

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
CALCULO INTEGRAL – PROYECTO CURRICULAR DE ELECTRÓNICA  
**PRIMERA LISTA DE EJERCICIOS (5%)**

1. Sea  $\varphi(x) = |x-3| + |x-1|$ .
  - Graficar  $\varphi(x)$ . Determinar todos los valores de  $t$  tal que  $\varphi(t+2) = \varphi(t)$
  - Si  $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ . Dar la **definición formal** de función.
  - $h(x) = \varphi\left(\frac{x}{2}\right)$ . Describir el dominio y recorrido de  $h(x)$  y dibujar su gráfica.
2. Hallar todos los polinomios  $p(x)$  de grado menor o igual a 2 tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se satisfacen las condiciones dadas:
  - $p(x) = p(1-x)$
  - $p(3x) = p(x+3)$

3. Calcular  $\int_0^9 [\sqrt{x}] dx$  usando la definición de integral para funciones escalonadas.

4. Ilustre la propiedad:

$$\int_{ka}^{kb} s\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b s(x) dx$$

Si  $s(x) = [\sqrt{x}]$ ,  $k = 2$ ,  $[a, b] = [0, 9]$ .

5. Resolver:

(a) Sí  $n \in \mathbb{Z}^+$  **demostrar** que  $\int_0^n [t]^2 dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(b) Sí  $f(x) = \int_0^x [t]^2 dt$  para  $x \geq 0$ . Dibujar la gráfica de  $f$  en el intervalo  $[0, 3]$ .

Justificando su respuesta.

(c) Hallar todos los valores de  $x > 0$  para los que  $\int_0^x [t]^2 dt = 2(x-1)$ .

6. Sean  $f(x) = x - x^2$ ,  $g(x) = ax$ . Determinar  $a$  para que la región situada por encima de la gráfica de  $g$  y por debajo de  $f$  tenga área  $\frac{9}{2}$ . Ilustrar el ejercicio desde el punto de vista geométrico.

7. Usando propiedades de la integral calcular  $\int_{-2}^2 (x-3)\sqrt{4-x^2} dx$ .

**Nota:** Utilizar  $\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

8. Sí en el espacio vectorial  $V = \{f : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es de periodo } 2\pi\}$ , se define un *producto interno* así:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx.$$

*Definición:* Dos funciones  $f, g \in V$  se dicen ortogonales sí  $\langle f, g \rangle = 0$ .

UNIVERSIDAD DISTRITAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS  
CALCULO INTEGRAL – PROYECTO CURRICULAR DE ELECTRÓNICA  
**PRIMERA LISTA DE EJERCICIOS (5%)**

Pruebe que *senos* y *cosenos* son ortogonales, es decir que se cumple (a), (b)

(a)  $\langle \text{sen}(kx), \text{sen}(mx) \rangle = \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\text{sen}(mx)dx = 0 .$

(b)  $\langle \text{sen}(kx), \text{cos}(mx) \rangle = \int_0^{2\pi} \text{sen}(kx)\text{cos}(mx)dx = 0 .$

(c) Probar que  $\langle \text{sen}(kx), \text{sen}(kx) \rangle = \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(kx)dx = \pi .$

9. Calcular la función integral indefinida  $A(x)$  y hallar el valor de  $A(\pi/4)$

(a)  $A(x) = \int_0^x \left( \text{sen}2w + \text{cos} \frac{w}{2} \right) dw$

(b)  $A(x) = \int_{-\pi}^x \left( \frac{1}{2} + \text{cost} \right)^2 dt .$

10. Preguntas conceptuales:

(a) Defina formalmente lo que significa que una función  $f$  sea integrable en  $[a, b]$

(b) ¿Es  $\varphi(x) = |x|$  integrable en el intervalo  $[-1, 1]$  ? Justifique su respuesta.

Y en caso de serlo, ¿Cuál es el valor de su integral?

(c) Calcular  $\int_0^2 |(x-1)(3x-1)| dx$

11. Hallar un polinomio cúbico  $P(x)$  para el cual  $P(0) = P(-2) = 0$ ,  $P(1) = 15$ , y

$$3 \int_{-2}^0 P(x) dx = 4$$

Compruebe que su respuesta es correcta, esto es, que satisface las condiciones dadas.

Calcular

$$\int_0^1 f(x) dx \quad \text{donde} \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{sí } 0 \leq x \leq c \\ c \frac{1-x}{1-c} & \text{sí } c \leq x \leq 1 \end{cases}$$

donde  $c$  es número real fijo,  $0 < c < 1$ .

**Evaluación Teoremas Fundamentales del Cálculo.**

12. Existe una función  $f$ , definida y continua para todo número real  $x$  que satisface una ecuación de la forma

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 t^2 f(t) dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c ,$$

donde  $c$  es una constante. Encontrar una fórmula explícita para  $f(x)$  y hallar el valor de la constante  $c$ .