4.1 Funciones exponenciales

Funciones exponenciales ▶ Gráficas de funciones exponenciales ▶ Interés compuesto

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$\boxed{f(x) = 2^x}$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(10) &= 2^{10} = 1024 \\ f(30) &= 2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824 \end{aligned}$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

$1h \to 2$

$2h \to 2^2 = 4$

$3h \to 2^3 = 8$

$\vdots$

$x \text{ horas} \to 2^x$

$\Downarrow$

$f(x) = 2^x$

Funciones exponenciales

FUNCIONES EXPONENCIALES

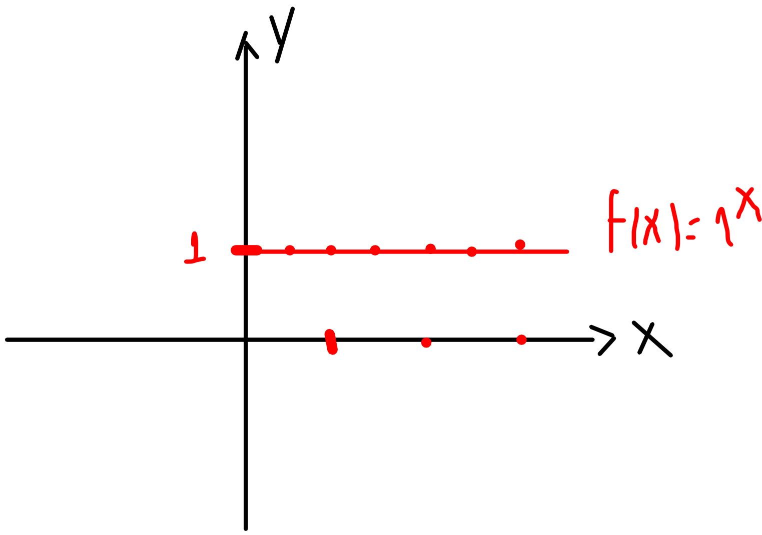
La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$\boxed{f(x) = a^x}$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$\underbrace{f(x) = 2^x}_{\text{Base 2}} \qquad \underbrace{g(x) = 3^x}_{\text{Base 3}} \qquad \underbrace{h(x) = 10^x}_{\text{Base 10}}$$



EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

$\boxed{y^x}$

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

▼ Gráficas de funciones exponenciales

Primero graficamos funciones exponenciales al localizar puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

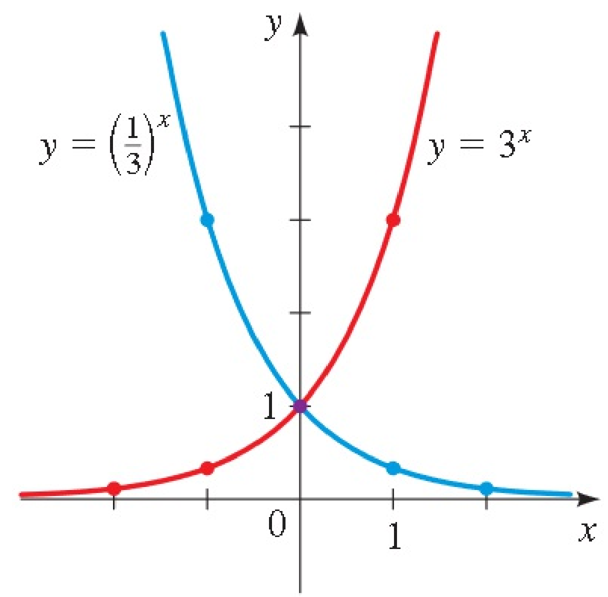


FIGURA 1

Observe que

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)}$$

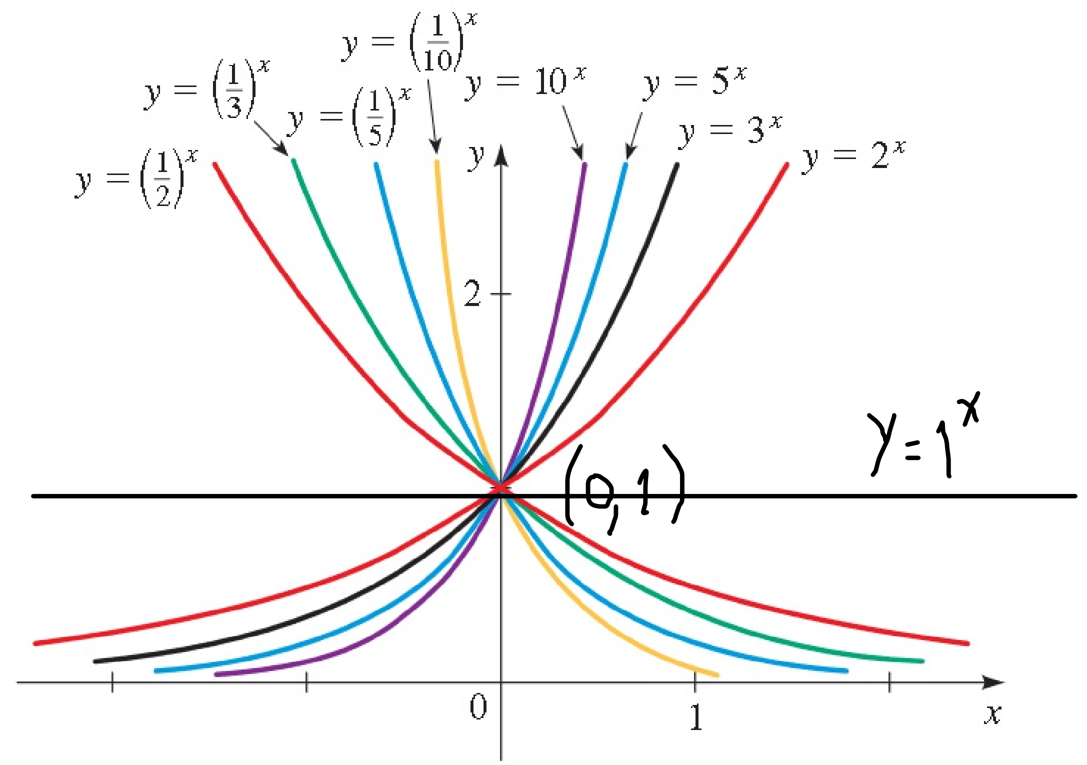
$\Downarrow$

hemos obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f al reflejar en el eje y.

La reflexión de gráficas fueron ya explicadas anteriormente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

FIGURA 2 Una familia de funciones exponenciales



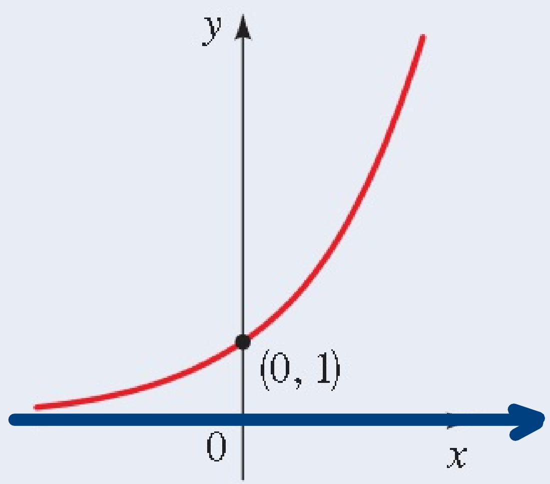
Todas estas gráficas pasan por el punto (0, 1) porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$.
De la Figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales:
si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente.
si $a > 1$, la función exponencial aumenta rápidamente.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

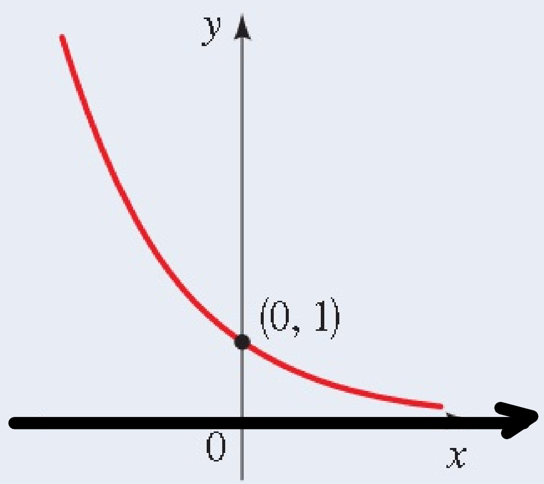
La función exponencial

$$\boxed{f(x) = a^x \qquad (a > 0,\ a \neq 1)}$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.



$\boxed{f(x) = a^x \text{ para } a > 1}$

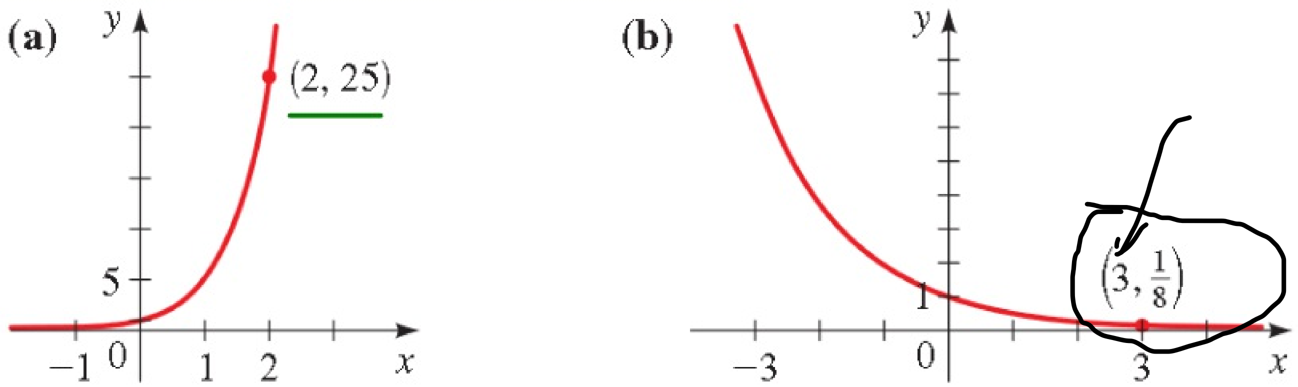


$\boxed{f(x) = a^x \text{ para } 0 < a < 1}$

Conclusiones de la anterior gráfica (Figura 2).

EJEMPLO 3 | Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.



a) $f(2) = a^2 = 25$

$a = 5$

$\Rightarrow f(x) = 5^x$

b) $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$

$a = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

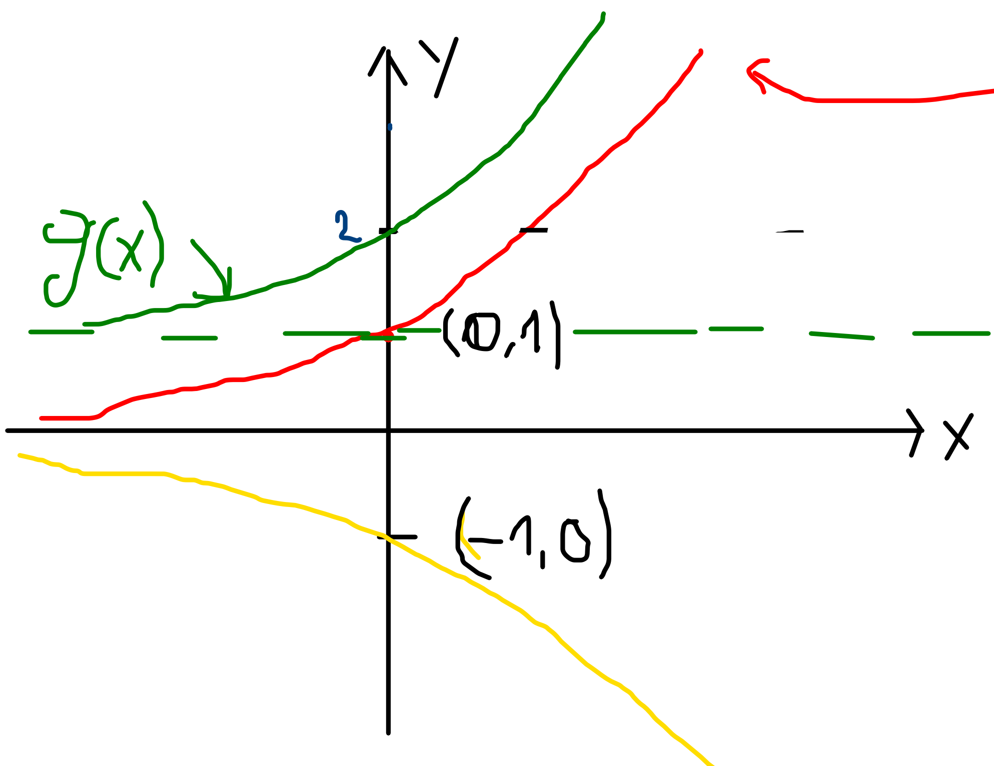
EJEMPLO 4 | Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

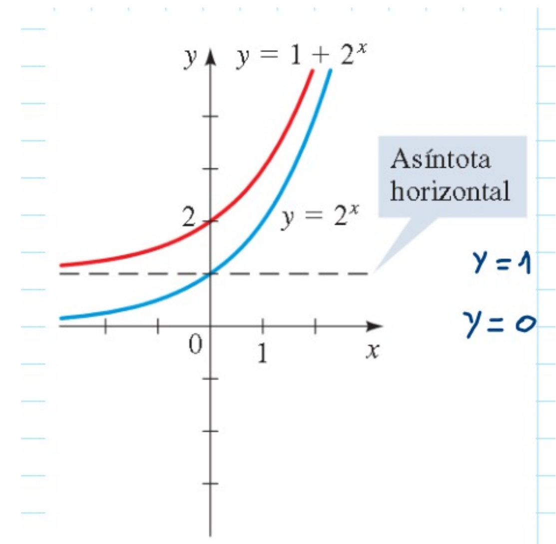
(a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.



$f(x) = 2^x$

$g(x) = 1 + 2^x$

$h(x) = -2^x$



(a)

Interés compuesto

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Si una cantidad de dinero P, llamada **principal**, se invierte a una tasa de interés i por período, entonces después de un período el interés es Pi, y la cantidad A de dinero es

$$\boxed{A = P + Pi = P(1 + i)}$$

Si el interés se reinvierte, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro período es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. Análogamente, después de un tercer período la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k períodos la cantidad es

$$\boxed{A = P(1 + i)^k}$$

Observe que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se capitaliza n veces por año, entonces en cada período la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt períodos en t años. Esto lleva a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años:

$$A = P(1 + i)^K\ ;$$

INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$\boxed{A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

donde

$A(t)$ = cantidad después de t años
P = principal
r = tasa de interés por año
n = número de veces que el interés se capitaliza por año
t = número de años

r se conoce a veces como *tasa nominal de interés anual.*

EJEMPLO 6 | Cálculo de interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensualmente y a diario.

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Solución:

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	\$1404,93
Semestral	2	\$1418,52
Trimestral	4	\$1425,76
Mensual	12	\$1430,77
Diaria	365	\$1433,24

$P = \$1000$

$r = 0,12$

$t = 3$

$$A(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{1}\right)^{(1)(3)} = \$1404,93$$

$$A(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^{(2)(3)} = \$1418,52$$

$$A(3) = 1000\left(1 + \frac{0,12}{4}\right)^{(4)(3)} = \$1425,76$$

4.2 La función exponencial natural

▼ El número e

El número e se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando n se hace grande. (En Cálculo, esta idea se hace más precisa por medio del concepto de un límite. Vea el Capítulo 13.) La tabla siguiente muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores cada vez más grandes de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2,00000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1000	2,71692
10,000	2,71815
100,000	2,71827
1,000,000	2,71828

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Es evidente que, aproximado a cinco lugares decimales, $e \approx 2{,}71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$\boxed{e \approx 2{,}71828182845904523536}$$

Se puede demostrar que e es un número irracional, de modo que no podemos escribir su valor exacto en forma decimal.

El **Gateway Arch** (Arco de Entrada) en St. Louis, Missouri, tiene la forma de la gráfica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer al principio). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(vea Ejercicio 17). Esta forma se escogió porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes telefónicos) cuelgan en forma de catenaria.

La función exponencial natural

El número e es la base para la función exponencial natural. ¿Por qué usamos una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer que con una base como el 10 es más fácil trabajar. Veremos, no obstante, que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. [redacted].

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

Con base e. Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

La notación fue escogida por Leonhard Euler (vea página 266), probablemente por es la primera letra de la palabra *exponencial*.

Como $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se ve en la Figura 1.

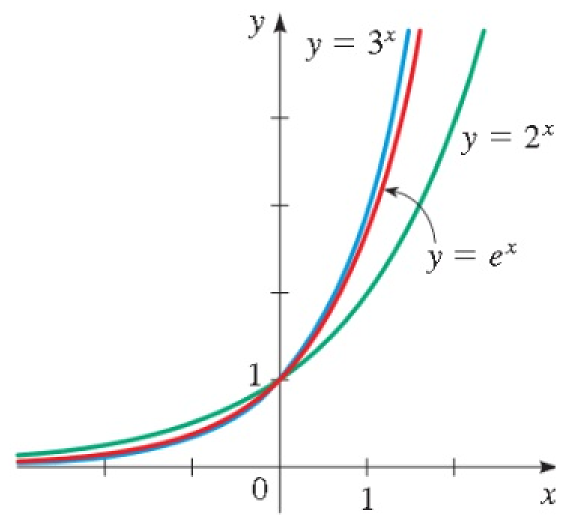


FIGURA 1 Gráfica de la función exponencial natural

EJEMPLO 1 | Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales.

(a) e^3 **(b)** $2e^{-0.53}$ **(c)** $e^{4.8}$

SOLUCIÓN Usamos la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora para evaluar la función exponencial.

(a) $e^3 \approx 20.08554$ **(b)** $2e^{-0.53} \approx 1.17721$ **(c)** $e^{4.8} \approx 121.51042$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

EJEMPLO 2 | Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = e^{-x}$ **(b)** $g(x) = 3e^{0.5x}$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la Figura 2.

(b) Calculamos varios valores, localizamos los puntos resultantes y luego enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades. La gráfica se ilustra en la Figura 3.

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

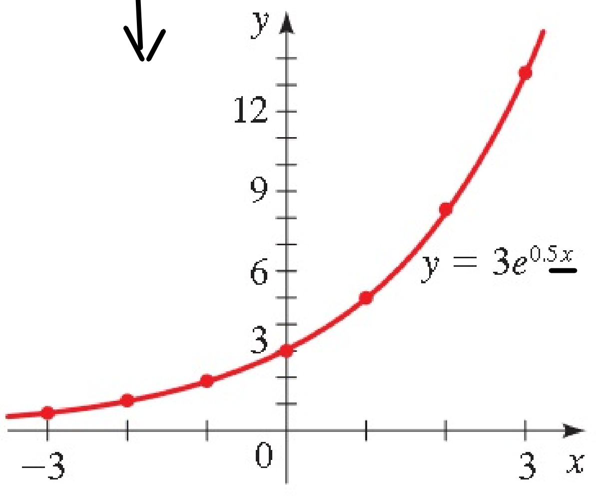


FIGURA 3

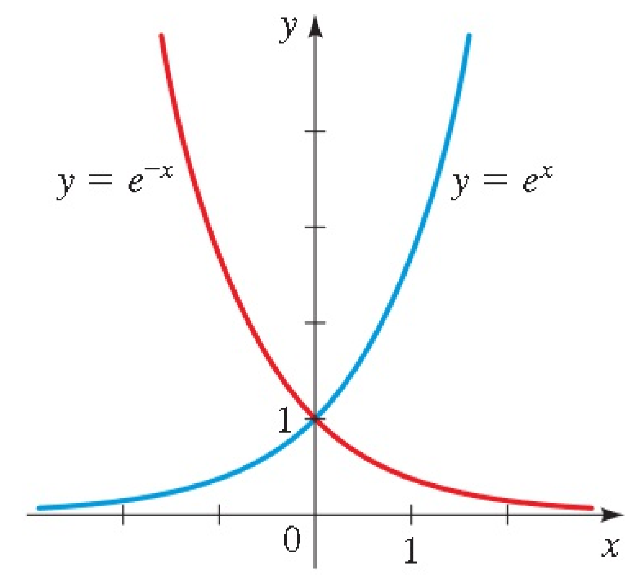


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **7**

EJEMPLO 3 | Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10,000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$\boxed{v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}}$$

(a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

(b) Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.

(c) Grafique la función v y describa su comportamiento.

Días	Personas infectadas
0	8
1	21
2	54
5	678

SOLUCIÓN

a) $v(0) = \dfrac{10000}{5 + 1245\,e^{0}} = \dfrac{10000}{1250} = 8$

b) $v(1) = 21$

$v(2) = 54$

$v(5) = 678$

(c) De la gráfica de la Figura 4 vemos que el número de personas infectadas primero sube lentamente, luego sube con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2000 personas están infectadas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

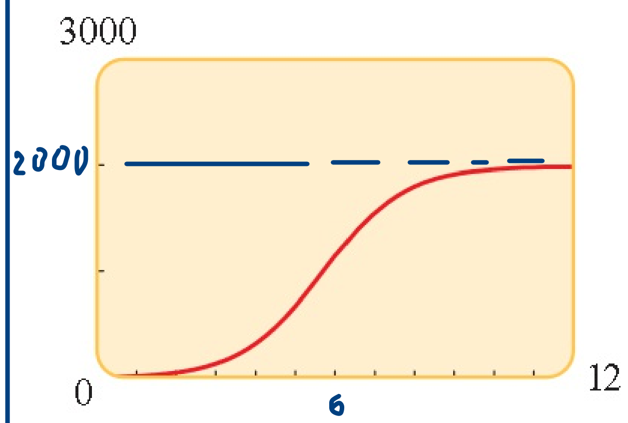


FIGURA 4

$$v(t) = \frac{10{,}000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

La gráfica de la Figura 4 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como ésta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional. (Vea Ejercicios 25-28.)

4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ▶ Gráficas de funciones logarítmicas ▶ Logaritmos comunes ▶ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

▼ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que f^{-1} está definida por

$$\boxed{f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x}$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica:

Función uno a uno o función biunívoca

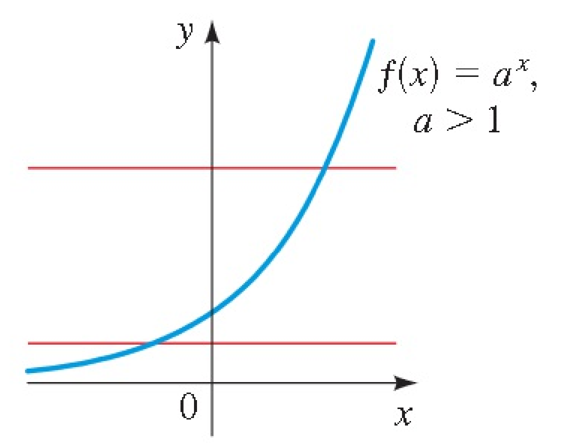


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es biunívoca.

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base a**, denotada por $\log_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base a de x es y".

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Forma logarítmica	Forma exponencial
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

EJEMPLO 1 | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

EJEMPLO 2 | Evaluación de logaritmos

(Fuer die Studenten)

(a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

(b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

(c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

(d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

EJEMPLO 3 | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

Fuer die Studenten

$\log_5 1 = 0$ propiedad 1.

$\log_5 5^8 = 8$ propiedad 3

$\log_5 5 = 1$ propiedad 2

$5^{\log_5 12} = 12$ propiedad 4

Propiedad

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$

Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

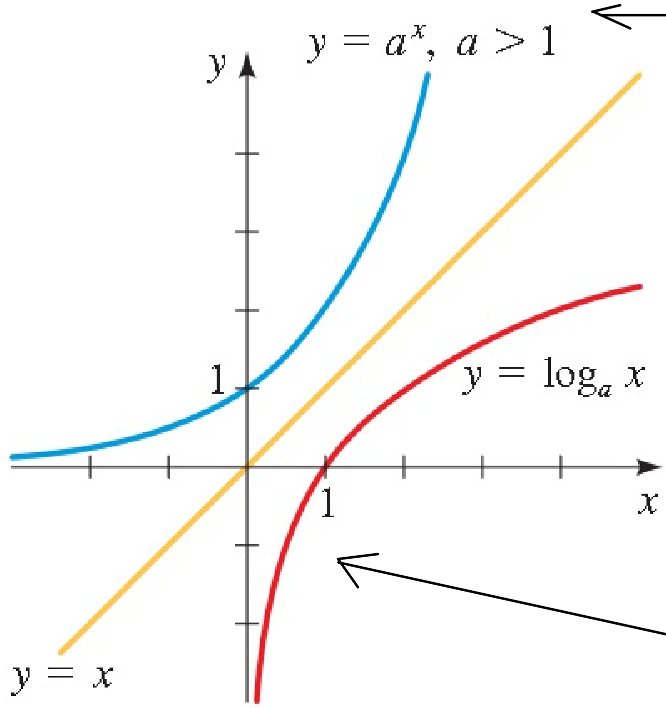


FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Dominio: R
Rango: (0,∞)

Dominio: (0,∞)
Rango: R

EJEMPLO 4 | Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores x que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

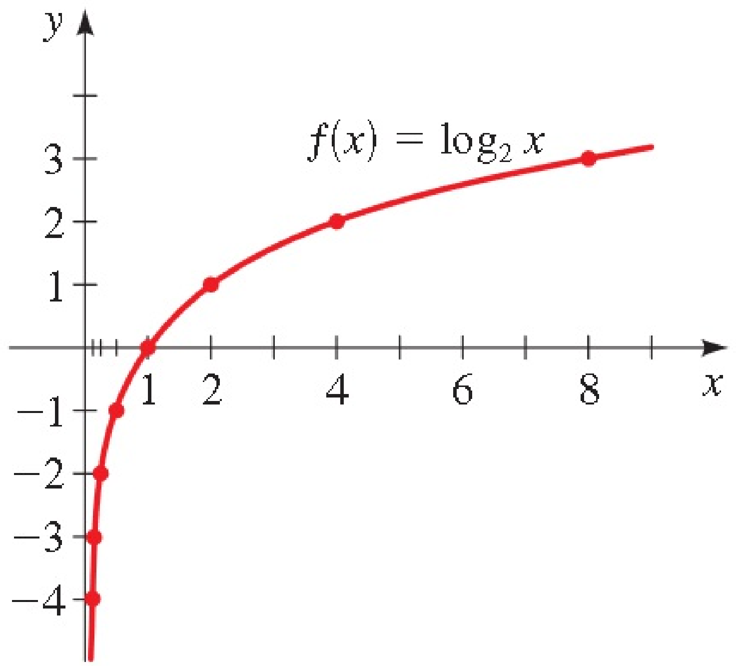


FIGURA 3

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO 41

Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

LOGARITMO COMÚN

El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\boxed{\log x = \log_{10} x}$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

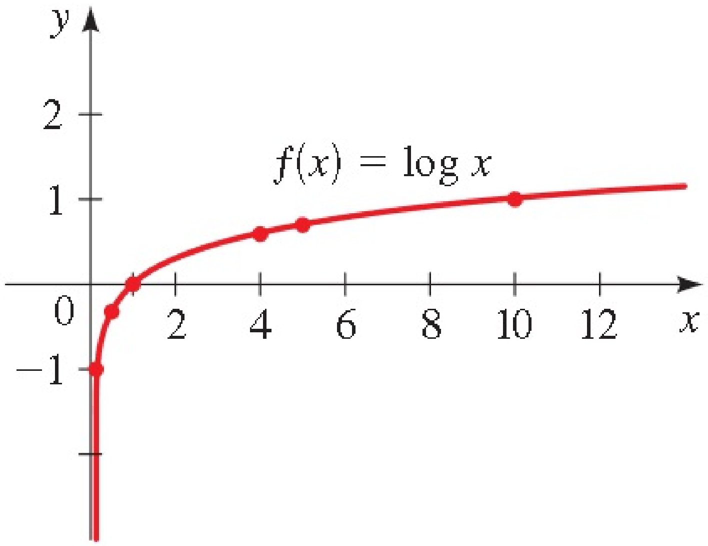


FIGURA 8

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

$$\boxed{B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

SOLUCIÓN Encontramos el nivel de decibeles B usando el hecho de que $I = 100I_0$.:

$$B = 10\log\left(\frac{100\cancel{I_0}}{\cancel{I_0}}\right) =$$

$$= 10\log 100$$

$$= 10 \cdot 2$$

$$= 20 \text{ dB}$$

Logaritmos naturales

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número e, que definimos en la Sección 4.2.

LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln:**

$$\boxed{\ln x = \log_e x}$$

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis.*

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

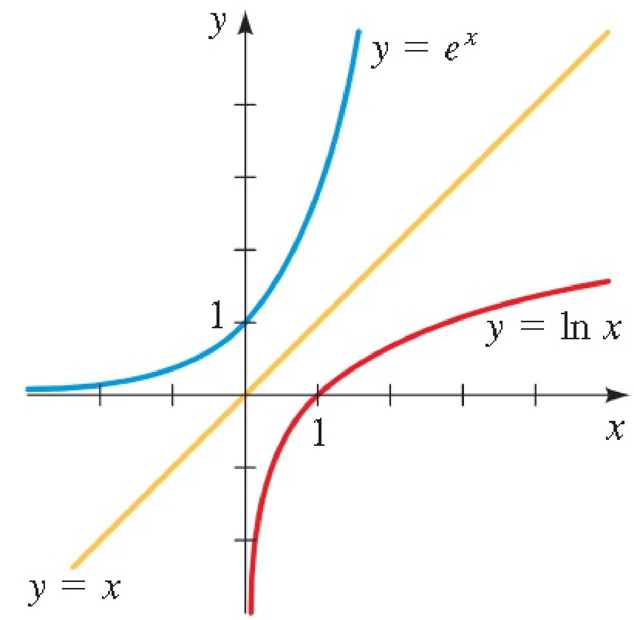


FIGURA 9 Gráfica de la función de logaritmo natural

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales:

PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la que e debe elevarse para obtener x.

Propiedad
1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^x = x$
4. $a^{\log_a x} = x$

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

(a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

(c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Fuer die Studenten

Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

LEYES DE LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8$

a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4 (2 \cdot 32) = \log_4 64 = 3 \quad ; \quad 4^3 = 64$

b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4 \quad ; \quad 2^4 = 16$

c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3} = \log \frac{1}{8^{1/3}} = \log \frac{1}{2} \approx -0{,}301$

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

(a) $\log_2(6x)$ **(b)** $\log_5(x^3y^6)$ **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

Solución:

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

(a) $\log_2(6x)$ **(b)** $\log_5(x^3y^6)$ **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

(b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

(c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19, 21 Y 33**

EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3 \log x + \frac{1}{2} \log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 3 \log x + \tfrac{1}{2} \log(x + 1) &= \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2} && \text{Ley 3} \\ &= \log\left(x^3(x + 1)^{1/2}\right) && \text{Ley 1} \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 47

EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas

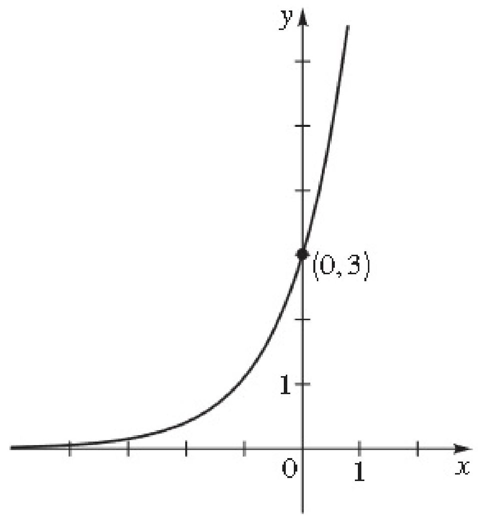
Combine $3 \ln s + \frac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

Fuer die Studenten

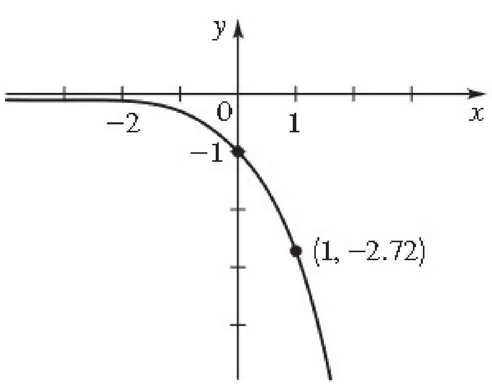
1. natural; 2.71828 **2.** principal, tasa de interés por año, número de años; cantidad después de t años; \$112.75
3. 20.085, 1.259, 2.718, 0.135

5.

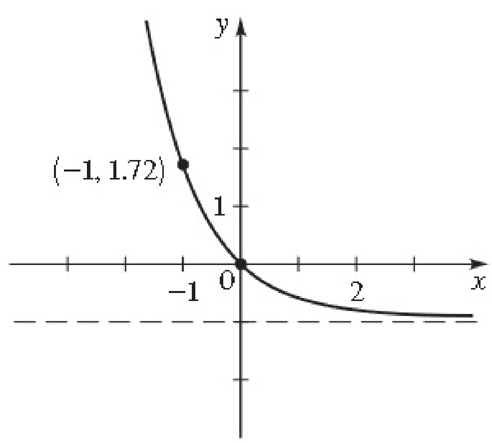
x	y
-2	0.41
-1	1.10
-0.5	1.82
0	3
0.5	4.95
1	8.15
2	22.17



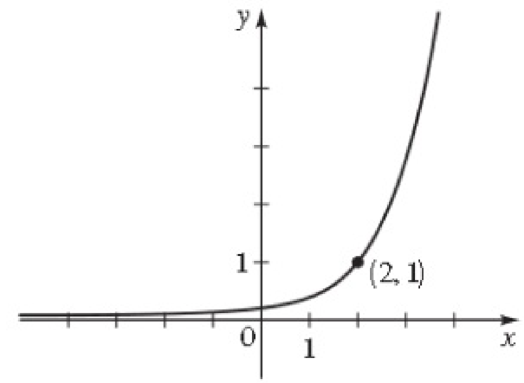
7. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



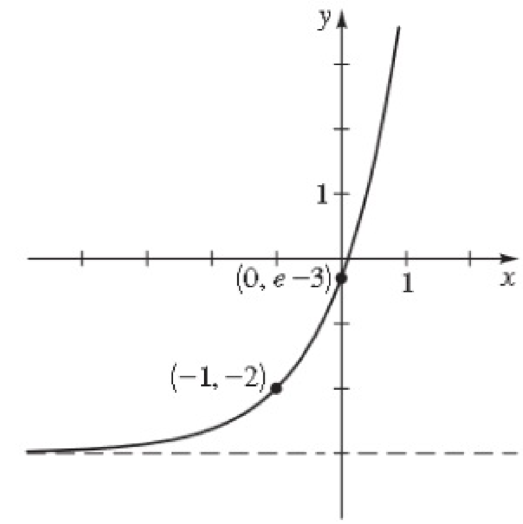
9. $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$



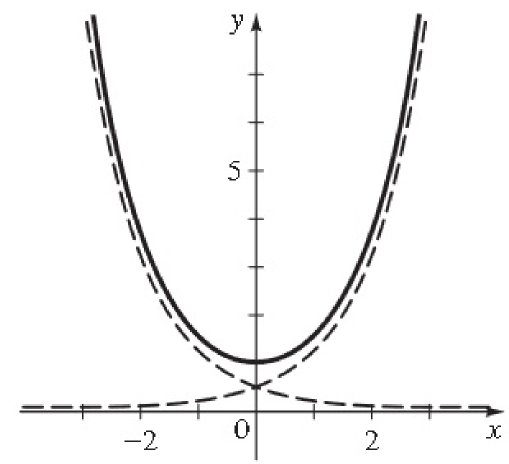
11. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



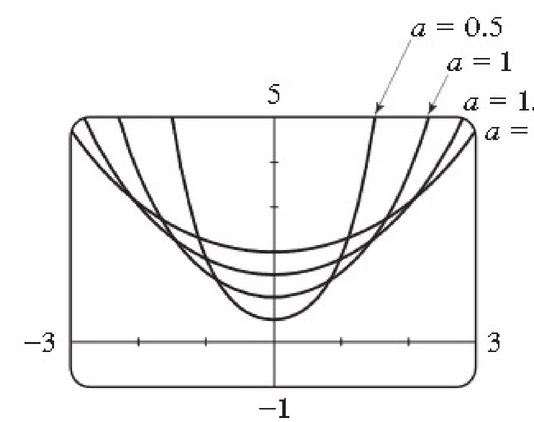
13. $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



15. **(a)**



17. **(a)**



(b) Cuanto mayor sea el valor de a, más ancha es la gráfica.

19. Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$
21. **(a)** 13 kg **(b)** 6.6 kg

Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan $\log_a x$ y deseamos hallar $\log_b x$. Sea

$$\boxed{y = \log_b x}$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$
\begin{aligned}
b^y &= x && \text{Forma exponencial} \\
\log_a(b^y) &= \log_a x && \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado} \\
y \log_a b &= \log_a x && \text{Ley 3} \\
y &= \frac{\log_a x}{\log_a b} && \text{Divida entre } \log_a b
\end{aligned}
$$

FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE

$$\boxed{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}$$

EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

(a) $\log_8 5$ **(b)** $\log_9 20$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\boxed{\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398}$$

(b) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\boxed{\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

FIN TEO.

4.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ______; $f(-2) =$ ______, $f(0) =$ ______, $f(2) =$ ______ y $f(6) =$ ______.

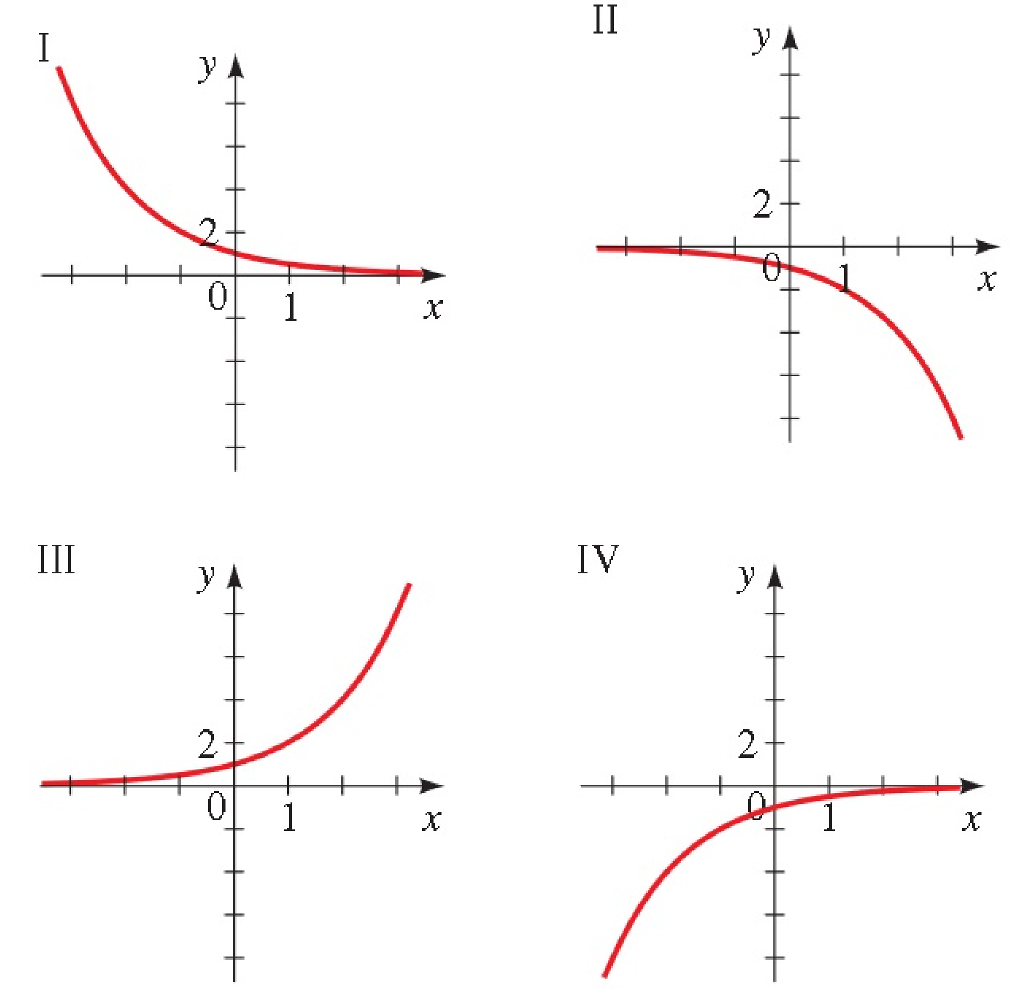
2. Relacione la función exponencial con su gráfica.

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = 2^{-x}$

(c) $f(x) = -2^x$

(d) $f(x) = -2^{-x}$



HABILIDADES

5-10 ■ Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

5. $f(x) = 4^x$; $f(0.5)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\pi)$, $f(\frac{1}{3})$

6. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5)$, $f(\sqrt{3})$, $f(e)$, $f(-\frac{5}{4})$

7. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$; $g(1.3)$, $g(\sqrt{5})$, $g(2\pi)$, $g(-\frac{1}{2})$

8. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7)$, $g(\sqrt{7}/2)$, $g(1/\pi)$, $g(\frac{2}{3})$

15-18 ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

15. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

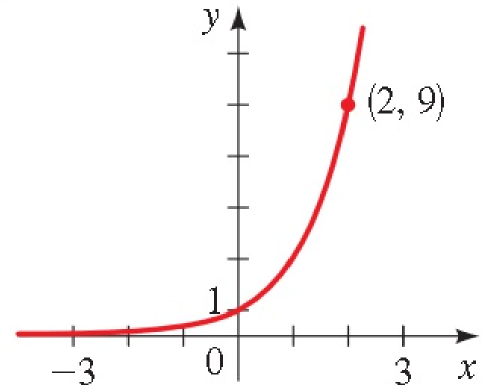
16. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

17. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

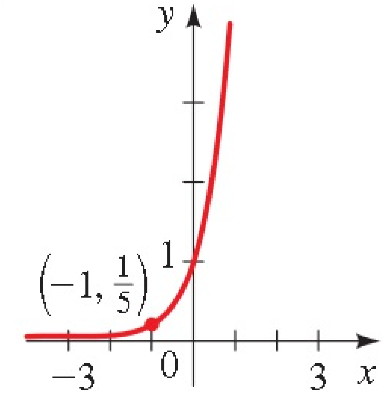
18. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

19-22 ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

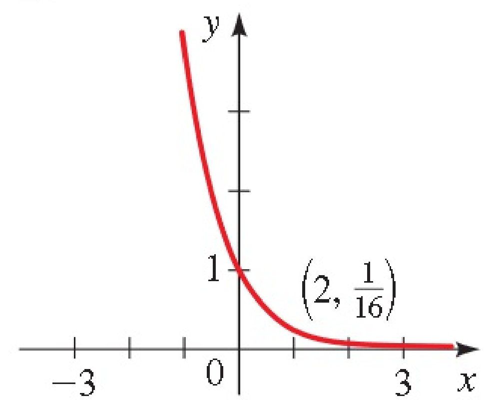
19.



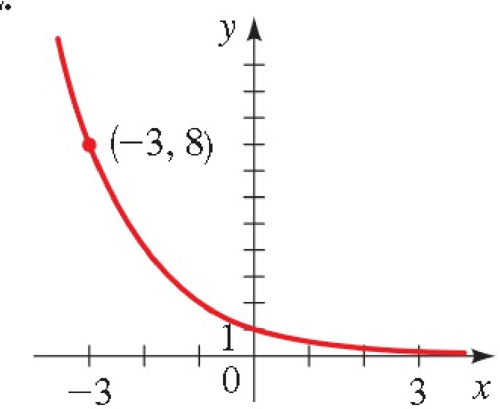
20.



21.



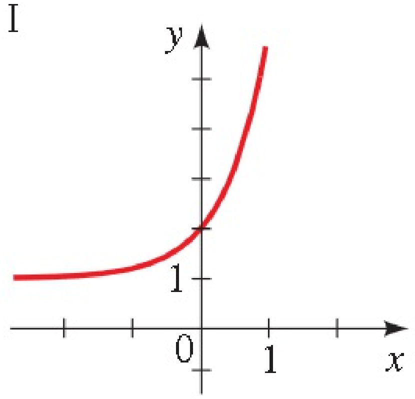
22.



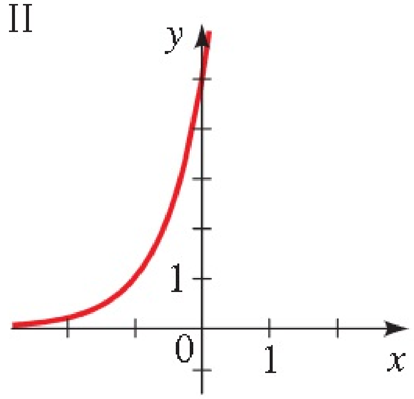
23-24 ■ Relacione la función exponencial con una de las gráficas marcadas I o II.

23. $f(x) = 5^{x+1}$ **24.** $f(x) = 5^x + 1$

I



II



25-36 ■ Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas de la Figura 2. Exprese el dominio, rango y asíntota.

25. $f(x) = -3^x$

26. $f(x) = 10^{-x}$

27. $g(x) = 2^x - 3$

28. $g(x) = 2^{x-3}$

29. $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

30. $h(x) = 6 - 3^x$

31. $f(x) = 10^{x+3}$

32. $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

33. $y = 5^{-x} + 1$

34. $g(x) = 1 - 3^{-x}$

35. $y = 3 - 10^{x-1}$

36. $h(x) = 2^{x-4} + 1$

37. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
(b) ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

APLICACIONES

47. Crecimiento de bacterias Un cultivo de bacterias contiene 1500 bacterias inicialmente y se duplica en cada hora.

(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

(b) Encuentre el número de bacterias después de 24 horas.

48. Población de ratones Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla, con una población inicial de 320 ratones, y los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año.

(a) Encuentre una función que modele el número de ratones después de t años.

(b) Estime la población de ratones después de 8 años.

49-50 ■ Interés compuesto Una inversión de \$5000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o tasas de interés.

49. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

50. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

51. Interés compuesto Si se invierten \$10,000 a una tasa de interés del 3% al año, capitalizada semestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 5 años **(b)** 10 años **(c)** 15 años

53. Interés compuesto Si se invierten \$500 a una tasa de interés del 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 1 año **(b)** 2 años **(c)** 10 años

54. Interés compuesto Si se invierten \$4000 a una tasa de interés del 5.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre la cantidad adeudada al término del número dado de años.
(a) 4 años **(b)** 6 años **(c)** 8 años

57. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana 8% por año, capitalizado mensualmente.

4.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial ______.

   El número e es aproximadamente igual a ______.

HABILIDADES

3-4 ■ Use calculadora para evaluar la función a los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres lugares decimales.

3. $h(x) = e^x$; $h(3), h(0.23), h(1), h(-2)$
4. $h(x) = e^{-2x}$; $h(1), h(\sqrt{2}), h(-3), h(\frac{1}{2})$

5-6 ■ Complete la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace una gráfica de la función.

5.

x	$f(x) = 3e^x$
-2	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	

6.

x	$f(x) = 2e^{-0.5x}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

7-14 ■ Grafique la función, no localizando los puntos sino empezando desde la gráfica de $y = e^x$. Exprese el dominio, rango y asíntota.

7. $f(x) = -e^x$
8. $y = 1 - e^x$
9. $y = e^{-x} - 1$
10. $f(x) = -e^{-x}$
11. $f(x) = e^{x-2}$
12. $y = e^{x-3} + 4$
13. $h(x) = e^{x+1} - 3$
14. $g(x) = -e^{x-1} - 2$

APLICACIONES

20. **Drogas médicas** Cuando cierta droga médica se administra a un paciente, el número de miligramos restante en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas se modela con

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos de la droga quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

21. Desintegración radiactiva Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánto de la masa resta después de 45 días?

22. Desintegración radiactiva Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánta masa resta después de 20 días?

24. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura y, a continuación, se le bombea agua salada con concentración de 0.3 lb/gal al barril, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

(a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

(b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

(c) Trace una gráfica de la función $Q(t)$.

25. Crecimiento logístico Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

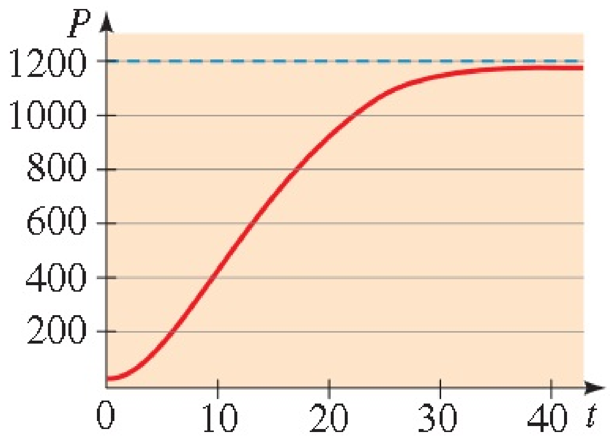
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

(b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

(c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?



26. Población de aves La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo logístico de crecimiento siguiente

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Encuentre la población inicial de aves.

(b) Trace una gráfica de la función $n(t)$.

(c) ¿A qué dimensiones se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

27. Población mundial La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará por último en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

donde $t = 0$ es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

(a) ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?

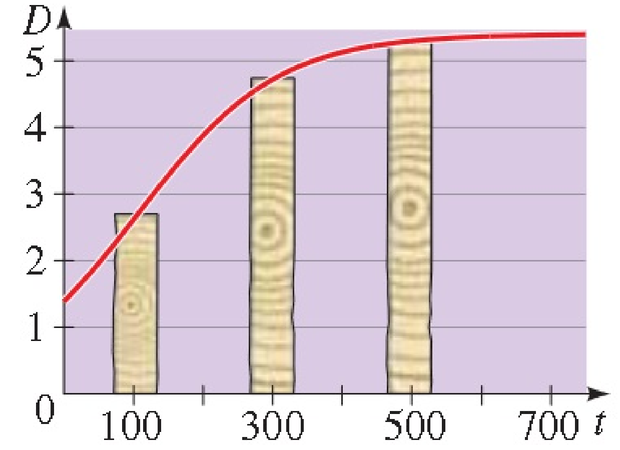
(b) Trace una gráfica de la función P para los años 2000 a 2500.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial a medida que pasa el tiempo?

28. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árboles, el diámetro D (en pies) depende de la edad t del árbol (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico siguiente:

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Encuentre el diámetro de un árbol de 20 años de edad.



4.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. log x es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para log x.

x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
log x								

2. La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, y $f(3) =$ ________.

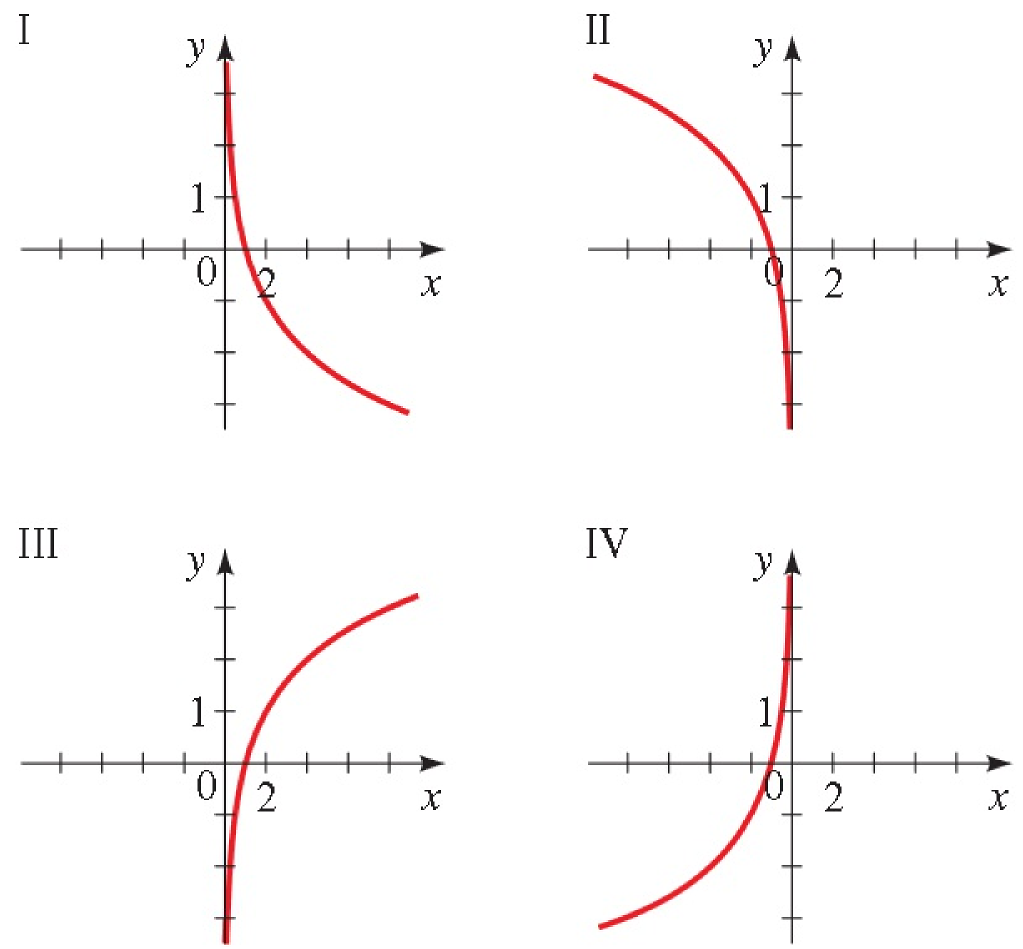
3. **(a)** $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

(b) $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

(a) $f(x) = \log_2 x$ **(b)** $f(x) = \log_2(-x)$

(c) $f(x) = -\log_2 x$ **(d)** $f(x) = -\log_2(-x)$



HABILIDADES

5-6 ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

5.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

6.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

7-12 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

7. **(a)** $\log_5 25 = 2$ **(b)** $\log_5 1 = 0$

8. **(a)** $\log_{10} 0.1 = -1$ **(b)** $\log_8 512 = 3$

9. **(a)** $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **(b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

10. **(a)** $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

11. **(a)** $\ln 5 = x$ **(b)** $\ln y = 5$

12. **(a)** $\ln(x + 1) = 2$ **(b)** $\ln(x - 1) = 4$

13-18 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

13. **(a)** $5^3 = 125$ **(b)** $10^{-4} = 0.0001$

14. **(a)** $10^3 = 1000$ **(b)** $81^{1/2} = 9$

15. **(a)** $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

16. **(a)** $4^{-3/2} = 0.125$ **(b)** $7^3 = 343$

17. **(a)** $e^x = 2$ **(b)** $e^3 = y$

18. **(a)** $e^{x+1} = 0.5$ **(b)** $e^{0.5x} = t$

19. **(a)** $\log_3 3$ **(b)** $\log_3 1$ **(c)** $\log_3 3^2$

20. **(a)** $\log_5 5^4$ **(b)** $\log_4 64$ **(c)** $\log_3 9$

21. **(a)** $\log_6 36$ **(b)** $\log_9 81$ **(c)** $\log_7 7^{10}$

22. **(a)** $\log_2 32$ **(b)** $\log_8 8^{17}$ **(c)** $\log_6 1$

23. **(a)** $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **(b)** $\log_{10}\sqrt{10}$ **(c)** $\log_5 0.2$

24. **(a)** $\log_5 125$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_9 \sqrt{3}$

25. **(a)** $2^{\log_2 37}$ **(b)** $3^{\log_3 8}$ **(c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

26. **(a)** $e^{\ln \pi}$ **(b)** $10^{\log 5}$ **(c)** $10^{\log 87}$

27. **(a)** $\log_8 0.25$ **(b)** $\ln e^4$ **(c)** $\ln(1/e)$

28. **(a)** $\log_4 \sqrt{2}$ **(b)** $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\log_4 8$

29-36 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

29. **(a)** $\log_2 x = 5$ **(b)** $\log_2 16 = x$

30. **(a)** $\log_5 x = 4$ **(b)** $\log_{10} 0.1 = x$

31. **(a)** $\log_3 243 = x$ **(b)** $\log_3 x = 3$

32. **(a)** $\log_4 2 = x$ **(b)** $\log_4 x = 2$

33. **(a)** $\log_{10} x = 2$ **(b)** $\log_5 x = 2$

37-40 ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

37. **(a)** $\log 2$ **(b)** $\log 35.2$ **(c)** $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

38. **(a)** $\log 50$ **(b)** $\log \sqrt{2}$ **(c)** $\log(3\sqrt{2})$

39. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln 25.3$ **(c)** $\ln(1 + \sqrt{3})$

40. **(a)** $\ln 27$ **(b)** $\ln 7.39$ **(c)** $\ln 54.6$

41-44 ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

41. $f(x) = \log_3 x$

42. $g(x) = \log_4 x$

43. $f(x) = 2\log x$

44. $g(x) = 1 + \log x$

53-62 ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

53. $f(x) = \log_2(x - 4)$

54. $f(x) = -\log_{10} x$

55. $g(x) = \log_5(-x)$

56. $g(x) = \ln(x + 2)$

57. $y = 2 + \log_3 x$

58. $y = \log_3(x - 1) - 2$

59. $y = 1 - \log_{10} x$

60. $y = 1 + \ln(-x)$

61. $y = |\ln x|$

62. $y = \ln |x|$

63-68 ■ Encuentre el dominio de la función.

63. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$

64. $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

65. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$

66. $g(x) = \ln(x - x^2)$

67. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

68. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

APLICACIONES

86. **Absorción de luz** Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad I es 70% de I_0.

87. **Determinación de la edad por carbono** La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

88. **Colonia de bacterias** Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

90. Carga de una batería La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por

$$\boxed{t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)}$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

4.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$ ___ + ____.

2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5\left(\frac{25}{125}\right) =$ _________ $-$ _________..

3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia _____ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$ _______.

4. **(a)** Podemos expandir $\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$ para obtener ________.
   (b) Podemos combinar $2 \log x + \log y - \log z$ para obtener ________.

5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base ____ y base ___. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula _____. Para Hallar $\log_7 12$, escribimos

$$\log_7 12 = \frac{\log \square}{\log \square} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

HABILIDADES

7-18 ■ Evalúe la expresión.

7. $\log_3 \sqrt{27}$
8. $\log_2 160 - \log_2 5$
9. $\log 4 + \log 25$
10. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$
11. $\log_4 192 - \log_4 3$
12. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$
13. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
14. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$
15. $\log_4 16^{100}$
16. $\log_2 8^{33}$
17. $\log(\log 10^{10{,}000})$
18. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

19-44 ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19. $\log_2(2x)$
20. $\log_3(5y)$
21. $\log_2(x(x-1))$
22. $\log_5 \dfrac{x}{2}$
23. $\log 6^{10}$
24. $\ln \sqrt{z}$
25. $\log_2(AB^2)$
26. $\log_6 \sqrt[4]{17}$
27. $\log_3(x\sqrt{y})$
28. $\log_2(xy)^{10}$
29. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$
30. $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$

31. $\ln \sqrt{ab}$

32. $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

33. $\log\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$

34. $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4 \sqrt{c}}\right)$

45-54 ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45. $\log_3 5 + 5 \log_3 2$

46. $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$

47. $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$

48. $\log_5(x^2 - 1) - \log_5(x - 1)$

49. $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2 + 1) + 2 \log(x - 1)$

50. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

51. $\ln 5 + 2 \ln x + 3 \ln(x^2 + 5)$

52. $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

55-62 ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

55. $\log_2 5$

56. $\log_5 2$

57. $\log_3 16$

58. $\log_6 92$

59. $\log_7 2.61$

60. $\log_6 532$

61. $\log_4 125$

62. $\log_{12} 2.5$

63. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

APLICACIONES

70. Diversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k \log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

(a) De la ecuación, despeje S.

(b) Use la parte (a) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.

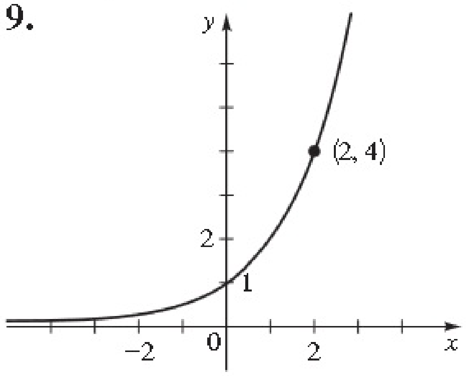
Respuestas a ejercicios impares Capítulo 4.

CAPÍTULO 4

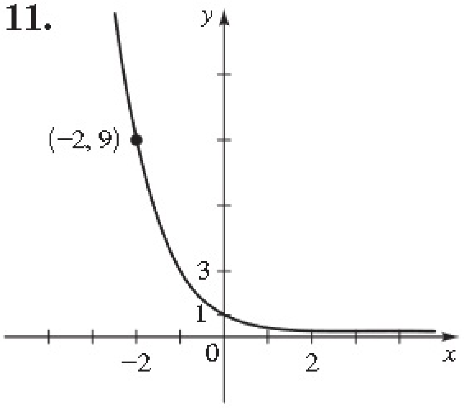
SECCIÓN 4.1 ■ PÁGINA 307

1. 5; $\frac{1}{25}$, 1, 25, 15,625 **2.** **(a)** III **(b)** I **(c)** II **(d)** IV
3. **(a)** hacia abajo **(b)** a la derecha **4.** principal, tasa de interés por año, número de veces que el interés se capitalice por año, número de años, cantidad después de t años: \$112.65 **5.** 2.000, 7.103, 77.880, 1.587 **7.** 0.885, 0.606, 0.117, 1.837

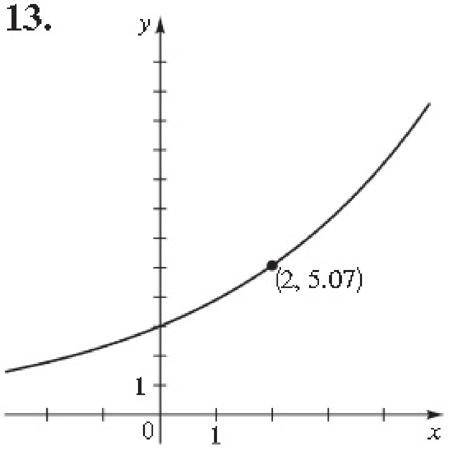
9.



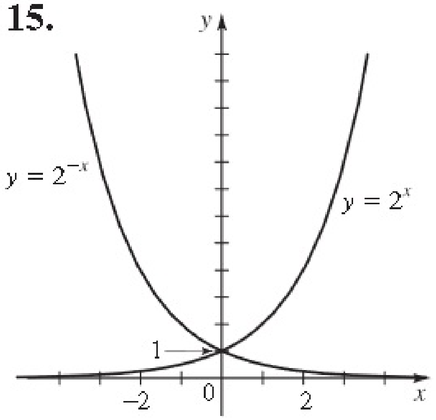
11.



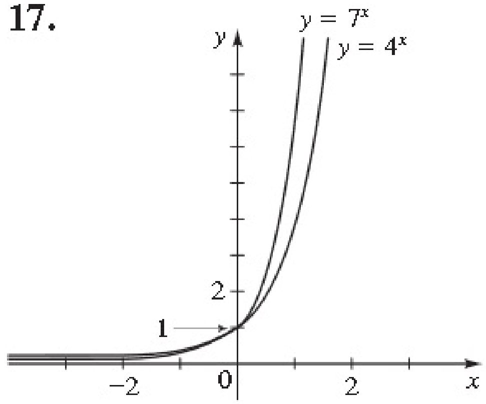
13.



15.

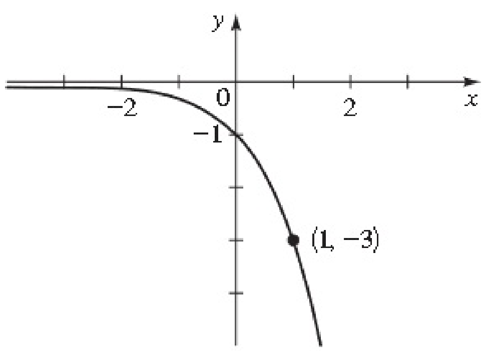


17.

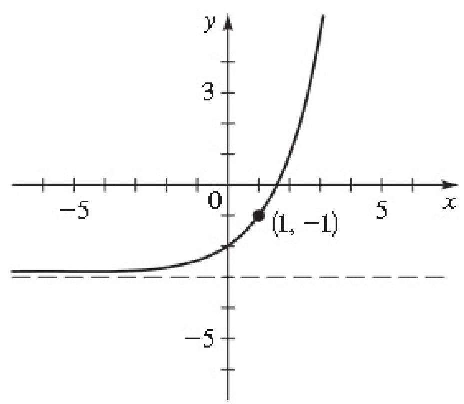


19. $f(x) = 3^x$ **21.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **23.** II

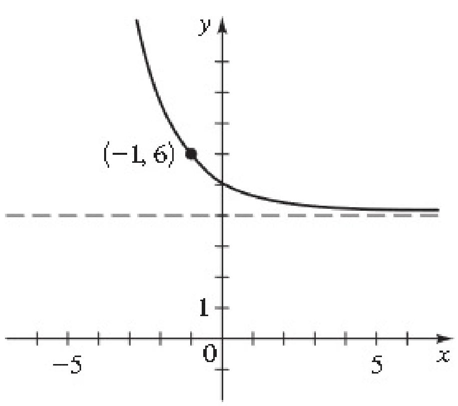
25. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



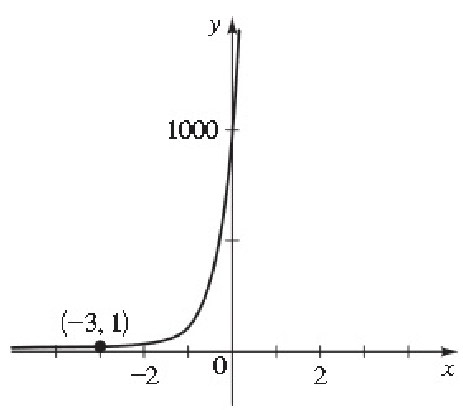
27. $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



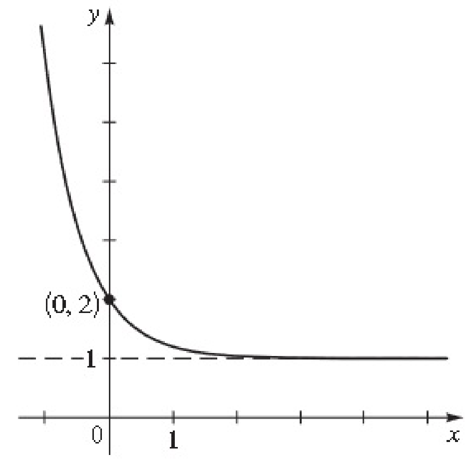
29. $\mathbb{R}, (4, \infty), y = 4$



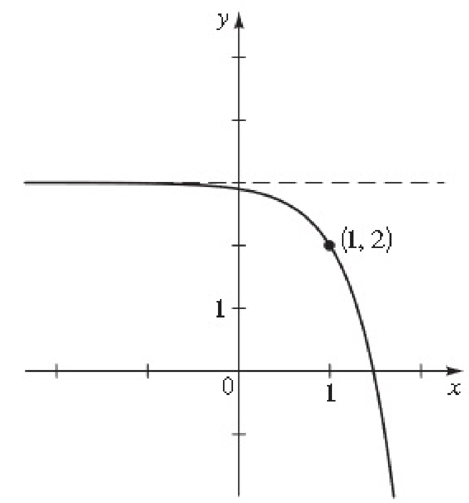
31. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



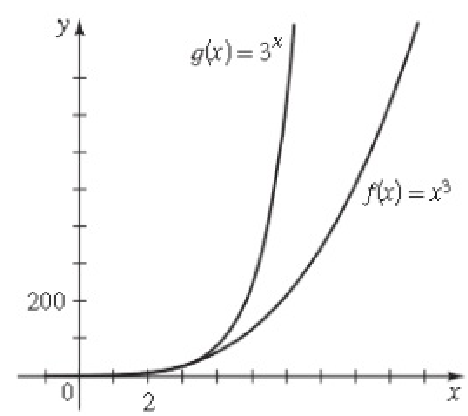
33. $\mathbb{R}, (1, \infty), y = 1$



35. $\mathbb{R}, (-\infty, 3), y = 3$



39.



45. **(a)** Creciente sobre $(-\infty, 0.50]$; decreciente sobre $[0.50, \infty)$
(b) $(0, 1.78]$ **47.** **(a)** $1500 \cdot 2^t$ **(b)** 25,165,824,000
49. \$5203.71, \$5415.71, \$5636.36, \$5865.99, \$6104.98, \$6353.71
51. **(a)** \$11,605.41 **(b)** \$13,468.55 **(c)** \$15,630.80
53. **(a)** \$519.02 **(b)** \$538.75 **(c)** \$726.23 **55.** \$7678.96
57. 8.30%

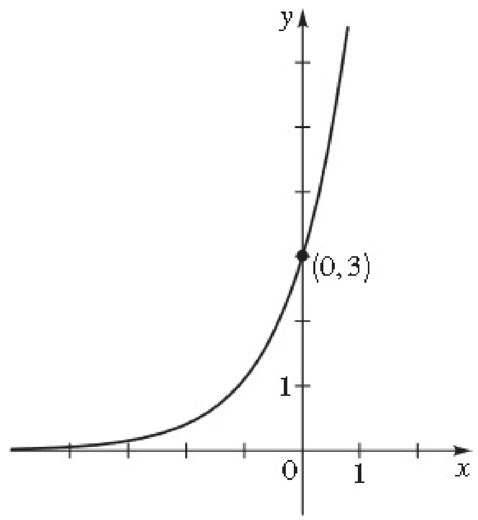
SECCIÓN 4.2 ■ PÁGINA 312

1. natural; 2.71828 **2.** principal, tasa de interés por año, número de años; cantidad después de t años; \$112.75

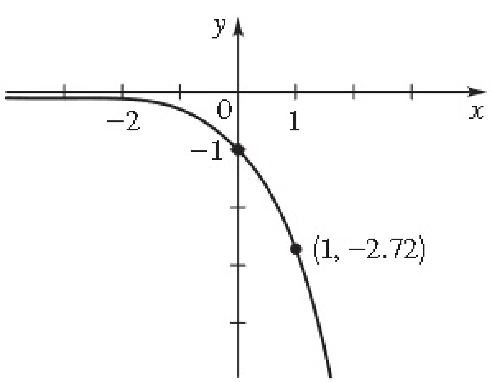
3. 20.085, 1.259, 2.718, 0.135

5.

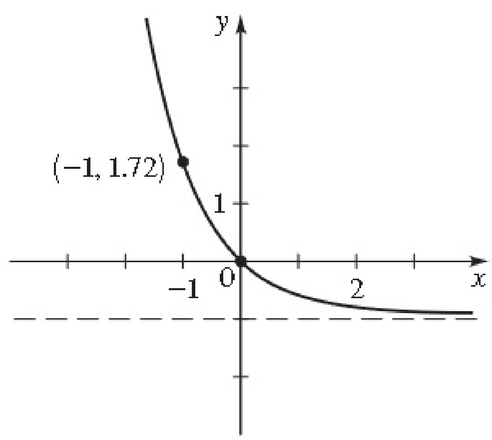
x	y
−2	0.41
−1	1.10
−0.5	1.82
0	3
0.5	4.95
1	8.15
2	22.17



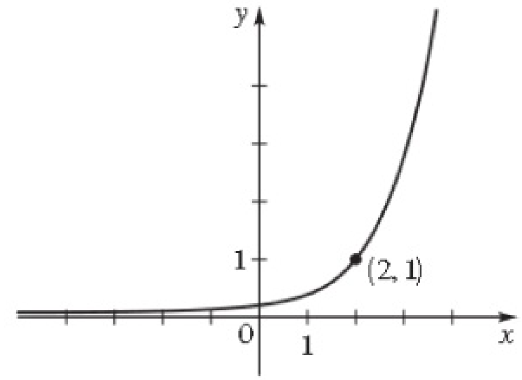
7. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



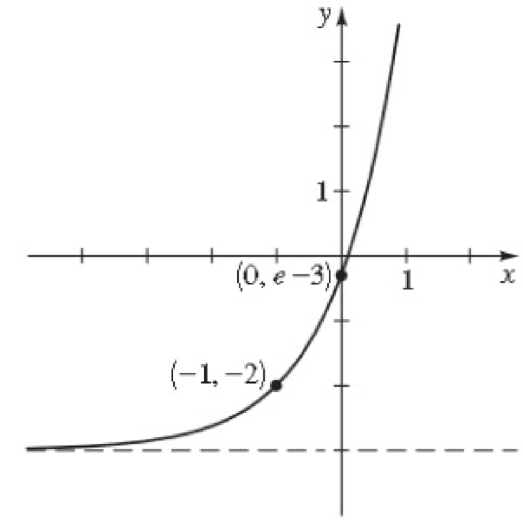
9. $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$



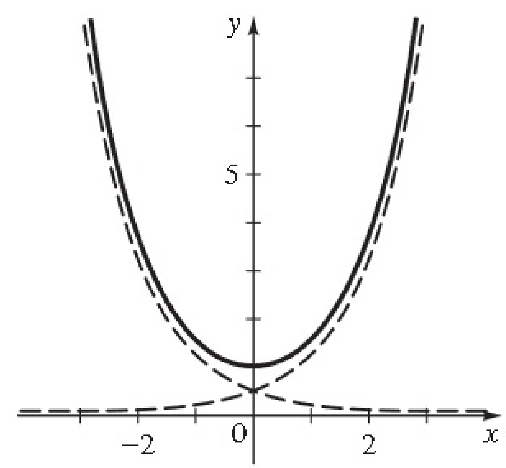
11. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



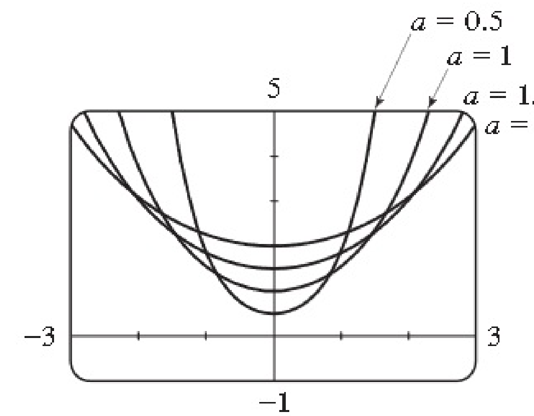
13. $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



15. (a)



17. (a)

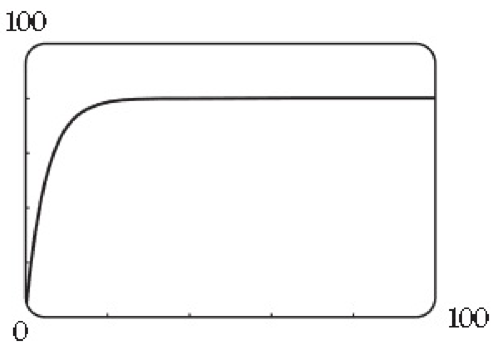


(b) Cuanto mayor sea el valor de a, más ancha es la gráfica.

19. Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$

21. (a) 13 kg **(b)** 6.6 kg

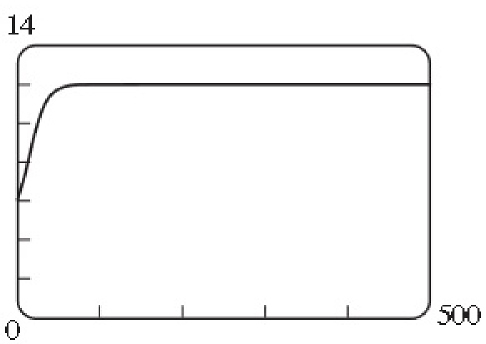
19. Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$
21. **(a)** 13 kg **(b)** 6.6 kg
23. **(a)** 0 **(b)** 50.6 pies/s, 69.2 pies/s
(c)



(d) 80 pies/s

25. **(a)** 100 **(b)** 482, 999, 1168 **(c)** 1200

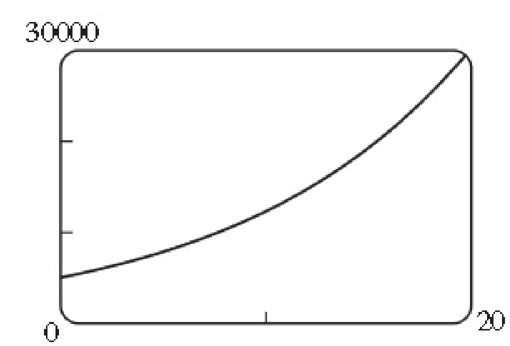
27. **(a)** 11.79 mil millones, 11.97 mil millones
(b)



(c) 12 mil millones

29. \$7213.18, \$7432.86, \$7659.22, \$7892.48, \$8132.84, \$8380.52
31. **(a)** \$2145.02 **(b)** \$2300.55 **(c)** \$3043.92 **33.** **(a)** \$768.05
(b) \$769.22 **(c)** \$769.82 **(d)** \$770.42 **35.** (a) es el mejor.

37. **(a)** $A(t) = 5000e^{0.09t}$ **(b)**



(c) Después de 17.88 años

1. 10^x

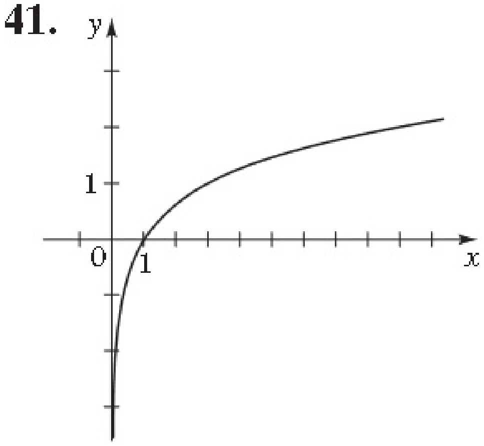
x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
$\log x$	3	2	1	0	-1	-2	-3	$\frac{1}{2}$

2. $9; 1, 0, -1, 2, \frac{1}{2}$
3. **(a)** $\log_5 125 = 3$ **(b)** $5^2 = 25$ **4.** **(a)** III **(b)** II **(c)** I **(d)** IV
5.

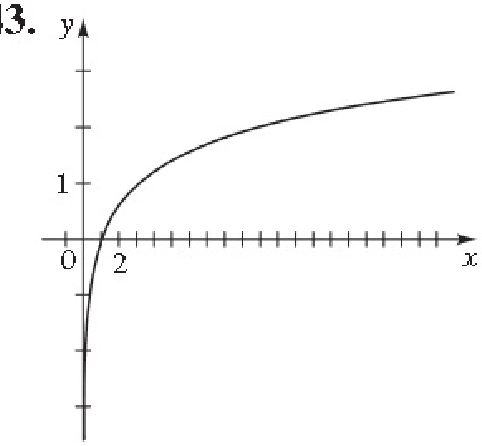
Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	$8^1 = 8$
$\log_8 64 = 2$	$8^2 = 64$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$8^{2/3} = 4$
$\log_8 512 = 3$	$8^3 = 512$
$\log_8 \frac{1}{8} = -1$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$
$\log_8 \frac{1}{64} = -2$	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

7. **(a)** $5^2 = 25$ **(b)** $5^0 = 1$ **9.** **(a)** $8^{1/3} = 2$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$
11. **(a)** $e^x = 5$ **(b)** $e^5 = y$ **13.** **(a)** $\log_5 125 = 3$
(b) $\log_{10} 0.0001 = -4$ **15.** **(a)** $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ **(b)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
17. **(a)** $\ln 2 = x$ **(b)** $\ln y = 3$ **19.** **(a)** 1 **(b)** 0 **(c)** 2
21. **(a)** 2 **(b)** 2 **(c)** 10 **23.** **(a)** -3 **(b)** $\frac{1}{2}$ **(c)** -1
25. **(a)** 37 **(b)** 8 **(c)** $\sqrt{5}$ **27.** **(a)** $-\frac{2}{3}$ **(b)** 4 **(c)** -1
29. **(a)** 32 **(b)** 4 **31.** **(a)** 5 **(b)** 27 **33.** **(a)** 100 **(b)** 25
35. **(a)** 2 **(b)** 4 **37.** **(a)** 0.3010 **(b)** 1.5465 **(c)** -0.1761
39. **(a)** 1.6094 **(b)** 3.2308 **(c)** 1.0051

41.

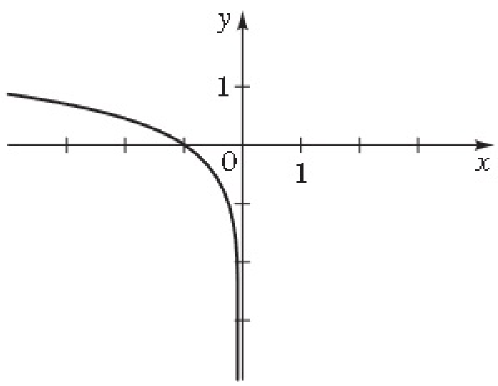


43.

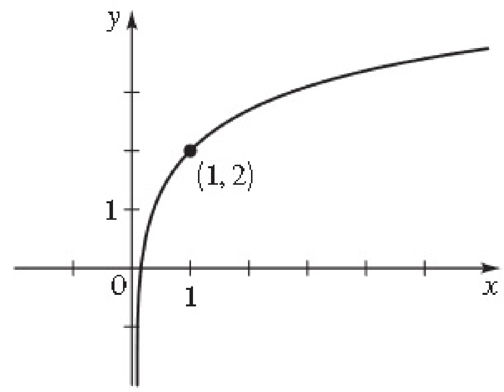


45. $y = \log_5 x$ **47.** $y = \log_9 x$ **49.** I

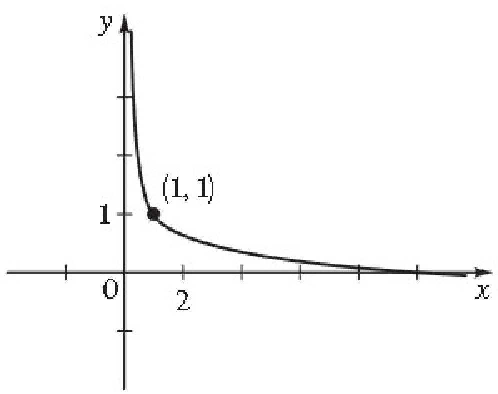
55. $(-\infty, 0), \mathbb{R}, x = 0$



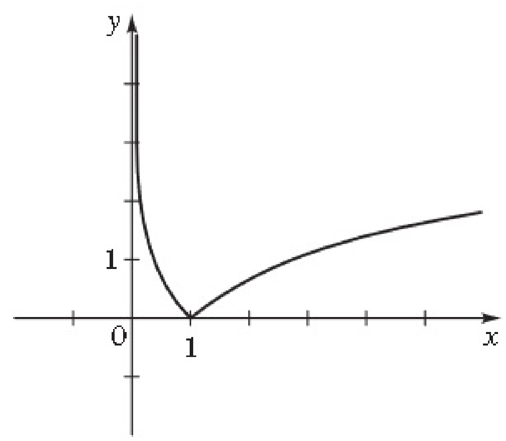
57. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



59. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



61. $(0, \infty), [0, \infty), x = 0$



63. $(-3, \infty)$ **65.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **67.** $(0, 2)$

83. **(a)** $(1, \infty)$ **(b)** $f^{-1}(x) = 10^{2^x}$

85. **(a)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{1 - x}\right)$ **(b)** $(0, 1)$ **87.** 2602 años

89. 11.5 años, 9.9 años, 8.7 años **91.** 5.32, 4.32

1. suma; $\log_5 25 + \log_5 125 = 2 + 3$
2. diferencia; $\log_5 25 - \log_5 125 = 2 - 3$
3. por el; $10 \cdot \log_5 25$
4. **(a)** $2 \log x + \log y - \log z$
(b) $\log\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$

5. 10, e; Cambio de Base; $\log_7 12 = \dfrac{\log 12}{\log 7} = 1.277$

6. Verdadero **7.** $\frac{3}{2}$ **9.** 2 **11.** 3 **13.** 3 **15.** 200 **17.** 4
19. $1 + \log_2 x$ **21.** $\log_2 x + \log_2(x - 1)$
23. $10 \log 6$ **25.** $\log_2 A + 2 \log_2 B$ **27.** $\log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y$
29. $\frac{1}{3}\log_5(x^2 + 1)$ **31.** $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$
33. $3 \log x + 4 \log y - 6 \log z$
35. $\log_2 x + \log_2(x^2 + 1) - \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 1)$
37. $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$ **39.** $\frac{1}{4}\log(x^2 + y^2)$
41. $\frac{1}{2}[\log(x^2 + 4) - \log(x^2 + 1) - 2 \log(x^3 - 7)]$
43. $3 \ln x + \frac{1}{2}\ln(x - 1) - \ln(3x + 4)$ **45.** $\log_3 160$

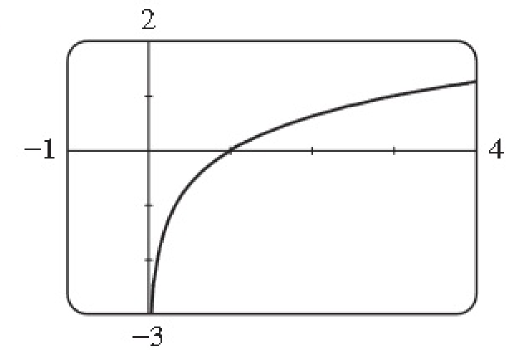
47. $\log_2(AB/C^2)$ **49.** $\log\left(\dfrac{x^4(x - 1)^2}{\sqrt[3]{x^2 + 1}}\right)$

51. $\ln(5x^2(x^2 + 5)^3)$

53. $\log\left(\dfrac{x^2}{x - 3}\right)$ **55.** 2.321928 **57.** 2.523719

59. 0.493008 **61.** 3.482892

63.



69. **(a)** $P = c/W^k$ **(b)** 1866, 64
71. **(a)** $M = -2.5 \log B + 2.5 \log B_0$

81. 13 días **83.** **(a)** 7337 **(b)** 1.73 años **85.** **(a)** $P = P_0 e^{-h/k}$
(b) 56.47 kPa **87.** **(a)** $t = -\frac{5}{13}\ln(1 - \frac{13}{60} I)$ **(b)** 0.218 s