1.7 Desigualdades

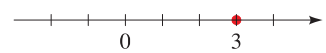
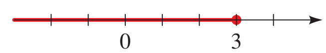
x	$4x + 7 \le 19$
1	$11 \le 19$ ✓
2	$15 \le 19$ ✓
3	$19 \le 19$ ✓
4	$23 \le 19$ ✗
5	$27 \le 19$ ✗

En el álgebra, algunos problemas originan **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo de igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\le$ o $\ge$. Aquí está un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \le 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no.

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales. La ilustración que sigue muestra cómo una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

		Solución	**Gráfica**
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad:	$4x + 7 \le 19$	$x \le 3$	

Para resolver desigualdades, aplicamos las reglas siguientes para aislar la variable a un lado del signo de la desigualdad. Estas reglas indican cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a"). En estas reglas, los símbolos A, B y C son números reales o expresiones algebraicas. Aquí establecemos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\le$, pero se aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

Reglas de las desigualdades

Regla	Descripción
1. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \le B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada miembro de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \le B - C$	**Restar** la misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \le CB$	**Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad CA \ge CB$	**Multiplicar** ambos miembros de una desigualdad por la misma cantidad *negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \le B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \ge \dfrac{1}{B}$	**Obtener los recíprocos** de ambos miembros de una desigualdad que contiene cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \le B$ y $C \le D$, entonces $A + C \le B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Ponga atención especial a las reglas 3 y 4. La regla 3 establece que podemos multiplicar (o dividir) cada miembro de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 señala que si multiplicamos cada miembro de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, tenemos

$$-6 > -10$$

Desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o es un múltiplo de la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y grafique el conjunto solución.

Solución

$$3x < 9x + 4$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \quad \text{Sustracción de } 9x$$

$$-6x < 4 \quad \text{Simplificación}$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\tfrac{1}{6}\right)(4) \quad \text{Multiplicación por } -\tfrac{1}{6} \text{ (o división entre } -6\text{)}$$

$$x > -\tfrac{2}{3} \quad \text{Simplificación}$$

La multiplicación por el número $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

Figura 1

El conjunto solución consta de todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. La gráfica se ilustra en la figura 1. ■

Ejemplo 2 Resolución de un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \le 3x - 2 < 13$.

Solución El conjunto solución consiste en todos los valores de x que cumplen tanto la desigualdad $4 \le 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Aplicando las reglas 1 y 3, vemos que las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$4 \le 3x - 2 < 13$$

$$6 \le 3x < 15 \quad \text{Suma de 2}$$

$$2 \le x < 5 \quad \text{División entre 3}$$

Figura 2

Por lo tanto, el conjunto solución es $[2, 5)$, como se ilustra en la figura 2. ■

Desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contienen la variable al cuadrado o a otras potencias, aplicamos la factorización junto con el principio siguiente.

El signo de un producto o cociente

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Ejemplo 3 Una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \le 0$.

Solución Primero factorizamos el primer miembro.

$$(x - 2)(x - 3) \le 0$$

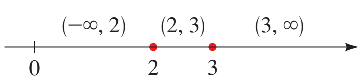


Figura 3

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Como se ilustra en la figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta de los números reales en tres intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. Determinamos los signos de los factores usando **valores de prueba** en cada uno de estos intervalos. Elegimos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el valor seleccionado. Por ejemplo, si usamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$ mostrado en la figura 4, entonces la sustitución en los factores $x - 2$ y $x - 3$ da

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

y

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

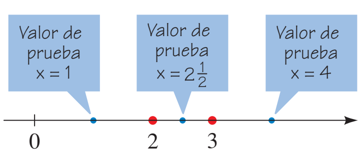


Figura 4

Ambos factores son negativos en este intervalo. (Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y en 3, respectivamente, de modo que conservan sus signos en cada intervalo. Ésta es la razón de que usar un solo valor de prueba en cada intervalo es suficiente.)

La siguiente tabla de signos se elaboró usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (véase la figura 4), respectivamente. El renglón final es el producto de dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Si lo prefiere, puede representar esta información sobre una recta numérica, como en el siguiente diagrama de signos. Las líneas verticales indican los puntos en los cuales la recta de los números reales se divide en intervalos:

		2		3	
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

De acuerdo con la tabla o con el diagrama vemos que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Por consiguiente, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

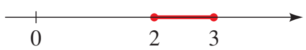


Figura 5

Están incluidos los extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor que o *igual a* cero. La solución se ilustra en la figura 5. ■

En el ejemplo 3 se ilustran los siguientes criterios para resolver una desigualdad que se puede factorizar.

Criterios para resolver desigualdades no lineales

1. **Pase todos los términos a un miembro.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad de modo que todos los términos no cero aparezcan a un lado del signo de la desigualdad. Si el lado no cero de la desigualdad contiene cocientes, busque un denominador común.

2. **Factorice.** Factorice el miembro no cero de la desigualdad.

3. **Determine los intervalos.** Calcule los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta numérica en intervalos. Liste los intervalos determinados por medio de estos números.

4. **Elabore una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para construir una tabla o un diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto o cociente de estos factores.

5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Compruebe si alguno de los extremos de los intervalos cumplen con la desigualdad, lo cual es válido si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$).

La técnica de factorización descrita en estos criterios funciona sólo si todos los términos no cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no está expresada en esta forma, primero vuélvala a escribir, como se indica en el paso 1. Esta técnica se ilustra en los ejemplos que siguen.

Es tentador multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si ésta fuera una *ecuación*). Esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Véase el ejercicio 110.)

Ejemplo 4 Una desigualdad que contiene un cociente

Resuelva: $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

Solución Primero pasamos todos los términos no cero al lado izquierdo, y luego simplificamos usando un denominador común.

Pase los términos a un lado

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1$$

$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Resta de 1 para pasar todos los términos al primer miembro}$$

$$\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1 - x$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combinación de las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Simplificación}$$

El numerador es cero cuando $x = 0$ y el denominador es cero cuando $x = 1$, de modo que elaboramos el siguiente diagrama de signos usando los valores para definir intervalos en la recta numérica.

Elabore un diagrama

		0		1	
Signo de $2x$	$-$		$+$		$+$
Signo de $1 - x$	$+$		$+$		$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$		$+$		$-$

Resuelva

A partir del diagrama vemos que la solución es $\{x \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$. Está incluido el extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor que o *igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro extremo porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Compruebe siempre los extremos de los intervalos de solución para determinar si cumplen la desigualdad original.

El conjunto solución $[0, 1)$ se ilustra en la figura 6. ■

Figura 6

Ejemplo 5 Resolución de una desigualdad con tres factores

Resuelva la desigualdad $x < \dfrac{2}{x-1}$.

Solución Después de pasar todos los términos no cero a un lado de la desigualdad, utilizamos un común denominador para combinar los términos.

Pase los términos a un lado

$$x - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Resta de } \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{x(x-1)}{x-1} - \frac{2}{x-1} < 0 \qquad \text{Común denominador } x - 1$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x-1} < 0 \qquad \text{Combinación de fracciones}$$

Factorice

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

Determine los intervalos

Los factores en este cociente cambian de signo en -1, 1 y 2, de modo que debemos examinar los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al usar los valores de prueba, obtenemos el siguiente diagrama de signos.

Elabore un diagrama

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Figura 7

Como el cociente debe ser negativo, la solución es

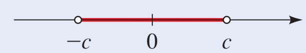
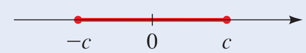
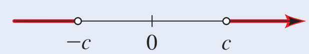
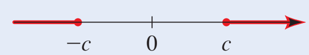
$$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

como se ilustra en la figura 7. ■

Desigualdades con valores absolutos

Aplicamos las propiedades siguientes para resolver desigualdades que contienen valores absolutos.

Propiedades de desigualdades con valores absolutos

Desigualdad	Forma equivalente	Gráfica
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$	
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$	
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$	
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$	

Estas propiedades se cumplen cuando x se reemplaza por cualquier expresión algebraica. (En la figuras suponemos que $c > 0$.)

Estas propiedades se pueden demostrar usando la definición de valor absoluto. Para demostrar la propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $\lvert x \rvert < c$ establece que la distancia desde x hasta 0 es menor que c, y según la figura 8 usted puede observar que esto es cierto si y sólo si x está entre $-c$ y c.

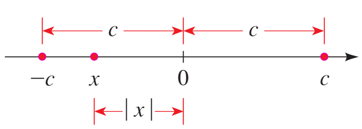


Figura 8

Ejemplo 6 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$.

Solución 1 La desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$ equivale a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Suma de 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

Solución 2 Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución consiste en todos los números x cuya distancia desde 5 es menor que 2. Según la figura 9, vemos que es el intervalo $(3, 7)$. ■

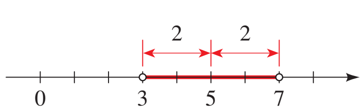


Figura 9

Ejemplo 7 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

Solución De acuerdo con la propiedad 4 la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ equivale a

$$\begin{array}{rcrl} 3x + 2 \geq 4 & \text{o bien} & 3x + 2 \leq -4 & \\ 3x \geq 2 & & 3x \leq -6 & \text{Resta de 2} \\ x \geq \frac{2}{3} & & x \leq -2 & \text{División entre 3} \end{array}$$

De modo que el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o bien} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto se grafica en la figura 10. ■

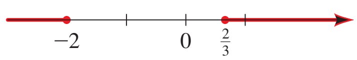


Figura 10

Modelado con desigualdades

El modelado de problemas de la vida cotidiana da con frecuencia desigualdades porque estamos interesados a menudo en determinar cuándo una cantidad es más o menos que otra.

Ejemplo 8 Boletos para el carnaval

Un carnaval tiene dos planes de boletos.

Plan A: tarifa de entrada de 5 dólares y 25 centavos cada vuelta en los juegos

Plan B: tarifa de entrada de 2 dólares y 50 centavos cada vuelta en los juegos

¿Cuántas vueltas tendría que dar para que el plan A resultara menos caro que el plan B?

Solución Se pide el número de vueltas en los juegos para que el plan A sea menos caro que el plan B. Entonces

$$x = \text{número de vueltas}$$

Identifique la variable

La información en el problema se podría organizar como sigue.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de vueltas	x
Costo con el plan A	$5 + 0.25x$
Costo con el plan B	$2 + 0.50x$

Ahora planteamos el modelo.

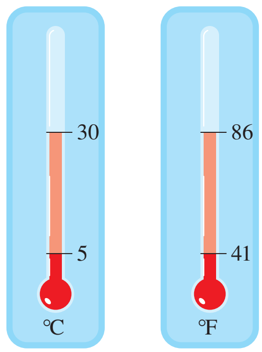
Plantee el modelo

$$\boxed{\text{costo con el plan A}} < \boxed{\text{costo con el plan B}}$$

Resuelva

$$\begin{array}{rll} 5 + 0.25x < 2 + 0.50x & \\ 3 + 0.25x < 0.50x & \text{Resta de 2} \\ 3 < 0.25x & \text{Resta de } 0.25x \\ 12 < x & \text{División entre 0.25} \end{array}$$

De modo que si planea dar *más de* 12 vueltas, el plan A es menos caro. ■



Ejemplo 9 Escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en un empaque de película indican que la caja debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué temperaturas corresponden en la escala Fahrenheit?

Solución La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) la da la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Al expresar la condición de la caja en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

De modo que las temperaturas Fahrenheit correspondientes cumplen con las desigualdades

$$\begin{aligned} 5 &< \tfrac{5}{9}(F-32) < 30 \\ \tfrac{9}{5}\cdot 5 &< F - 32 < \tfrac{9}{5}\cdot 30 && \text{Multiplicación por } \tfrac{9}{5} \\ 9 &< F - 32 < 54 && \text{Simplificación} \\ 9 + 32 &< F < 54 + 32 && \text{Suma de 32} \\ 41 &< F < 86 && \text{Simplificación} \end{aligned}$$

La película se debe conservar a una temperatura de entre 41 y 86°F. ■

Ejemplo 10 Boletos para un concierto

Un grupo de estudiantes decide asistir a un concierto. El costo de contratar a un autobús para que los lleve al concierto es de 450 dólares, lo cual se debe repartir en forma uniforme entre los estudiantes. Los promotores del concierto ofrecen descuentos a grupos que lleguen en autobús. Los boletos cuestan normalmente 50 dólares cada uno, pero se reducen 10 centavos de dólar del precio del boleto por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del autobús). ¿Cuántos estudiantes deben ir en el grupo para que el costo total por estudiante sea menor a 54 dólares?

Solución Se pide determinar el número de estudiantes que debe ir en el grupo. Entonces,

Identifique la variable

$$x = \text{cantidad de estudiantes en el grupo}$$

La información del problema se podría organizar como se indica a continuación.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de estudiantes en el grupo	x
Costo del autobús por estudiante	$\dfrac{450}{x}$
Costo del boleto por estudiante	$50 - 0.10x$

Ahora planteamos el modelo.

Plantee el modelo

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{costo del autobús}\\ \text{de cada estudiante}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{costo del boleto para}\\ \text{cada estudiante}\end{array}} < \boxed{54}$$

$$\frac{450}{x} + (50 - 0.10x) < 54$$

Resuelva

$$\frac{450}{x} - 4 - 0.10x < 0 \qquad \text{Sustracción de 54}$$

$$\frac{450 - 4x - 0.10x^2}{x} < 0 \qquad \text{Denominador común}$$

$$\frac{4500 - 40x - x^2}{x} < 0 \qquad \text{Multiplicación por 10}$$

$$\frac{(90 + x)(50 - x)}{x} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

		−90		0		50	
Signo de $90 + x$	$-$		$+$		$+$		$+$
Signo de $50 - x$	$+$		$+$		$+$		$-$
Signo de x	$-$		$-$		$+$		$+$
Signo de $\dfrac{(90 + x)(50 - x)}{x}$	$+$		$-$		$+$		$-$

El diagrama de signos muestra que la solución de la desigualdad es $(-90, 0) \cup (50, \infty)$. Debido a que no podemos tener un número negativo de estudiantes, se infiere que el grupo debe tener más de 50 estudiantes para que el total del costo por persona sea menor de 54 dólares. ■

1.7 Ejercicios

1–6 ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S cumplen con la desigualdad.

1. $3 - 2x \le \frac{1}{2}$ **2.** $2x - 1 \ge x$

3. $1 < 2x - 4 \le 7$ **4.** $-2 \le 3 - x < 2$

5. $\dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{2}$ **6.** $x^2 + 2 < 4$

7–28 ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

7. $2x - 5 > 3$ **8.** $3x + 11 < 5$

9. $7 - x \ge 5$ **10.** $5 - 3x \le -16$

11. $2x + 1 < 0$ **12.** $0 < 5 - 2x$

13. $3x + 11 \le 6x + 8$ **14.** $6 - x \ge 2x + 9$

15. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$ **16.** $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

17. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$ **18.** $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \ge \frac{1}{6} + x$

19. $4 - 3x \le -(1 + 8x)$ **20.** $2(7x - 3) \le 12x + 16$

21. $2 \le x + 5 < 4$ **22.** $5 \le 3x - 4 \le 14$

23. $-1 < 2x - 5 < 7$ **24.** $1 < 3x + 4 \le 16$

25. $-2 < 8 - 2x \le -1$ **26.** $-3 \le 3x + 7 \le \frac{1}{2}$

27. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \le \dfrac{2}{3}$ **28.** $-\dfrac{1}{2} \le \dfrac{4 - 3x}{5} \le \dfrac{1}{4}$

29–62 ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

29. $(x + 2)(x - 3) < 0$ **30.** $(x - 5)(x + 4) \ge 0$

31. $x(2x + 7) \ge 0$ **32.** $x(2 - 3x) \le 0$

33. $x^2 - 3x - 18 \le 0$ **34.** $x^2 + 5x + 6 > 0$

35. $2x^2 + x \ge 1$ **36.** $x^2 < x + 2$

37. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$ **38.** $5x^2 + 3x \ge 3x^2 + 2$

39. $x^2 > 3(x + 6)$ **40.** $x^2 + 2x > 3$

41. $x^2 < 4$ **42.** $x^2 \ge 9$

43. $-2x^2 \le 4$

44. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \le 0$

45. $x^3 - 4x > 0$ **46.** $16x \le x^3$

47. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \ge 0$ **48.** $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$

49. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$ **50.** $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$

51. $\dfrac{2x+1}{x-5} \leq 3$

52. $\dfrac{3+x}{3-x} \geq 1$

53. $\dfrac{4}{x} < x$

54. $\dfrac{x}{x+1} > 3x$

55. $1 + \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{2}{x}$

56. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{x} \geq 1$

57. $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$

58. $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{5}{x+1} + 4$

59. $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-2}$

60. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \leq 0$

61. $x^4 > x^2$

62. $x^5 > x^2$

63–76 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

63. $|x| \leq 4$

64. $|3x| < 15$

65. $|2x| > 7$

66. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$

67. $|x-5| \leq 3$

68. $|x+1| \geq 1$

69. $|2x-3| \leq 0.4$

70. $|5x-2| < 6$

71. $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 2$

72. $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \geq 4$

73. $|x+6| < 0.001$

74. $3 - |2x+4| \leq 1$

75. $8 - |2x-1| \geq 6$

76. $7|x+2| + 5 > 4$

77–80 ■ Se proporciona una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contiene valores absolutos.

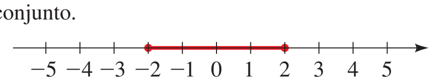
77. Todos los números reales x menores que 3 unidades a partir del 0

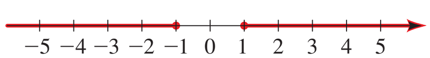
78. Todos los números reales x de más de 2 unidades a partir del 0

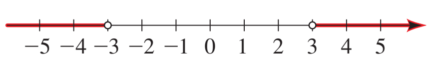
79. Todos los números reales x de por lo menos 5 unidades a partir del 7

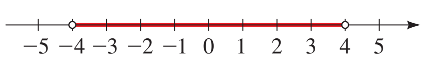
80. Todos los números reales x cuando mucho de 4 unidades a partir del 2

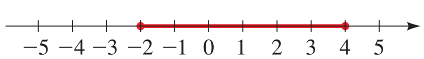
81–86 ■ Está graficado un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

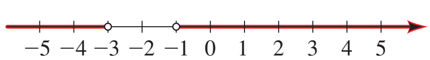
81.


82.


83.


84.


85.


86.


87–90 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como un número real.

87. $\sqrt{16 - 9x^2}$

88. $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

89. $\left(\dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$

90. $\sqrt[4]{\dfrac{1-x}{2+x}}$

91. Resuelva la desigualdad con respecto a x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

a) $a(bx - c) \geq bc$ **b)** $a \leq bx + c < 2a$

92. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

Aplicaciones

93. Escalas de temperatura Aplique la relación entre C y F dada en el ejemplo 9 para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

94. Escalas de temperatura ¿Qué intervalo de la escala de Celsius corresponde al intervalo $50 \leq F \leq 95$?

95. Costo de la renta de un automóvil Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.

Plan A: 30 dólares por día y 10 centavos por milla

Plan B: 50 dólares por día y gratis millas recorridas ilimitadas

¿Para qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero?

96. Costos de las llamadas de larga distancia Una compañía telefónica ofrece dos planes de larga distancia.

Plan A: 25 dólares por mes y 5 centavos por minuto

Plan B: 5 dólares por mes y 12 centavos por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia el plan B sería ventajoso desde el punto de vista financiero?

97. Costos de manejo de un automóvil Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Jane compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre 6400 y 7100 dólares para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que puede recorrer con su nuevo automóvil?

98. Cantidad de millas por galón de gasolina La cantidad de millas que recorre un vehículo particular por cada galón de gasolina, manejado a v millas por hora, se obtiene mediante la fórmula $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, siempre que v esté entre 10 millas/h y 75 millas/h. ¿Para qué velocidades la cantidad de millas recorridas por galón es 30 millas/galón o más?

99. Gravedad La fuerza gravitacional F que ejerce la Tierra sobre un objeto cuya masa es de 100 kg se determina mediante la ecuación

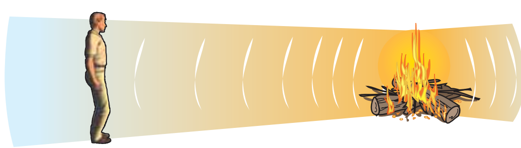
$$F = \frac{4\,000\,000}{d^2}$$

donde d es la distancia en km del objeto desde el centro de la Tierra y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias la fuerza que ejerce la Tierra sobre este objeto estará entre 0.0004 N y 0.01 N?

100. Temperatura de una hoguera En las cercanías de una hoguera, la temperatura T en °C a una distancia de x metros desde el centro de la hoguera se determina mediante

$$T = \frac{600\,000}{x^2 + 300}$$

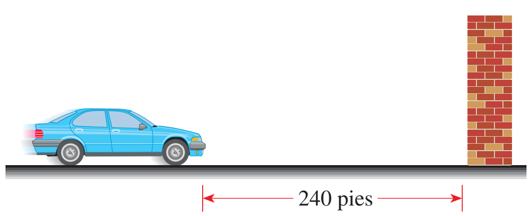
¿A qué distancias del centro del fuego la temperatura será menor de 500°C?



101. Distancia de frenado Para un cierto modelo de automóvil la distancia d que requiere para detenerse si está viajando a una velocidad v millas/h se encuentra mediante la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde d se mide en pies. Kerry desea que su distancia de frenado no exceda 240 pies. ¿Entre qué rango de velocidad debe viajar?



102. Ganancia de un fabricante Si un fabricante vende x unidades de un cierto producto, sus ingresos R y sus costos C todo en dólares, son

$$R = 20x$$
$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Aplique el hecho de que

$$\text{ganancia} = \text{ingresos} - \text{costos}$$

para determinar cuántas unidades debe vender para disfrutar de una ganancia de por lo menos 2400 dólares.

103. Temperatura del aire A medida que el aire seco asciende, se expande, y al hacerlo se enfría a un ritmo de alrededor de 1°C por cada 100 metros que sube, hasta casi los 12 km.

a) Si la temperatura del suelo es de 20°C, plantee una fórmula para la temperatura a una altura h.

b) ¿Que temperaturas se pueden esperar si un aeroplano despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

104. Precio del boleto de avión Una aerolínea que fleta aviones observa que en sus vuelos del sábado desde Filadelfia a Londres, los 120 lugares se venderán si el precio del boleto es de 200 dólares. Pero por cada 3 dólares de incremento en el precio del boleto, los lugares vendidos disminuirán en uno.

a) Determine una fórmula para el número de lugares vendidos si el precio del boleto es P dólares.

b) En un cierto periodo, el número de lugares vendidos para este vuelo varían entre 90 y 115. ¿Cuál fue el intervalo correspondiente de precios para el boleto?

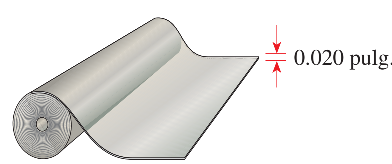
105. Costo de una función de teatro Un barco en el río ofrece funciones de teatro y el viaje en autobús para grupos de personas con las siguientes bases. Alquilar un autobús cuesta al grupo 360 dólares, que los del grupo deben aportar por partes iguales. Los boletos para la función de teatro cuestan normalmente 30 dólares cada uno, pero se les descuentan 25 centavos de dólar por cada persona del grupo. ¿Cuántas personas deben ir en grupo para que el costo de la tarifa del autobús más el boleto de la función de teatro sea de menos de 39 dólares por persona?

106. Cercado de un jardín Una mujer tiene 120 pies de una cerca resistente a los venados. Quiere delimitar un huerto rectangular en su terreno que mida por lo menos 800 pies cuadrados. ¿Qué valores son posibles para el largo de dicho huerto rectangular?

107. Espesor de un material laminado Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con una base de nailon) de 0.020 pulg. de espesor, con una tolerancia de 0.003 pulg.

a) Determine una desigualdad que contenga valores absolutos y que describa el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

b) Resuelva la desigualdad que encontró en el inciso a).



108. Estaturas posibles La estatura promedio de un varón adulto es de 68.2 pulg. y 95% de los varones adultos tiene una altura h que cumple la desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \le 2$$

Resuelva la desigualdad para determinar el intervalo de estaturas.

Descubrimiento • Debate

109. ¿Con las potencias se conserva el orden? Si $a < b$, ¿es $a^2 < b^2$? (Compruebe tanto el valor positivo como el negativo para a y b.) Si $a < b$, ¿es $a^3 < b^3$? Con base en sus observaciones plantee una regla general con respecto a la relación entre a^n y b^n cuando $a < b$ y n es un entero positivo.

110. ¿Qué es lo que está mal aquí? Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver $1 < 3/x$ multiplicando ambos miembros por x, para obtener $x < 3$, de modo que la solución sería $(-\infty, 3)$. Pero esto es falso; por ejemplo, $x = -1$ está en este intervalo, pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense con respecto al *signo* de x). Resuelva luego la desigualdad correctamente.

111. Uso de las distancias para resolver desigualdades que contienen valores absolutos Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre a y b en la recta numérica. Para cualquier número x, ¿qué representan $|x - 1|$ y $|x - 3|$? Aplique esta interpretación para resolver geométricamente la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

1.8 Geometría analítica

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación existente entre las variables de la ecuación. En esta sección se trata el plano coordenado.

El plano coordenado

El plano cartesiano lleva ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650), aunque otro francés, Pierre Fermat (1601-1665) también inventó los principios de la geometría analítica al mismo tiempo. (Véanse sus biografías en las páginas 112 y 652.)

Al igual que los puntos sobre una recta se pueden representar con números reales para formar la recta numérica, los puntos sobre un plano se pueden identificar por medio de pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacerlo, trazamos dos rectas de números reales entre sí y que se cortan en el 0 de cada recta. Por lo regular, una recta es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical y la dirección posi-tiva es hacia arriba; recibe el nombre de **eje *y***. El punto de intersección del eje x y del eje y es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, llamados I, II, III y IV en la figura 1. (Los puntos que se localizan *sobre* los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

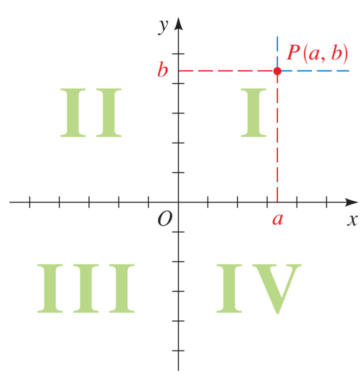


Figura 1

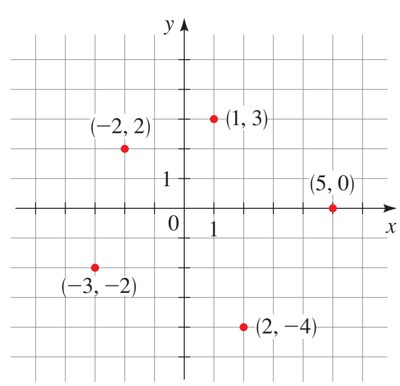


Figura 2

Aunque la notación para un punto (a, b) es la misma que la notación para un intervalo abierto, el contexto debe ayudar a aclarar qué es lo que se quiere representar.

Cualquier punto P en el plano coordenado se puede ubicar por medio de un único **par ordenado** de números (a, b), como se muestra en la figura 1. El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; y el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Podemos pensar que las coordenadas de P son como su "domicilio" porque especifican su ubicación en el plano. En la figura 2 se muestran varios puntos con sus coordenadas.