el diámetro de la partícula,  $\mu$  es la viscosidad del líquido y  $\gamma$  y  $\gamma_s$  son el peso específico del líquido y la partícula, respectivamente. Obtener un conjunto de parámetros adimensionales que se puedan usar para investigar este problema.

7.16 La velocidad,  $c$ , a que los pulsos de presión se desplazan a través de las arterias (velocidad de la onda de pulso) es función del diámetro de la arteria,  $D$ , del grosor de la pared,  $h$ , la densidad de la sangre,  $\rho$ , y del módulo de elasticidad,  $E$ , de la pared arterial. Determinar un conjunto de parámetros adimensionales que se puedan usar para estudiar experimentalmente la relación entre la velocidad de la onda de pulso y las variables enumeradas. Formar los parámetros adimensionales por inspección.

7.17 Un fluido viscoso se vierte sobre una placa horizontal como se muestra en la figura P7.17. Supóngase que el tiempo,  $t$ , necesario para que el fluido recorra cierta distancia,  $d$ , a lo largo de la placa es función del volumen del fluido vertido,  $\mathcal{V}$ , la aceleración de la gravitación,  $g$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , y la viscosidad del fluido,  $\mu$ . Determinar un conjunto apropiado de términos pi para describir este proceso. Formar los términos pi por inspección.

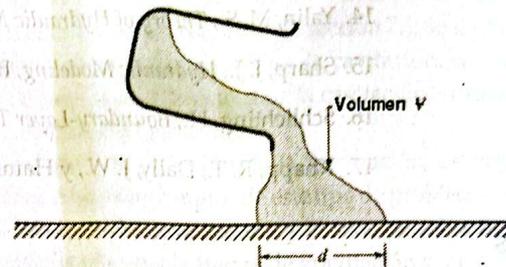


FIGURA P7.17

7.18 Supóngase que el arrastre,  $\mathcal{D}$ , sobre un avión que vuela a velocidades supersónicas es función de su velocidad,  $V$ , la densidad del fluido,  $\rho$ , la velocidad del sonido,  $c$ , y de una serie de longitudes,  $\ell_1, \dots, \ell_n$ , que describen la geometría del avión. Determinar un conjunto de términos pi que se puedan usar para investigar experimentalmente cómo el arrastre es afectado por los diversos factores enumerados. Formar los términos pi por inspección.

7.19 Un viscosímetro de cono y placa consta de un cono con un ángulo muy pequeño  $\alpha$  que gira por arriba de una superficie plana como se muestra en la figura P7.19. La torca,  $\mathcal{S}$ , necesaria para hacer girar el cono a una velocidad angular,  $\omega$ , es función del radio,  $R$ , el ángulo del cono,  $\alpha$ , y la viscosidad del fluido,  $\mu$ , además de  $\omega$ . Con auxilio del análisis dimensional, determinar cómo cambia la torca si se duplican la viscosidad y la velocidad angular.

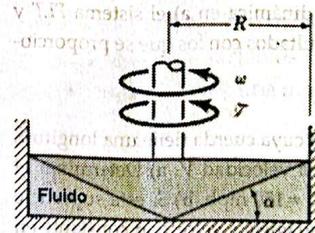


FIGURA P7.19

7.20 La caída de presión,  $\Delta p$ , a lo largo de una tubería recto de diámetro  $D$  se ha estudiado experimentalmente y se ha observado que para flujo laminar de un fluido y una tubería dados, la caída de presión varía directamente con la distancia,  $\ell$  que hay entre los tapones de presión. Supóngase que  $\Delta p$  es función de  $D$  y  $\ell$ , la velocidad,  $V$ , y la viscosidad del fluido,  $\mu$ . Usando análisis dimensional, deducir cómo varía la caída de presión con el diámetro de la tubería.

7.21 Un tipo de viscosímetro consta de un depósito abierto con una tubería de diámetro pequeño en el fondo, como se ilustra en la figura P7.21. Para medir la viscosidad, el sistema se llena con el líquido de interés y se determina el tiempo necesario para que el nivel del líquido descienda de  $H_1$  a  $H_2$ . Usando análisis dimensional, obtener una relación entre la viscosidad,  $\mu$ , y el tiempo de drenado,  $\tau$ . Supóngase que las

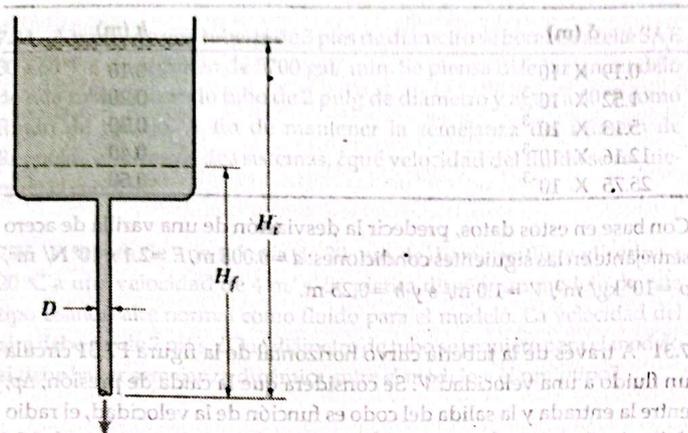


FIGURA P7.21

otras variables en cuestión son la carga inicial,  $H_1$ , la carga final,  $H_2$ , el diámetro de la tubería,  $D$  y el peso específico del líquido,  $\gamma$ .

7.22 La fuerza de empuje,  $F_b$ , que actúa sobre un cuerpo sumergido en un fluido es función del peso específico del fluido,  $\gamma$ , y del volumen del cuerpo,  $\mathcal{V}$ . Demostrar, por medio de análisis dimensional, que la fuerza de empuje debe ser directamente proporcional al peso específico.

7.23 Cuando una esfera de diámetro  $d$  cae lentamente en un fluido altamente viscoso, se sabe que la velocidad de asentamiento,  $V$ , es función de  $d$ , la viscosidad del fluido,  $\mu$ , y la diferencia  $\Delta\gamma$ , entre el peso específico de la esfera y el peso específico del fluido. Debido a que se cuenta con poco presupuesto, sólo fue posible realizar un experimento, en el que se obtuvieron los siguientes datos:  $V = 0.42$  pies/s para  $d = 0.1$  pulg,  $\mu = 0.03$  lb-s/ pie<sup>2</sup> y  $\Delta\gamma = 10$  lb/ pie<sup>3</sup>. En caso de ser posible, con base en esta reducida cantidad de datos, determinar la ecuación general para la velocidad de asentamiento. En caso de considerar que no es posible, indicar qué datos adicionales se requieren.

7.24 La altura,  $h$ , que asciende un líquido en una tubería capilar es función del diámetro de la tubería,  $D$ , el peso específico del líquido,  $\gamma$ , y la tensión superficial,  $\sigma$ . Realizar un análisis dimensional usando los dos sistemas FLT y MLT de dimensiones básicas. Nota: Es evidente que los resultados deben ser los mismos, sin importar el sistema de dimensiones que se use. Si el análisis indica otra cosa, regresarse y comprobar el trabajo prestando especial atención al número necesario de dimensiones de referencia.

7.25 La velocidad del sonido en un gas,  $c$ , es función de la presión del gas,  $p$ , y de la densidad,  $\rho$ . Determinar, por medio del análisis dimensional, cómo está relacionada la velocidad con la presión y la densidad. Tener cuidado al decidir sobre cuántas dimensiones de referencia se requieren.

\*7.26 La caída de presión a través de un corto tapón hueco colocado en una tubería circular a través del que circula un fluido (ver la figura P7.26) se puede expresar como

$$\Delta p = f(\rho, V, D, d)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $V$  es la velocidad media en el tubo. En la tabla que se presenta a continuación se muestran algunos datos

experimentales obtenidos con  $D = 0.2$  pies,  $\rho = 2.0$  slugs/ pie<sup>3</sup> y  $V = 2$  pies/s:

| $d$ (pies)                         | 0.06  | 0.08  | 0.10 | 0.15 |
|------------------------------------|-------|-------|------|------|
| $\Delta p$ (lb/ pie <sup>2</sup> ) | 493.8 | 156.2 | 64.0 | 12.6 |

Usando parámetros adimensionales apropiados, graficar en papel logarítmico los resultados de estas pruebas. Usando una técnica normal de ajuste de curvas, determinar una ecuación general para  $\Delta p$ . ¿Cuáles son los límites de aplicabilidad de la ecuación?

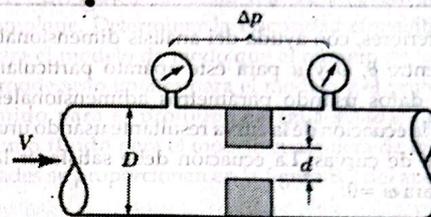


FIGURA P7.26

7.27 Un líquido fluye a una velocidad  $V$  a través de un orificio en uno de los lados de un depósito. Supóngase que

$$V = f(h, g, \rho, \sigma)$$

donde  $h$  es la profundidad del fluido por arriba del orificio,  $g$  es la aceleración de la gravitación,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\sigma$  es la tensión superficial. Los datos siguientes se obtuvieron cambiando  $h$  y midiendo  $V$ , con un fluido de densidad  $= 10^3$  kg/ m<sup>3</sup> y tensión superficial  $= 0.074$  N/ m.

| $V$ (m/ s) | 3.13 | 4.43 | 5.42 | 6.25 | 7.00 |
|------------|------|------|------|------|------|
| $h$ (m)    | 0.50 | 1.00 | 1.50 | 2.00 | 2.50 |

Graficar estos datos usando variables adimensionales idóneas. ¿Es posible omitir cualquiera de las variables originales?

\*7.28 El dispositivo cilíndrico concéntrico como el que se muestra en la figura P7.28 se usa para medir la viscosidad,  $\mu$ , de líquidos relacionando el ángulo de giro del cilindro interior,  $\theta$ , con la velocidad angular del cilindro exterior,  $\omega$ . Supóngase que

$$\theta = f(\omega, \mu, K, D_1, D_2, \ell)$$

donde  $K$  depende de las propiedades del alambre de suspensión y tiene las dimensiones FL. Los datos siguientes se obtuvieron en una serie de

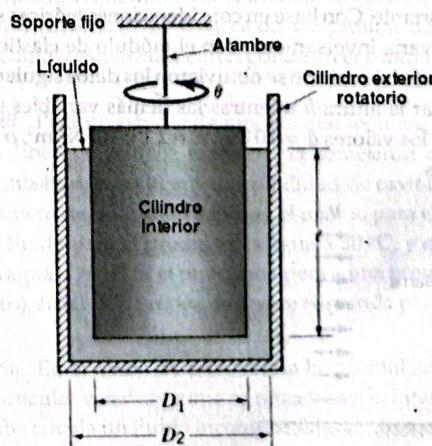


FIGURA P7.28

pruebas para las cuales  $\mu = 0.01 \text{ lb}\cdot\text{s}/\text{pie}^2$ ,  $K = 10 \text{ lb}\cdot\text{pie}$ ,  $\ell = 1 \text{ pie}$  y  $D_1$  y  $D_2$  son constantes.

| $\theta$ (rad) | $\omega$ (rad/s) |
|----------------|------------------|
| 0.89           | 0.30             |
| 1.50           | 0.50             |
| 2.51           | 0.82             |
| 3.05           | 1.05             |
| 4.28           | 1.43             |
| 5.52           | 1.86             |
| 6.40           | 2.14             |

A partir de los datos anteriores, con ayuda del análisis dimensional, determinar la relación entre  $\theta$ ,  $\omega$  y  $\mu$  para este aparato particular. *Sugerencia:* Graficar los datos usando parámetros adimensionales apropiados y determinar la ecuación de la curva resultante usando una técnica normal de ajuste de curvas. La ecuación debe satisfacer la condición de que  $\theta = 0$  para  $\omega = 0$ .

7.29 La caída de presión por unidad de longitud,  $\Delta p$ , para el torrente sanguíneo que circula por una tubería horizontal de diámetro pequeño es función del caudal,  $Q$ , del diámetro,  $D$ , y de la viscosidad de la sangre,  $\mu$ . Para una serie de pruebas en las que  $D = 2 \text{ mm}$  y  $\mu = 0.004 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$  se obtuvieron los siguientes datos, donde el  $\Delta p$  enumerado se midió sobre la longitud  $\ell = 300 \text{ mm}$ .

| $Q$ ( $\text{m}^3/\text{s}$ ) | $\Delta p$ ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| $3.6 \times 10^{-6}$          | $1.1 \times 10^4$                    |
| $4.9 \times 10^{-6}$          | $1.5 \times 10^4$                    |
| $6.3 \times 10^{-6}$          | $1.9 \times 10^4$                    |
| $7.9 \times 10^{-6}$          | $2.4 \times 10^4$                    |
| $9.8 \times 10^{-6}$          | $3.0 \times 10^4$                    |

Realizar un análisis dimensional para este problema y usando los datos proporcionados, determinar una relación general entre  $\Delta p$ ,  $Q$  (que sea válida para otros valores de  $D$ ,  $\ell$  y  $\mu$ ).

\*7.30 Una varilla de acero rectangular está rígidamente sujeta al piso de un canal por el que circula un fluido a velocidad  $V$ , como se muestra en la figura P7.30. Debido a la fuerza del fluido en movimiento, la punta de la varilla se desvía una distancia  $\delta$ . Supóngase que  $\delta$  es función de la altura,  $h$ , del grosor,  $d$ , del módulo de elasticidad,  $E$ , y de la energía cinética,  $\rho V^2$ , del fluido en movimiento. (Obsérvese que la energía cinética se puede tratar como una sola variable.) El ancho de la placa no es una variable importante. Con base en consideraciones teóricas se sabe que la desviación varía inversamente con el módulo de elasticidad. En un experimento de laboratorio se obtuvieron los datos siguientes cuando se hizo variar la altura  $h$  mientras las demás variables se mantenían constantes a los valores  $d = 0.01 \text{ m}$ ,  $E = 2.1 \times 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$  y  $V = 2.0 \text{ m}/\text{s}$ .

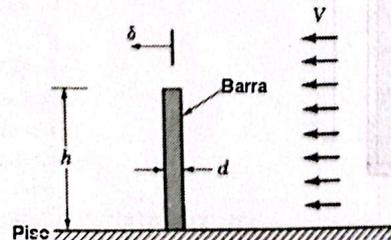


FIGURA P7.30

| $\delta$ (m)           | $h$ (m) |
|------------------------|---------|
| $0.19 \times 10^{-3}$  | 0.10    |
| $1.52 \times 10^{-3}$  | 0.20    |
| $5.13 \times 10^{-3}$  | 0.30    |
| $12.16 \times 10^{-3}$ | 0.40    |
| $25.75 \times 10^{-3}$ | 0.50    |

Con base en estos datos, predecir la desviación de una varilla de acero semejante en las siguientes condiciones:  $d = 0.008 \text{ m}$ ,  $E = 2.1 \times 10^9 \text{ N}/\text{m}^2$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg}/\text{m}^3$ ,  $V = 1.0 \text{ m}/\text{s}$  y  $h = 0.25 \text{ m}$ .

7.31 A través de la tubería curvo horizontal de la figura P7.31 circula un fluido a una velocidad  $V$ . Se considera que la caída de presión,  $\Delta p$ , entre la entrada y la salida del codo es función de la velocidad, el radio del codo,  $R$ , el diámetro de la tubería,  $D$ , y la densidad del fluido,  $\rho$ . Los datos mostrados en la tabla siguiente se obtuvieron en el laboratorio. Para estas pruebas  $\rho = 2.0 \text{ slugs}/\text{pie}^3$ ,  $R = 0.5 \text{ pies}$  y  $D = 0.1 \text{ pies}$ . Realizar un análisis dimensional y con base en los datos proporcionados, determinar si las variables usadas para este problema son correctas. Explicar cómo se llegó a la respuesta.

| $V$ (pies/s)                      | 2.1 | 3.0 | 3.9 | 5.1 |
|-----------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| $\Delta p$ (lb/pie <sup>2</sup> ) | 1.2 | 1.8 | 6.0 | 6.5 |

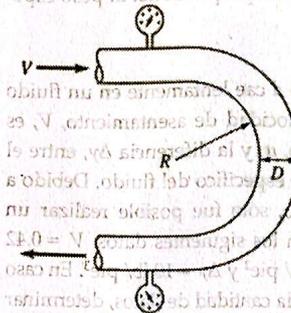


FIGURA P7.31

7.32 El caudal,  $Q$ , en un canal abierto se puede medir colocando una placa con una ranura en forma de V a través del canal como se ilustra en la figura P7.32. Este tipo de dispositivo se denomina *vertedero* en V. Para determinar  $Q$  se puede usar la altura,  $H$ , del líquido por arriba de la cresta. Supóngase que

$$Q = f(H, g, \theta)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravitación. ¿Cuáles son los parámetros adimensionales importantes para este problema?

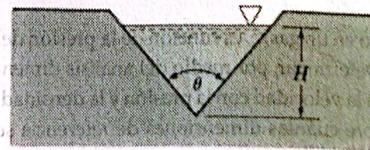


FIGURA P7.32

7.33 Con base en consideraciones teóricas se sabe que para el vertedero en V descrito en el problema 7.32, el caudal,  $Q$ , es directamente proporcional a  $\tan \theta/2$ . Experimentalmente se determinó que para  $\theta = 90^\circ$  y  $H = 0.3 \text{ m}$ ,  $Q = 0.068 \text{ m}^3/\text{s}$ . Con base en estos datos limitados, determinar una ecuación general para el caudal a través de un vertedero en V.

- 7.34 A través de una tubería de 3 pies de diámetro se bombea aceite SAE 30 a 60 °F a un régimen de 5700 gal/ min. Se piensa diseñar un modelo de esta tubería usando tubo de 2 pulg de diámetro y agua a 60 °F como fluido de trabajo. A fin de mantener la semejanza del número de Reynolds entre estos dos sistemas, ¿qué velocidad del fluido se requiere en el modelo?
- 7.35 A través de una tubería de 30 mm de diámetro fluye glicerina a 20 °C a una velocidad de 4 m/ s. Se piensa diseñar un modelo de este tipo usando aire normal como fluido para el modelo. La velocidad del aire debe ser de 2 m/ s. ¿Qué diámetro de tubo se requiere para el modelo si debe haber semejanza dinámica entre el modelo y el prototipo?
- 7.36 Las características de arrastre de un torpedo se piensan estudiar en un túnel de aire usando un modelo a escala 1:5. El túnel opera con agua dulce a 20 °C, en tanto que el torpedo prototipo se debe usar en agua salada a 15.6 °C. A fin de simular correctamente el comportamiento del prototipo moviéndose a una velocidad de 30 m/ s, ¿qué velocidad se requiere en el túnel de agua?
- 7.37 El diseño de un modelo de río estará basado en la semejanza del número de Froude, y una profundidad del río de 3 m debe corresponder a una profundidad del modelo de 100 m. En estas condiciones, ¿cuál es la velocidad para el prototipo correspondiente a una velocidad de 2 m/ s para el modelo?
- 7.38 Para un problema de flujo de fluidos, se sabe que tanto el número de Froude como el número de Weber son parámetros adimensionales importantes. Si el problema se estudiara usando un modelo a escala 1:15, determinar la escala de tensión superficial requerida si la escala de densidad es igual a 1. El modelo y el prototipo operan en el mismo campo de gravitación.
- 7.39 Las características de dinámica de fluidos de un avión que vuela a 240 mph a 10 000 pies se investigarán con auxilio de un modelo a escala 1:20. Si las pruebas en el modelo se efectúan en un túnel de aire usando aire normal, ¿cuál es la velocidad requerida para el aire en el túnel de aire? ¿Es real esta velocidad?
- 7.40 Si un avión se desplaza a una velocidad de 1120 km/ h a una altitud de 15 km, ¿cuál es la velocidad requerida a una altitud de 7 km a fin de satisfacer la semejanza del número de Reynolds? Supóngase que las propiedades del aire corresponden a las de la atmósfera estándar de Estados Unidos de América.
- 7.41 La velocidad del aire en cierto punto a lo largo de un modelo a escala 1:10 del vertedero de una presa es 5 m/ s. ¿Cuál es la velocidad correspondiente para el prototipo si el modelo y el prototipo operan en concordancia con la semejanza del número de Froude?
- 7.42 El caudal sobre el vertedero de una presa es de 27 000 pies<sup>3</sup>/ min. Determinar el caudal requerido para un modelo a escala 1:30 que opera en concordancia con la semejanza del número de Froude.
- 7.43 La elevación y el arrastre desarrollados sobre una superficie de reacción hidráulica (hidromodelo) se deben determinar mediante pruebas en un túnel de aire usando aire normal. Si se realizan pruebas a escala real, ¿cuál es la velocidad requerida para el túnel de aire correspondiente a una velocidad de 20 mph para el hidromodelo en agua salada? Supóngase que se requiere semejanza del número de Reynolds.
- 7.44 A través del vertedero de una presa de 65 m de ancho circula agua a 40 m<sup>3</sup>/ s. En el laboratorio se construirá y probará un modelo de vertedero de ancho igual a 0.9 m. ¿Cuál es el caudal requerido para el modelo?
- 7.45 Un modelo a escala 1:40 de un barco se probará en un tanque remolque. Determinar la viscosidad cinemática requerida del fluido para el modelo de modo que el número de Reynolds y el número de Froude sean iguales para el modelo y el prototipo. Supóngase que el fluido para el prototipo es agua salada a 60 °F. ¿Es posible usar como fluido para el modelo cualquiera de los líquidos cuyas viscosidades se proporcionan en la figura B.2 del apéndice B?
- 7.46 A partir de una prueba de laboratorio se determinará la caída de presión por unidad de longitud en un ducto de gasolina de 0.25 pulg de diámetro, usando la misma tubería pero con agua como fluido. Interesa conocer la caída de presión para una velocidad de gasolina de 1.0 pie/ s. a) ¿Qué velocidad del agua se requiere? b) A la velocidad modificada a escala del inciso a), se encontró que la caída de presión por unidad de longitud (usando agua) es de 0.45 lb-pie<sup>2</sup>/ pies. ¿Cuál es la caída de presión predicha por unidad de longitud para el ducto de gasolina?
- 7.47 Mediante una prueba en un túnel de aire se determinará el arrastre sobre el platillo de un satélite de 2 m de diámetro debido a un viento de 80 km/ h, usando un modelo de platillo geoméricamente semejante de 0.4 m de diámetro. Supóngase aire normal para el modelo y el prototipo. a) ¿A qué velocidad del aire se debe efectuar la prueba para el modelo? b) Cuando se satisfacen todas las condiciones de semejanza, se determinó que el arrastre medido sobre el modelo es de 170 N. ¿Cuál es el arrastre predicho sobre el platillo del prototipo?
- 7.48 Por medio de un modelo geoméricamente semejante se determinará la caída de presión entre la entrada y la salida de un codo a 90° de 150 mm de diámetro por el que circula alcohol etílico a 20 °C. La velocidad del alcohol es de 5 m/ s. El fluido para el modelo es agua a 20 °C y la velocidad en el modelo está limitada a 10 m/ s. a) Cuál es el diámetro requerido para el modelo del codo a fin de mantener semejanza dinámica? b) Una caída de presión de 15 kPa medida en el modelo, ¿a qué valor corresponde en el prototipo?
- 7.49 Para un estudio de modelo que requiere un modelo a escala 1:5, se sabe que se debe mantener la semejanza del número de Froude. También se investigará la posibilidad de cavitación y se supone que el número de cavitación debe ser el mismo para el modelo y el prototipo. El fluido para el prototipo es agua a 30 °C, y el fluido para el modelo es agua a 70 °C. Si el prototipo opera a una presión ambiente de 101 kPa (abs), ¿cuál es la presión ambiente requerida para el modelo del sistema?
- 7.50 En el fondo de una tubería horizontal hay una delgada capa de partículas esféricas como se muestra en la figura P7.50. Cuando por el tubo circula un fluido incompresible, se observa que a cierta velocidad crítica las partículas ascienden y son transportadas a lo largo de la tubería. Para determinar esta velocidad crítica se usará un modelo.

Supóngase que la velocidad crítica,  $V_c$ , es función del diámetro de la tubería,  $D$ , del diámetro del partícula,  $d$ , de la densidad,  $\rho$ , y la viscosidad,  $\mu$ , del fluido, de la densidad de las partículas,  $\rho_p$  y de la aceleración de la gravitación,  $g$ . a) Determinar los requisitos de semejanza para el modelo y la relación entre la velocidad crítica para el modelo y el prototipo (la ecuación de predicción). b) Para una escala de longitud de  $1/2$  y una escala de densidad del fluido de  $1.0$ , ¿cuál es la escala de velocidad crítica (suponiendo que se satisfacen todos los requisitos de semejanza)?

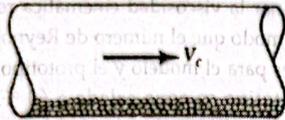


FIGURA P7.50

7.51 Un fluido viscoso ( $\mu = 10^{-3}$  lb-s/ pie<sup>2</sup>;  $\rho = 2.0$  slugs/ pie<sup>3</sup>) fluye de un gran depósito abierto y descarga hacia la atmósfera, como se muestra en la figura P7.51. Para predecir la velocidad del fluido cuando descarga de la tubería se usará un modelo. Establecer los requisitos de semejanza para el modelo. Supóngase flujo estable y asegúrese de incluir la aceleración de la gravitación como variable, ya que la gravitación produce el flujo. Si como fluido para el modelo se usa agua a 70 °F, ¿existe(n) alguna(s) restricción (restricciones) sobre la escala de longitud que se puede(n) usar? Explicar cómo se llegó a la respuesta.

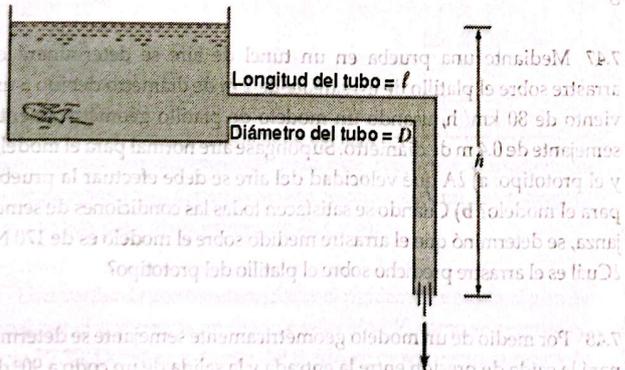


FIGURA P7.51

7.52 Cuando pequeñas partículas de diámetro  $d$  son transportadas por un fluido en movimiento a velocidad  $V$ , las partículas se asientan en el suelo a una distancia  $\ell$  después de partir de una altura  $h$ , como se muestra en la figura P7.52. La variación de  $\ell$  con varios factores se estudiará con un modelo cuya escala de longitud es de  $1/10$ . Supóngase que

$$\ell = f(h, d, V, \gamma, \mu)$$

donde  $\gamma$  es el peso específico de la partícula y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. El mismo fluido se usará en el modelo y en el prototipo, pero y

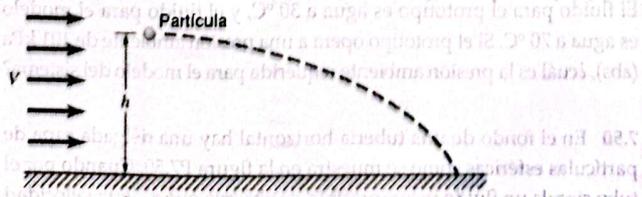


FIGURA P7.52

(modelo) =  $9 \times \gamma$  (prototipo). a) Si  $V = 50$  mph, ¿a qué velocidad se deben realizar las pruebas para el modelo? b) Durante una prueba para el modelo se encontró que  $\ell$  (modelo) = 0.8 pies. ¿Cuál debe ser la  $\ell$  predicha para esta prueba?

7.53 Una delgada capa de un fluido incompresible circula de manera estable sobre una placa horizontal lisa como se muestra en la figura P7.53. La superficie del fluido está abierta a la atmósfera, y sobre la placa se coloca una obstrucción de sección transversal cuadrada, como se muestra. Para predecir la profundidad del fluido,  $y$ , a lo largo de la placa se diseñará un modelo con una escala de longitud de  $1/4$  y una escala de densidad del fluido de  $1.0$ . Supóngase que los efectos inerciales, gravitacionales, debidos a la tensión superficial y viscosos son, todos, importantes. ¿Cuáles son las escalas requeridas de viscosidad y tensión superficial?

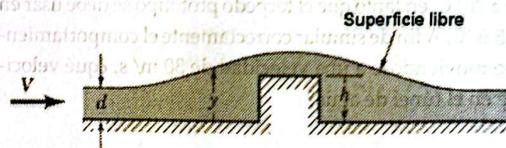


FIGURA P7.53

7.54 Un fluido muy viscoso circula lentamente por la placa rectangular sumergida de la figura P7.54. Se sabe que el arrastre,  $\mathcal{D}$ , es función de la altura de la placa,  $h$ , del ancho de la placa,  $b$ , de la velocidad del fluido,  $V$ , y de la viscosidad del fluido,  $\mu$ . Para predecir el arrastre se usa un modelo y durante una prueba para el modelo en que se usa glicerina ( $\mu_m = 0.03$  lb-s/ pie<sup>2</sup>), con  $h_m = 1$  pulg y  $b_m = 3$  pulg, se encontró que  $\mathcal{D}_m = 0.2$  lb cuando  $V_m = 0.5$  pies/ s. En caso de ser posible, predecir el arrastre sobre una placa geoméricamente semejante más grande con  $h = 4$  pulg y  $b = 12$  pulg inmersa en la misma glicerina que se mueve a una velocidad de 2 pies/ s. En caso de no ser posible, explicar por qué.

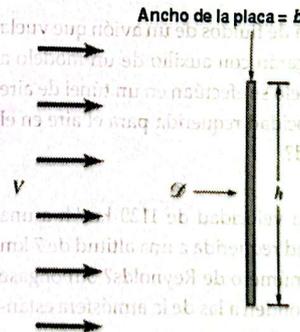


FIGURA P7.54

7.55 Una delgada placa rectangular es remolcada por agua salada a una velocidad media de 5 mph. La placa se mantiene en posición vertical y sobresale del nivel no perturbado del agua hasta una altura  $z$ . Para predecir el arrastre sobre la placa se usará un modelo a escala  $1/4$ , y el fluido para el modelo también es agua salada. a) Suponiendo que se debe mantener la semejanza del número de Froude, determinar la velocidad requerida para el modelo. b) ¿Cuál es el valor requerido de  $z_m/z$ ? c) Un arrastre medido de 1 lb sobre el modelo, ¿a qué arrastre corresponde sobre el prototipo?

7.56 Durante una tormenta, detrás de una cerca para nieve se forma un montículo de nieve, como se muestra en la figura P7.56. Supóngase

que la altura del montículo,  $h$ , es función del número de pulgadas depositadas durante la tormenta,  $d$ , de la altura de la cerca,  $H$ , del ancho de los barrotes de la cerca,  $b$ , de la velocidad del viento,  $V$ , de la aceleración de la gravitación,  $g$ , de la densidad del aire,  $\rho$ , y del peso específico de la nieve,  $\gamma$ . a) Si el problema se estudiará con un modelo, determinar los requisitos de semejanza para el modelo y la relación entre la profundidad del montículo para el modelo y el prototipo (ecuación de predicción). b) Una tormenta con vientos de 30 mph deposita 16 pulg de nieve cuyo peso específico es de 5.0 lb/ pie<sup>3</sup>. Para investigar la efectividad de una nueva cerca para nieve se usará un modelo a escala de tamaño 1/ 2. Si la densidad del aire es la misma para el modelo y la tormenta, determinar el peso específico requerido para el modelo de nieve y la velocidad requerida del viento para el modelo.

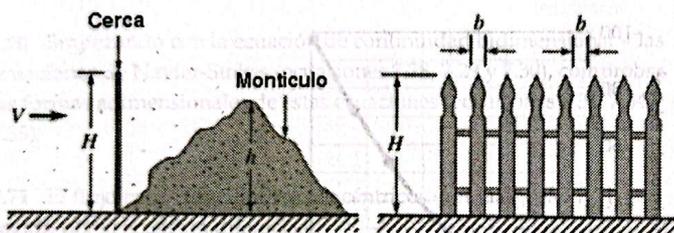


FIGURA P7.56

7.57 Un elemento estructural de 10 pies de largo con la sección transversal que se muestra en la figura P7.57 se someterá a un viento de 60 mph. Para determinar el arrastre sobre el elemento se usará un modelo cuya escala de longitud es de 1/ 5. a) Desarrollar un conjunto apropiado de requisitos de semejanza para el modelo y la ecuación de predicción para el arrastre. b) Investigar la posibilidad de usar un túnel de agua en las pruebas para el modelo. ¿Piensa el lector que éste sería un sistema de modelo apropiado? Explicar la respuesta. ¿A qué valor del arrastre sobre el prototipo correspondería un arrastre medido de 1 lb sobre el modelo?

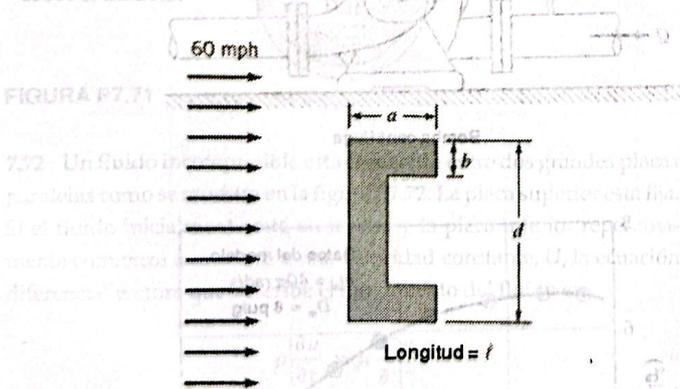


FIGURA P7.57

7.58 Se sabe que el arrastre sobre una esfera que se mueve en un fluido es función del diámetro y la velocidad de la esfera, así como de la viscosidad y densidad del fluido. Pruebas de laboratorio sobre una esfera de 4 pulg de diámetro se realizaron en un túnel de agua y en la figura P7.58 se muestra la gráfica de algunos datos para el modelo. Para estas pruebas, la viscosidad del agua fue de  $2.3 \times 10^{-5}$  lb-s/ pie<sup>2</sup> y la densidad del agua fue de 1.94 slugs/ pie<sup>3</sup>. Calcular el arrastre sobre un globo de 8 pies de diámetro que se mueve en el aire a una velocidad de 3 pies/ s. Supóngase que el aire tiene una viscosidad de  $3.7 \times 10^{-7}$  lb-s/ pie<sup>2</sup> y una densidad de  $2.38 \times 10^{-3}$  slugs/ pie<sup>3</sup>.

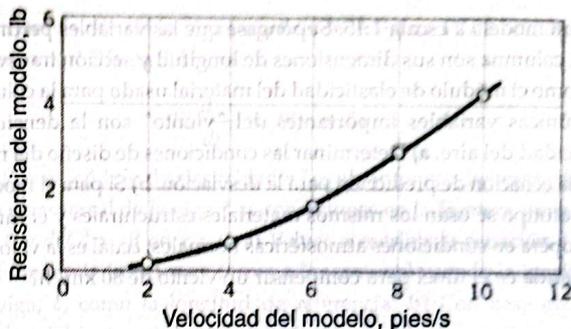


FIGURA P7.58

7.59 El arrastre sobre un pequeño cuerpo sólido completamente sumergido de longitud característica igual a 2.5 mm y que se mueve a través de agua a una velocidad de 15 m/ s se determinará con auxilio de un modelo. La escala de longitud debe ser 50, lo cual indica que el modelo debe ser *más grande* que el prototipo. Investigar la posibilidad de usar un túnel de aire no presurizado o un túnel de agua para efectuar este estudio. Determinar la velocidad requerida en los túneles de aire y de agua, así como la relación entre el arrastre sobre el modelo y el arrastre sobre el prototipo para ambos sistemas. Para este estudio, ¿sería apropiado cualquiera de estos tipos de instalación de prueba?

7.60 Las características de arrastre para un automóvil de diseño reciente que tiene una longitud característica máxima de 20 pies se determinarán mediante un estudio de modelo. Se tiene interés en las características en condiciones de baja velocidad (aproximadamente de 20 mph) y alta velocidad (90 mph). Para una serie de pruebas proyectadas en modelos se usará un túnel de aire no presurizado en que cabrá un modelo con una longitud característica máxima de 4 pies. Determinar el intervalo de velocidades de aire que se requieren para el túnel de aire si se desea semejanza del número de Reynolds. ¿Son adecuadas las velocidades? Explicar la respuesta.

7.61 Si el túnel de aire no presurizado del problema 7.60 se sustituye por un túnel en que el aire se puede presurizar isotérmicamente a 8 atm (abs), ¿qué intervalo de velocidades de aire se requiere a fin de que haya semejanza del número de Reynolds para las mismas velocidades del prototipo dadas en el problema 7.60? Para el túnel presurizado, la longitud característica máxima del modelo que puede caber es de 2 pies, en tanto que la longitud característica máxima del prototipo permanece en 20 pies.

7.62 Las características de arrastre de un avión se determinarán a partir de pruebas en modelos en un túnel de aire operado a una presión absoluta de 1 300 kPa. Si el prototipo se debe volar en aire normal a una velocidad de crucero de 385 km/ h y la velocidad correspondiente para el modelo no se debe diferir por más de 20% con respecto a aquella (de modo que es posible ignorar los efectos debidos a la compresibilidad), ¿qué intervalo de escalas de longitud se puede usar si se debe mantener la semejanza del número de Reynolds? Supóngase que la viscosidad del aire no es afectada por la presión, y que la temperatura del aire en el túnel es igual a la temperatura del aire en que volará el avión.

7.63 Un gran tablero rectangular rígido está sostenido por una columna elástica como se muestra en la figura P7.63. Se tiene interés en la desviación,  $\delta$ , de la parte superior de la estructura mientras sopla un viento alto de velocidad  $V$ . Se realizará una prueba en un túnel de aire

con un modelo a escala 1:15. Supóngase que las variables pertinentes de la columna son sus dimensiones de longitud y sección transversal, así como el módulo de elasticidad del material usado para la columna. Las únicas variables importantes del "viento" son la densidad y velocidad del aire. a) Determinar las condiciones de diseño del modelo y la ecuación de predicción para la desviación. b) Si para el modelo y el prototipo se usan los mismos materiales estructurales y el túnel de aire opera en condiciones atmosféricas normales, ¿cuál es la velocidad requerida en el túnel para compensar un viento de 80 km/h?

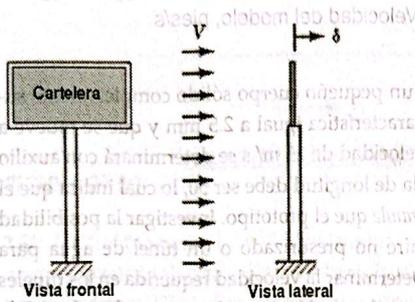


FIGURA P7.63

7.64 Un canal abierto con sección transversal rectangular tiene un ancho de 20 pies y transporta agua a una profundidad de 3 pies a un caudal de 60 pies<sup>3</sup>/s. Se piensa diseñar un modelo, con base en la semejanza del número de Froude, de modo que la escala de descarga sea de 1/1024. ¿A qué profundidad y caudal debe operar el modelo?

7.65 Un canal abierto, de 6 pies de ancho, transporta un líquido altamente viscoso ( $\mu = 10^{-3}$  lb·s/pie<sup>2</sup>;  $\gamma = 75$  lb/pie<sup>3</sup>) a una profundidad de 2 pies. Se va a diseñar un modelo que tenga una escala de longitud de 1/10. Determinar el valor requerido de la viscosidad cinemática para el fluido del modelo.

7.66 Se usará un modelo a escala 1/50 en un depósito de remolque para determinar el arrastre en el casco de un barco. El modelo debe operar según los criterios del número de Froude para semejanza dinámica. El barco prototipo se diseña para que navegue a 18 nudos. ¿A qué velocidad (en m/s) se debe remolcar el modelo? En estas condiciones, ¿cuál es la razón del arrastre para el prototipo al arrastre para el modelo? Supóngase que el agua en el depósito de remolque posee las mismas propiedades que el prototipo y que el esfuerzo por arrastre es insignificante.

† 7.67 Si en un buque tanque que opera cerca de la costa ocurre un gran derrame de aceite, el tiempo en que el aceite llega a la costa es bastante importante. Diseñar un sistema de modelo que se pueda usar para investigar este tipo de problema en el laboratorio. Indicar todas las hipótesis establecidas en el desarrollo del diseño y analizar cualquier dificultad que se pudiera presentar al satisfacer los requisitos de semejanza que surgen al diseñar el modelo.

7.68 Un cilindro circular de diámetro  $d$  se coloca en una corriente uniforme de fluido como se muestra en la figura P7.68a. Lejos del cilindro la velocidad es  $V$  y la presión es atmosférica. La presión manométrica,  $p$ , en el punto A sobre la superficie del cilindro se determinará a partir del estudio de un modelo para un prototipo de 18 pulg de diámetro colocado en una corriente de aire que tiene una velocidad de 8 pies/s. Se usará un modelo a escala 1:12 con agua como fluido de trabajo.

En la figura P7.68b se presentan algunos datos obtenidos a partir del modelo. Predecir la presión del prototipo.

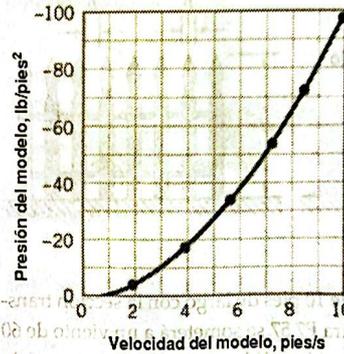
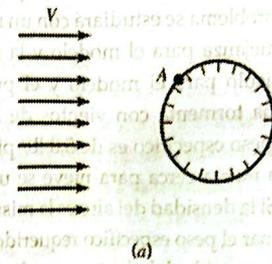


FIGURA P7.68

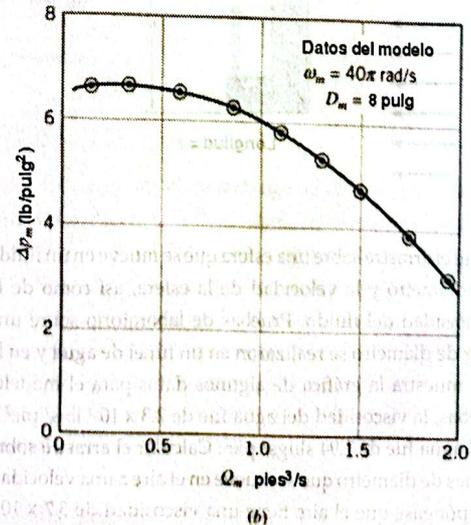
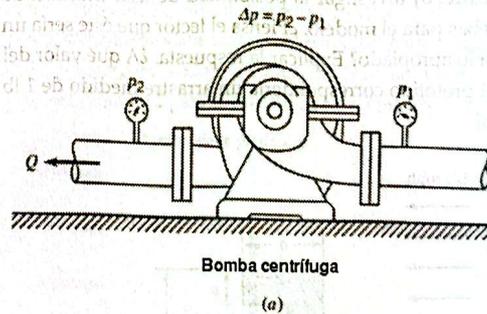


FIGURA P7.69

7.69 El incremento de presión,  $\Delta p$ , a través de una bomba centrífuga de una forma dada (ver la figura P7.69a) se puede expresar como

$$\Delta p = f(D, \omega, \rho, Q)$$

donde  $D$  es el diámetro del propulsor,  $\omega$  es la velocidad angular del propulsor,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $Q$  es el caudal a través de la bomba. Usando agua, en el laboratorio se prueba una bomba modelo de 8 pulg de diámetro. Cuando opera a una velocidad angular de  $40 \pi \text{ rad/s}$ , el incremento de presión para el modelo como función de  $Q$  se muestra en la figura P7.69b. Usando esta curva, predecir el incremento de presión a través de una bomba geoméricamente semejante (prototipo) para un caudal del prototipo igual a  $6 \text{ pies}^3/\text{s}$ . El prototipo tiene un diámetro de 12 pulg y opera a una velocidad angular de  $60 \pi \text{ rad/s}$ . El fluido del prototipo también es agua.

7.70 Empezando con la ecuación de continuidad bidimensional y las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuaciones 7.28, 7.29 y 7.30), comprobar las formas adimensionales de estas ecuaciones (ecuaciones 7.31, 7.34 y 7.35).

7.71 El flujo entre dos cilindros concéntricos (ver la figura P7.71) está regido por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = 0$$

donde  $v_\theta$  es la velocidad tangencial en cualquier ubicación radial  $r$ . El cilindro interior está fijo y el cilindro exterior gira con una velocidad angular  $\omega$ . Expresar la ecuación en forma adimensional usando  $R_0$  y  $\omega$  como parámetros de referencia.

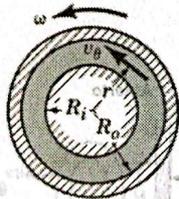


FIGURA P7.71

7.72 Un fluido incompresible está contenido entre dos grandes placas paralelas como se muestra en la figura P7.72. La placa superior está fija. Si el fluido inicialmente está en reposo y la placa inferior repentinamente comienza a moverse a una velocidad constante,  $U$ , la ecuación diferencial rectora que describe el movimiento del fluido es

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde  $u$  es la velocidad en la dirección  $x$  y  $\rho$  y  $\mu$  son la densidad y la viscosidad del fluido, respectivamente. Volver a escribir la ecuación y las condiciones iniciales y en la frontera en forma adimensional usando  $h$  y  $U$  como parámetros de referencia para la longitud y la velocidad, y  $h^2 \rho / \mu$  como el parámetro de referencia para el tiempo.

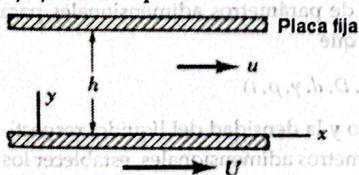


FIGURA P7.72

7.73 La desviación de la viga voladiza de la figura P7.73 está regida por la ecuación diferencial

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = P(x - \ell)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad e  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga. Las condiciones en la frontera son  $y = 0$  en  $x = 0$  y  $dy/dx = 0$  en  $x = 0$ . a) Volver a escribir la ecuación y las condiciones en la frontera en forma adimensional usando la longitud de la viga,  $\ell$ , como la longitud de referencia. b) Con base en los resultados del inciso a), ¿cuáles son los requisitos de semejanza y la ecuación de predicción para que un modelo prediga desviaciones?

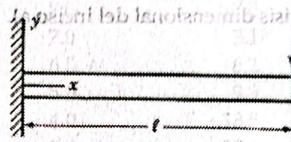


FIGURA P7.73

7.74 Un líquido está contenido en una tubería cerrado en un extremo, como se muestra en la figura P7.74. Inicialmente el líquido está en reposo, pero si el extremo se abre repentinamente el líquido comienza a moverse. Supóngase que la presión  $p_1$  permanece constante. La ecuación diferencial que describe el movimiento resultante del líquido es

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{p_1}{\ell} + \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

donde  $v_z$  es la velocidad en cualquier ubicación radial,  $r$ , y  $t$  es el tiempo. Volver a escribir la ecuación en forma adimensional usando la densidad,  $\rho$ , y la viscosidad del líquido,  $\mu$ , y el radio de la tubería,  $R$ , como parámetros de referencia.

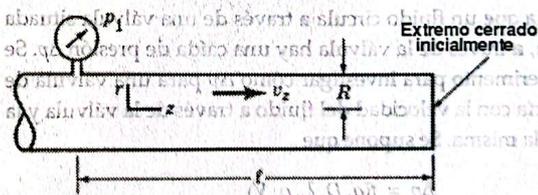


FIGURA P7.74

7.75 Un fluido incompresible está contenido entre dos placas paralelas infinitas como se ilustra en la figura P7.75. Bajo la influencia de un gradiente de presión que varía armónicamente en la dirección  $x$ , el fluido oscila armónicamente con una frecuencia  $\omega$ . La ecuación diferencial que describe el movimiento del fluido es

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = X \cos \omega t + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

donde  $X$  es la amplitud del gradiente de presión. Expresar esta ecuación en forma adimensional usando  $h$  y  $\omega$  como parámetros de referencia.

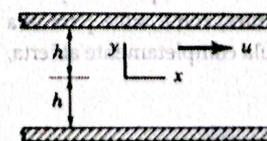


FIGURA P7.75

7.76 Un fluido viscoso circula por un canal vertical cuadrado como se muestra en la figura P7.76. La velocidad  $w$  se puede expresar como

$$w = f(x, y, b, \mu, \gamma, V, \partial p / \partial z)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad del fluido,  $\gamma$  es el peso específico del fluido,  $V$  es la velocidad media y  $\partial p / \partial z$  es el gradiente de presión en la dirección  $z$ . a) Usando análisis dimensional, encontrar un conjunto apropiado de variables y parámetros adimensionales para este problema. b) La ecuación diferencial que rige el movimiento del fluido para este problema es

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Escribir esta ecuación en forma adimensional y demostrar que los requisitos de semejanza obtenidos a partir de este análisis son los mismos que los que se obtienen del análisis dimensional del inciso a).

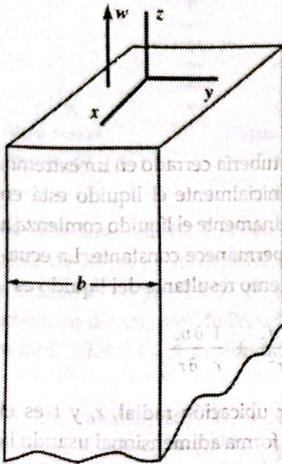


FIGURA P7.76

7.77 A medida que un fluido circula a través de una válvula situada en una tubería, a través de la válvula hay una caída de presión  $\Delta p$ . Se diseña un experimento para investigar cómo  $\Delta p$  para una válvula de compuerta varía con la velocidad del fluido a través de la válvula y la colocación de la misma. Se supone que

$$\Delta p = f(a, D, \lambda_i, \rho, V)$$

donde  $a$  y  $D$  están definidas en la figura P7.77,  $\lambda_i$  representa todas las demás longitudes requeridas para definir la geometría de la válvula,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $V$  es la velocidad del fluido en el tubo en que está situada la válvula. Efectuar un análisis dimensional y demostrar que

$$\frac{\Delta p}{1/2 \rho V^2} = \phi_1 \left( \frac{a}{D}, \frac{\lambda_i}{D} \right)$$

donde el factor  $1/2$  se ha sumado de manera arbitraria. Obsérvese que para una válvula dada,  $\phi_1(a/D, \lambda_i/D)$  depende sólo de la posición de la válvula. Como la posición de la válvula también se puede expresar como un porcentaje,  $R$ , (porcentaje de abertura) con  $R = 0\%$  para una válvula cerrada y  $R = 100\%$  para una válvula completamente abierta, se concluye que

$$\frac{\Delta p}{1/2 \rho V^2} = \phi(R)$$

Como se analizara en el capítulo 8,  $\phi(R)$  se denomina coeficiente de pérdida menor.

Para determinar las características de caída de presión de una válvula de compuerta, el arreglo experimental de la figura P7.77 se usa con aire de peso específico igual a  $0.0719 \text{ lb/ pie}^3$ . Un manómetro de tubo en U mide la presión corriente arriba, y la presión corriente abajo es cero porque el aire descarga en la atmósfera. El caudal,  $Q$ , se determina con un medidor de flujo como se ilustra en la figura P7.77. En la tabla siguiente se presentan algunos datos obtenidos experimentalmente.

Para cada arreglo de la válvula trazar una gráfica del caudal,  $Q$ , como función de la caída de presión,  $\Delta p$ . Demostrar cómo estos datos se pueden reunir en una sola curva mediante el empleo del análisis dimensional previamente descrito. ¿Los datos graficados sustentan el análisis dimensional? Explicar la respuesta.

| R (% de abertura) | Q (pies <sup>3</sup> /s) | H (pulg) |
|-------------------|--------------------------|----------|
| 25                | 0.169                    | 5.04     |
| 25                | 0.195                    | 6.50     |
| 25                | 0.220                    | 7.69     |
| 25                | 0.235                    | 9.20     |
| 38                | 0.150                    | 1.92     |
| 38                | 0.238                    | 4.90     |
| 38                | 0.321                    | 8.73     |
| 38                | 0.350                    | 10.44    |
| 75                | 0.238                    | 0.98     |
| 75                | 0.456                    | 2.60     |
| 75                | 0.578                    | 4.32     |
| 75                | 0.767                    | 7.65     |
| 100               | 0.426                    | 0.64     |
| 100               | 0.517                    | 0.97     |
| 100               | 0.618                    | 1.40     |
| 100               | 0.799                    | 2.37     |

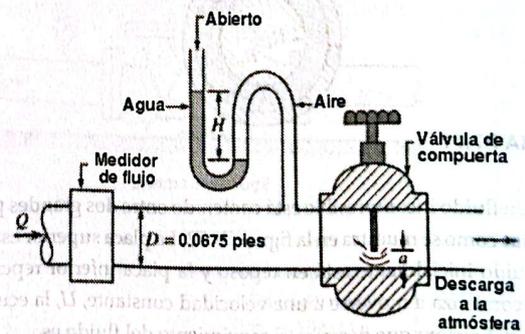


FIGURA P7.77

7.78 A medida que un líquido sale de un depósito cilíndrico abierto a través de un pequeño orificio en el fondo del depósito, la profundidad del líquido,  $h$ , disminuye con el tiempo (ver la figura P7.78). Este cambio de profundidad en función del tiempo,  $t$ , se estudiará con un modelo a escala 1:2. El líquido en el depósito prototipo tiene una profundidad inicial,  $H$ , de 16 pulg, un diámetro,  $D$ , igual a 4.0 pulg y un diámetro del orificio,  $d$ , de 0.25 pulg. El fluido es agua a  $20^\circ \text{C}$ . Obtener un conjunto apropiado de parámetros adimensionales para este problema, en el supuesto de que

$$h = f(H, D, d, \gamma, \rho, t)$$

donde  $\gamma$  y  $\rho$  son el peso específico y la densidad del líquido, respectivamente. Con base en estos parámetros adimensionales, establecer los requisitos de semejanza para el modelo y la ecuación de predicción que

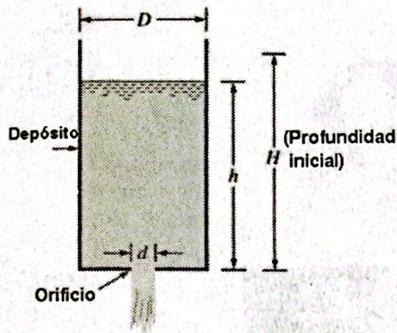


FIGURA P7.78

relaciona la profundidad para el modelo con la profundidad para el prototipo.

En la tabla siguiente se proporcionan algunos datos experimentales obtenidos a partir de un modelo geoméricamente semejante ( $D_m = 2.0$  pulg,  $d_m = 0.125$  pulg y  $H_m = 8.0$  pulg) usando agua a  $20^\circ\text{C}$ . En una gráfica, representar los valores de la profundidad del agua,  $h_m$ , en función del tiempo,  $t_m$ . En otra gráfica, graficar estos datos en forma adimensional.

En la tabla siguiente también se proporcionan algunos datos para el prototipo. Sobre las mismas gráficas usadas para el modelo, representar los datos correspondientes para el prototipo. Con base en una comparación de los datos para el modelo con los datos para el prototipo, ¿parece correcto el diseño del modelo? Explicar la respuesta. En este experimento se ha ignorado el efecto de la viscosidad. Esta hipótesis, ¿parece razonable? Si la viscosidad se incluye como una variable importante, ¿cómo se vería afectado el diseño del modelo? Explicar la respuesta.

| Datos del modelo |           | Datos del prototipo |         |
|------------------|-----------|---------------------|---------|
| $h_m$ (pulg)     | $t_m$ (s) | $h$ (pulg)          | $t$ (s) |
| 8.0              | 0.0       | 16.0                | 0.0     |
| 7.0              | 3.1       | 14.0                | 4.5     |
| 6.0              | 6.2       | 12.0                | 8.9     |
| 5.0              | 9.9       | 10.0                | 14.0    |
| 4.0              | 13.5      | 8.0                 | 20.2    |
| 3.0              | 18.1      | 6.0                 | 25.9    |
| 2.0              | 24.0      | 4.0                 | 32.8    |
| 1.0              | 32.5      | 2.0                 | 45.7    |
| 0.0              | 43.0      | 0.0                 | 59.8    |

$$d = \frac{gt^2}{2} \tag{1.3}$$

donde  $g$  es la aceleración debida a la gravedad. La ecuación 1.3 es dimensionalmente homogénea y válida en cualquier sistema de unidades. Para  $g = 32.2$  pies/  $s^2$  la ecuación se reduce a la ecuación 1.2 y, por tanto, la ecuación 1.2 es válida sólo para el sistema de unidades en que se utilizan pies y segundos. Las ecuaciones que están restringidas a un sistema de unidades particular se pueden denotar como *ecuaciones homogéneas restringidas*, en oposición a las ecuaciones válidas en cualquier sistema de unidades, que son *ecuaciones homogéneas generales*. El análisis anterior indica una aplicación elemental, aunque importante, del concepto de dimensiones; la determinación de un aspecto de la generalidad de una ecuación dada simplemente con base en la consideración de las dimensiones de los diversos términos de la ecuación.

El concepto de dimensiones también constituye la base de la poderosa herramienta del *análisis dimensional*, que se considerará con detalle en el capítulo 7.

**TABLA 1.1**  
Dimensiones asociadas con cantidades físicas comunes

|                                 | Sistema<br><i>FLT</i>  | Sistema<br><i>MLT</i>  |
|---------------------------------|------------------------|------------------------|
| Aceleración                     | $LT^{-2}$              | $LT^{-2}$              |
| Ángulo                          | $F^0L^0T^0$            | $M^0L^0T^0$            |
| Aceleración angular             | $T^{-2}$               | $T^{-2}$               |
| Velocidad angular               | $T^{-1}$               | $T^{-1}$               |
| Área                            | $L^2$                  | $L^2$                  |
| Densidad                        | $FL^{-4}T^2$           | $ML^{-3}$              |
| Energía                         | $FL$                   | $ML^2T^{-2}$           |
| Fuerza                          | $F$                    | $MLT^{-2}$             |
| Frecuencia                      | $T^{-1}$               | $T^{-1}$               |
| Calor                           | $FL$                   | $ML^2T^{-2}$           |
| Longitud                        | $L$                    | $L$                    |
| Masa                            | $FL^{-1}T^2$           | $M$                    |
| Módulo de elasticidad           | $FL^{-2}$              | $ML^{-1}T^{-2}$        |
| Momento de una fuerza           | $FL^2$                 | $ML^2T^{-2}$           |
| Momento de inercia (área)       | $L^4$                  | $L^4$                  |
| Momento de inercia (masa)       | $FLT^2$                | $ML^2$                 |
| Cantidad de movimiento (ímpetu) | $FT$                   | $MLT^{-1}$             |
| Potencia                        | $FLT^{-1}$             | $ML^2T^{-3}$           |
| Presión                         | $FL^{-2}$              | $ML^{-1}T^{-2}$        |
| Calor específico                | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ | $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ |
| Peso específico                 | $FL^{-3}$              | $ML^{-2}T^{-2}$        |
| Deformación                     | $F^0L^0T^0$            | $M^0L^0T^0$            |
| Esfuerzo                        | $FL^{-2}$              | $ML^{-1}T^{-2}$        |
| Tensión superficial             | $FL^{-1}$              | $MT^{-2}$              |
| Temperatura                     | $\Theta$               | $\Theta$               |
| Tiempo                          | $T$                    | $T$                    |
| Torca (par)                     | $FL$                   | $ML^2T^{-2}$           |
| Velocidad                       | $LT^{-1}$              | $LT^{-1}$              |
| Viscosidad (dinámica)           | $FL^2T$                | $ML^{-1}T^{-1}$        |
| Viscosidad (cinemática)         | $L^2T^{-1}$            | $L^2T^{-1}$            |
| Volumen                         | $L^3$                  | $L^3$                  |
| Trabajo                         | $FL$                   | $ML^2T^{-2}$           |