Solución primer parcial Física II

1. Dos esferas idénticas están atadas a cordones sintéticos de longitud L = 0.75 m y cuelgan de un punto común. Cada esfera tiene masa m = 12 g. El radio de cada esfera es muy pequeño en comparación con la distancia entre ambas, por lo que pueden considerarse cargas puntuales. Se da carga positiva q1 a una esfera, y a la otra carga positiva diferente q2; esto hace que las esferas se separen, de manera que cuando están en equilibrio cada cordón forma un ángulo de 25° con la vertical.

a) Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada esfera cuando están en equilibrio, e indique todas las fuerzas que actúan sobre cada esfera.

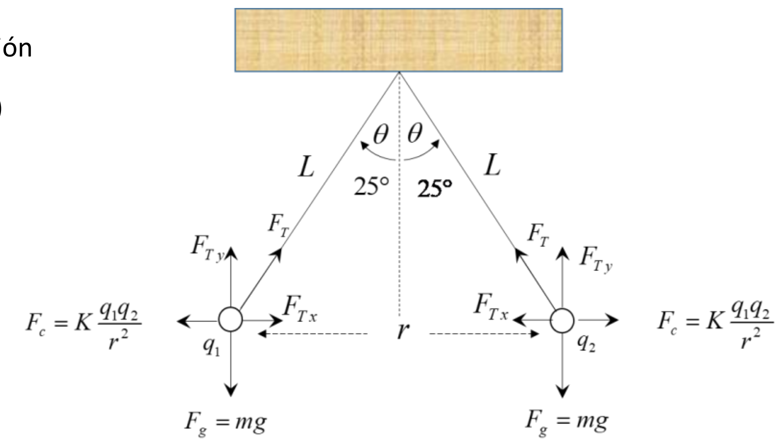
b) Determine la magnitud de la fuerza electrostática que actúa sobre cada esfera, y determine la tensión en cada cordón.

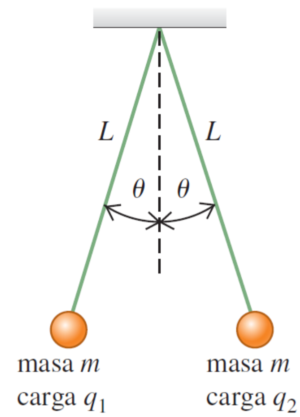
c) Con base en la información proporcionada, ¿qué puede decirse sobre las magnitudes de q1 y q2? Explique sus respuestas.

d) Ahora se conecta un alambre pequeño entre las esferas, lo cual permite que se transfiera carga idealmente de una a otra, hasta que ambas esferas tengan la misma carga; entonces se quita el conductor. Ahora, cada cuerda forma un ángulo de 35° con la vertical. Determine las cargas originales. Considere que se conserva la carga total sobre el par de esferas.

Solución

a)





b) $\frac{r}{2} = Lsen(\theta) = (0,75)sen(25°) = 0,317\text{ m}$ $\qquad r = 2(0,317) = 0,634\text{ m}$

Para la carga q_1

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = (0,012)(9,81)\vec{a}_{-y} = 0,1177\vec{a}_{-y}\text{ N/C}$$

$$\vec{F}_c = K\frac{q_1q_2}{r^2} = \left(9\times10^9\right)\frac{q_1q_2}{(0,64)^2} = 2,1972\times10^{10}\left(q_1q_2\right)\vec{a}_{-x}\text{ N/C}$$

$$|F_T| = \frac{|F_g|}{\cos(\theta)} = \frac{0,1177}{\cos(25°)} = 0,1298\text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = F_T sen(25°) = 0,0548\vec{a}_x\text{ N/C}$$

$$\vec{F}_T = 0,0548\vec{a}_x + 0,1177\vec{a}_y\text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = 0,0548\vec{a}_x\text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Ty} = 0,1177\vec{a}_y\text{ N/C}$$

$$\boxed{\vec{F}_g = 0,1177\vec{a}_{-y}\text{ N/C}} \qquad \boxed{\vec{F}_T = 0,0548\vec{a}_x + 0,1177\vec{a}_y\text{ N/C}} \qquad \boxed{\vec{F}_c = -0,0548\vec{a}_x\text{ N/C}}$$

Para la carga q_2

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = (0,012)(9,81)\vec{a}_{-y} = 0,1177\vec{a}_{-y} \text{ N/C}$$

$$\vec{F}_c = K\frac{q_1q_2}{r^2} = \left(9\times10^9\right)\frac{q_1q_2}{(0,64)^2} = 2,1972\times10^{10}\left(q_1q_2\right)\vec{a}_x \text{ N/C}$$

$$|F_T| = \frac{|F_g|}{\cos(\theta)} = \frac{0,1177}{\cos(25°)} = 0,1298 \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = F_T sen(25°) = 0,0548\vec{a}_x \text{ N/C}$$

$$\vec{F}_T = -0,0548\vec{a}_x + 0,1177\vec{a}_y \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = -0,0548\vec{a}_x \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Ty} = 0,1177\vec{a}_y \text{ N/C}$$

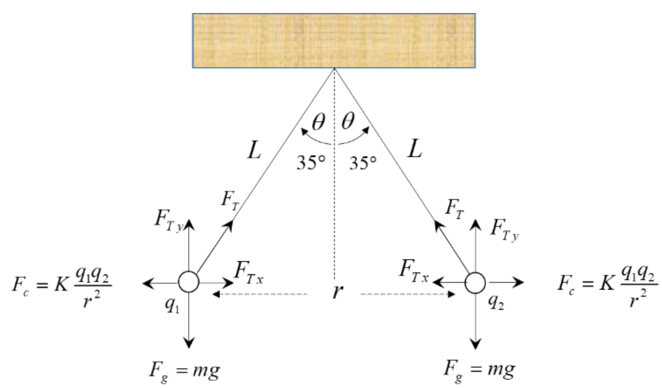
$$\boxed{\vec{F}_g = 0,1177\vec{a}_{-y} \text{ N/C}} \qquad \boxed{\vec{F}_T = -0,0548\vec{a}_x + 0,1177\vec{a}_y \text{ N/C}} \qquad \boxed{\vec{F}_c = 0,0548\vec{a}_x \text{ N/C}}$$

c) Podemos decir que las cargas q_1 y q_2 no necesariamente son iguales y que el producto de las dos es igual a .

$$2,1972\times10^{10}\left(q_1q_2\right) + 0,0548 = 0 \qquad q_1q_2 = \frac{0,0548}{2,1972\times10^{10}} = 2,484\times10^{-12}$$

d) Ahora la carga total original está distribuida de igual manera en las dos cargas, por lo cual $q_1 = q_2$.

El diagrama sería



La distancia r ahora es

$$\frac{r}{2} = Lsen(\theta) = (0,75)sen(35°) = 0,43 \text{ m}$$

$$r = 2(0,43) = 0,86 \text{ m}$$

La fuerza de Coulomb en este caso es

$$\vec{F}_c = K\frac{q_1q_2}{r^2} = \left(9\times10^9\right)\frac{q_1^{\,2}}{(0,86)^2} = 1,2168\times10^{10}\left(q_1^{\,2}\right)\vec{a}_{-x} \text{ N/C}$$

La fuerza total ahora sobre la cuerda F_T será

$$|F_T| = \frac{|F_g|}{\cos(\theta)} = \frac{0,1177}{\cos(35°)} = 0,1428 \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = F_T sen(35°) = 0,0819\vec{a}_x \text{ N/C}$$

$$\vec{F}_T = 0,0819\vec{a}_x + 0,1177\vec{a}_y \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Tx} = 0,08198\vec{a}_x \text{ N/C} \qquad \vec{F}_{Ty} = 0,1177\vec{a}_y \text{ N/C}$$

Al estar el sistema en equilibrio con cargas iguales la fuerza total en x es

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{Tx} = 0$$

$$1,2168\times 10^{10}\left(q_1^{\,2}\right)+0,0819=0$$

De donde $q_1 = \sqrt{\dfrac{0,0819}{1,2168\times 10^{10}}} = 2,5942\times 10^{-6}\text{ C}$ $\qquad q_T = 2\left(2,5942\times 10^{-6}\right) = 5,1885\times 10^{-6}\text{ C}$

Regresando al planteamiento original en el que la condición de equilibrio se da con cargas diferentes y separación de 25° con la vertical, se tiene

$$\vec{F}_c + \vec{F}_{Tx} = 0$$

$$2,1972\times 10^{10}\left(q_1 q_2\right)+0,0548=0 \qquad\qquad q_1 q_2 = \frac{0,0548}{2,1972\times 10^{10}} = 2,484\times 10^{-12}$$

Colocando q_2 en función de q_1 queda $\qquad q_2 = q_T - q_1$

$$q_1\left(q_T - q_1\right) = 2,484\times 10^{-12}$$

Despejando q_1 se obtiene

$$q_T q_1 - q_1^{\,2} = 2,484\times 10^{-12}$$

$$q_1^{\,2} - q_T q_1 + 2,484\times 10^{-12} = 0$$

Aplicando la formula cuadrática

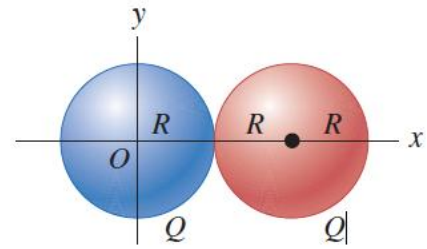
$$q_1 = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{q_T \pm\sqrt{q_T^{\,2}-4\left(2,484\times 10^{-12}\right)}}{2} = \frac{5,1885\times 10^{-6}\pm\sqrt{\left(5,1885\times 10^{-6}\right)^2-4\left(2,484\times 10^{-12}\right)}}{2}$$

$$q_1 = \frac{5,1885\times 10^{-6}-\sqrt{\left(5,1885\times 10^{-6}\right)^2-4\left(2,484\times 10^{-12}\right)}}{2} = 5,3363\times 10^{-7}$$

$$q_2 = \frac{5,1885\times 10^{-6}+\sqrt{\left(5,1885\times 10^{-6}\right)^2-4\left(2,484\times 10^{-12}\right)}}{2} = 4,6548\times 10^{-6}$$

$$\boxed{q_1 = 5,3363\times 10^{-7}} \qquad\qquad \boxed{q_2 = 4,6548\times 10^{-6}}$$

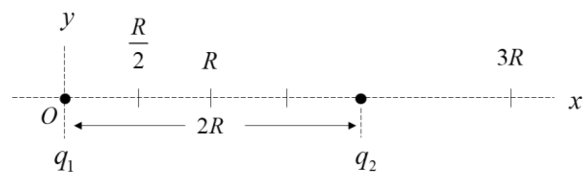
2. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme sobre cada uno de dos volúmenes esféricos con radio R. Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra en x = 2R. Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los siguientes puntos sobre el eje x: a) x = 0; b) x = R/2; c) x = R; d) x = 3R.



Solución:

Para el análisis consideramos toda la carga concentrada en los centros de las esferas.

a) En $x=0$ no hay campo eléctrico debido a la carga concentrada en el origen. Solo hay campo debido a la carga centrada en $2R$.



$$E\left(x=0\right)=-K\frac{Q}{r^2}\vec{a}_x=-K\frac{Q}{\left(2R\right)^2}\vec{a}_x=-K\frac{Q}{4R^2}\vec{a}_x$$

b) En $x=\frac{R}{2}$ hay campo inducido por ambas cargas. La carga centrada en el origen provee un campo debido a la carga encerrada en una esfera de radio $\frac{R}{2}$

La carga total de la esfera izquierda completa corresponde al volumen esférico de radio R multiplicado por la densidad volumétrica de carga ρ. $\quad Q=V_R\rho=\frac{4}{3}\pi\rho R^3$

Para el caso en el que el punto de medida es $x=\frac{R}{2}$, la carga de la izquierda se reduce a un volumen esférico de radio $R/2$. Por lo cual el volumen será $V_{R/2}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3$.

La carga neta encerrada en ese volumen será $Q_1=\rho V_{R/2}=\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R}{2}\right)^3$. Es decir la octava parte de la carga original Q. $Q_1=\frac{Q}{8}$. La carga de la derecha si actúa como una carga puntual a una distancia $3R/2$

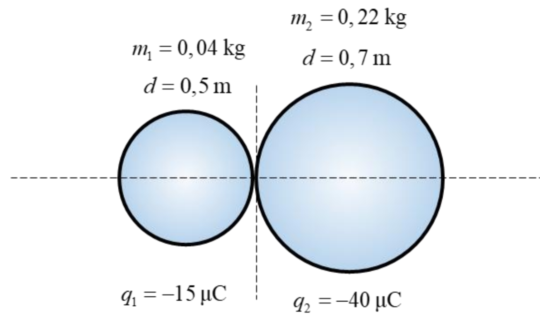
$$E\left(x=\frac{R}{2}\right)=E_1+E_2=K\left(\frac{Q/8}{\left(R/2\right)^2}-\frac{Q}{\left(3R/2\right)^2}\right)=\frac{KQ}{R^2}\left(\frac{1/8}{\left(1/2\right)^2}-\frac{1}{\left(3/2\right)^2}\right)=\frac{KQ}{18R^2}\vec{a}_x$$

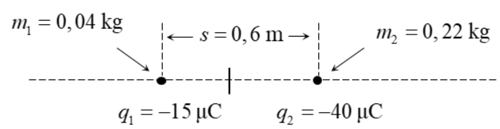
c) En $x=R$ los dos campos se cancelan.

d) En $x=3R$ las dos esferas contribuyen al campo.

$$E\left(x=3R\right)=E_1+E_2=K\left(\frac{Q}{\left(3R\right)^2}+\frac{Q}{R^2}\right)=K\frac{10Q}{9R^2}\vec{a}_x$$

3. Dos esferas de plástico, cada una con carga distribuida de manera uniforme en su interior, entran en contacto inicialmente y luego se liberan. Una esfera mide 50 cm de diámetro, tiene masa de 40 g y contiene –15 micro coulombs de carga. La otra esfera tiene un diámetro de 70 cm, masa de 220 g y contiene –40.0 micro coulombs de carga de carga. Determine la aceleración y la rapidez máximas que alcanza cada esfera (en relación con el punto fijo de su localización inicial en el espacio), suponiendo que no hay más fuerzas que actúen sobre ellas.





Solución:

Utilizamos la expresión

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

Inicialmente las masas están en reposo, con lo cual la energía cinética es igual a cero y toda la energía es de tipo potencial.

$$K_d = 0$$

Calculamos inicialmente la energía potencial considerando la carga de las esferas concentrada en el centro de las mismas.

Al ser cargas de signo igual la energía potencial es positiva

$$U_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_s} = \left(9\text{x}10^9\right)\frac{\left(15\times10^{-6}\right)\left(40\times10^{-6}\right)}{0,6} = 9\text{ J}$$

Al alejarse las masas hacia el infinito la energía potencial se reduce a cero, quedando toda la energía inicial convertida en solo energía cinética. Cada masa adquiere una particular energía cinética que al sumarlas da la energía cinética total del sistema.

$$K_\infty = \frac{1}{2}m_1 v_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2{}^2 = 9\text{ J}$$

Por conservación del momento $m_1 v_1 = m_2 v_2$ $\qquad v_1 = \frac{m_2}{m_1}v_2 \qquad v_1 = \frac{0,22}{0,04}v_2 \qquad v_1 = 5,5v_2$

Reemplazando valores

$$K_\infty = \frac{1}{2}(0,04)(5,5v_2)^2 + \frac{1}{2}(0,22)v_2{}^2 = 4,5\text{ J}$$

Despejando v_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{9}{\left\{\frac{1}{2}(0,04)(5,5)^2 + \frac{1}{2}(0,22)\right\}}} = 3,5478\text{ m/s} \qquad v_1 = \frac{m_2}{m_1}v_2 = (5,5)(3,5478) = 19,5133\text{ m/s}$$

$$\boxed{v_2 = 3,5478\text{ m/s}} \qquad \boxed{v_1 = 19,5133\text{ m/s}}$$

La máxima aceleración se da en el instante mismo en el que las esferas se liberan. Es decir, cuando actúa toda la fuerza de coulomb.

$$\vec{F}_d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_s^{\,2}} = \left(9\text{x}10^9\right)\frac{\left(15\times10^{-6}\right)\left(40\times10^{-6}\right)}{\left(0,6\right)^2} = 15\vec{a}\ \text{N} \qquad \vec{F}_d = ma$$

$$a_1 = \frac{F_d}{m_1} = \frac{15}{0,04} = 375\,\text{m/s}^2 \qquad a_2 = \frac{F_d}{m_2} = \frac{15}{0,22} = 68{,}1818\,\text{m/s}^2$$

$$\boxed{a_1 = 375\,\text{m/s}^2} \qquad \boxed{a_2 = 68{,}1818\,\text{m/s}^2}$$