1.5 ECUACIONES

Solución de ecuaciones lineales ▶ Solución de ecuaciones cuadráticas ▶ Otros tipos de ecuaciones

Una ecuación es un enunciado de que dos expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3 + 5 = 8$$

es una ecuación. Casi todas las ecuaciones que estudiamos en álgebra contienen variables, que son símbolos (por lo general literales) que representan números. En la ecuación

$$4x + 7 = 19$$

la letra x es la variable. Consideramos x como la “incógnita” de la ecuación, y nuestro objetivo es hallar el valor de x que haga que la ecuación sea verdadera. Los valores de la incógnita que hagan que la ecuación sea verdadera se denominan **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso de hallar las soluciones se llama **resolver la ecuación.**

$x = 3$ es una solución de la ecuación $4x + 7 = 19$, porque sustituir $x = 3$ hace verdadera la ecuación:

$$x = 3$$

$$4(3) + 7 = 19 \quad ✔$$

$$19 = 19$$

Para resolver una ecuación, tratamos de hallar una ecuación equivalente más sencilla en la que la variable está sólo en un lado del signo "igual".
A continuación veamos las propiedades que usamos para resolver una ecuación.
(En estas propiedades, A, B y C representan cualesquiera expresiones algebraicas, y el símbolo <=> significa "es equivalente a".)

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Propiedad	Descripción
1. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad A + C = B + C$	Sumar la misma cantidad a ambos lados de una ecuación da una ecuación equivalente.
2. $A = B \quad \Leftrightarrow \quad CA = CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos lados de una ecuación por la misma cantidad diferente de cero da una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que el estudiante *ejecute la misma operación en ambos lados de una ecuación* al resolverla. Entonces, si decimos "*sume* −7" al resolver una ecuación, es una forma breve de decir "*sume* −7 a cada lado de la ecuación".

▼ Solución de ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es una *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la que cada término es una constante o un múltiplo diferente de cero de la variable.

ECUACIONES LINEALES

Una **ecuación lineal** en una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$\boxed{ax + b = 0} \longleftarrow$$

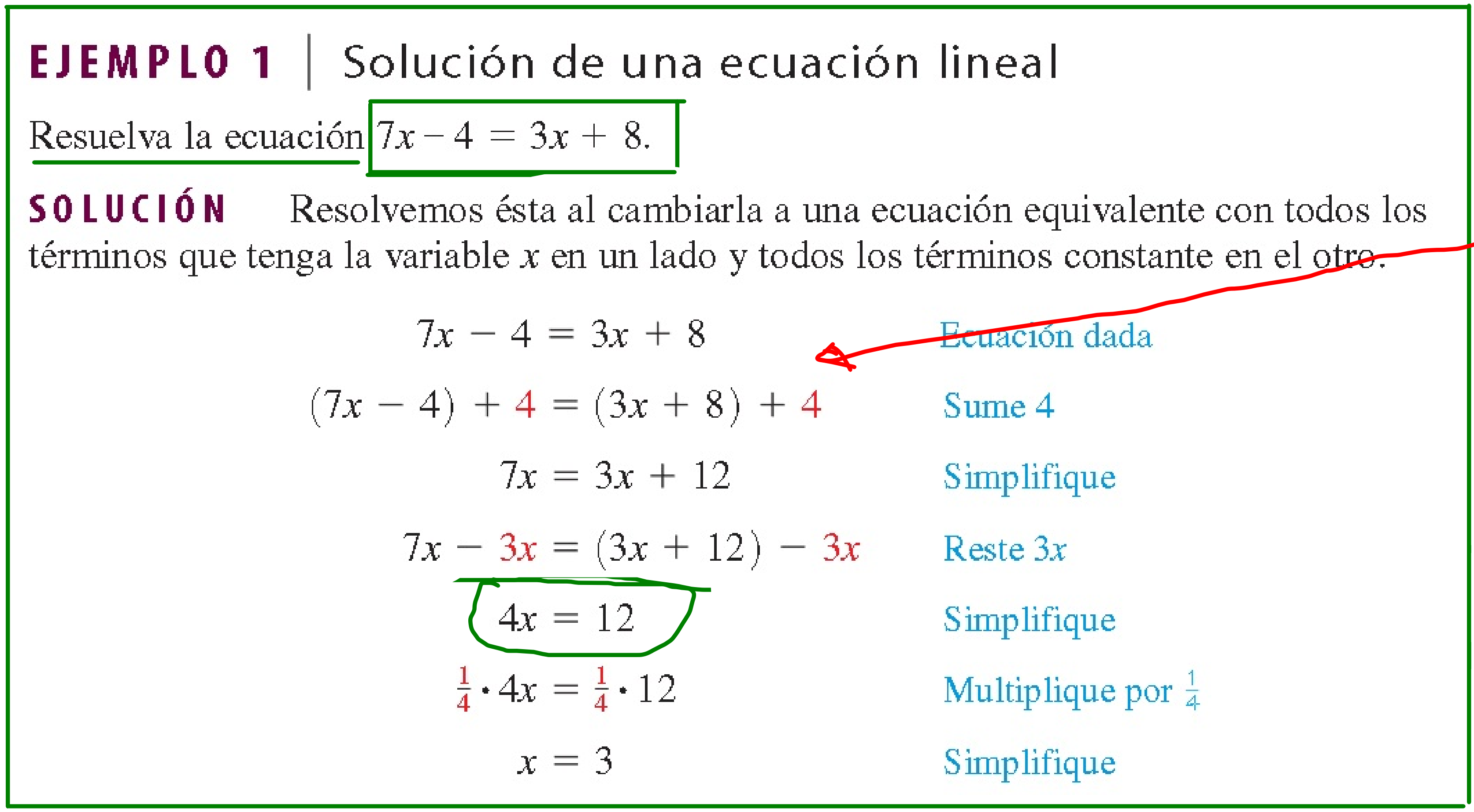
donde a y b son números reales y x es la variable.

$$a x^{\textcircled{1}} = a x$$

$$a \underset{\uparrow}{x} + b = 0$$

veamos algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales. $\Rightarrow$

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal; contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \dfrac{x}{3}$	$\dfrac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal; contiene el recíproco de la variable



EJEMPLO 1 | Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $\boxed{7x - 4 = 3x + 8.}$

SOLUCIÓN Resolvemos ésta al cambiarla a una ecuación equivalente con todos los términos que tenga la variable x en un lado y todos los términos constante en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4 \qquad \text{Sume 4}$$

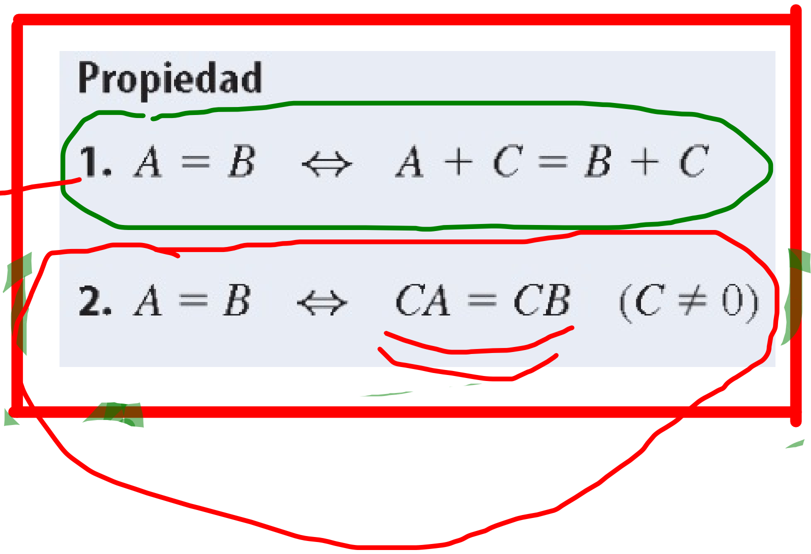
$$7x = 3x + 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x \qquad \text{Reste } 3x$$

$$4x = 12 \qquad \text{Simplifique}$$

$$\tfrac{1}{4} \cdot 4x = \tfrac{1}{4} \cdot 12 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{1}{4}$$

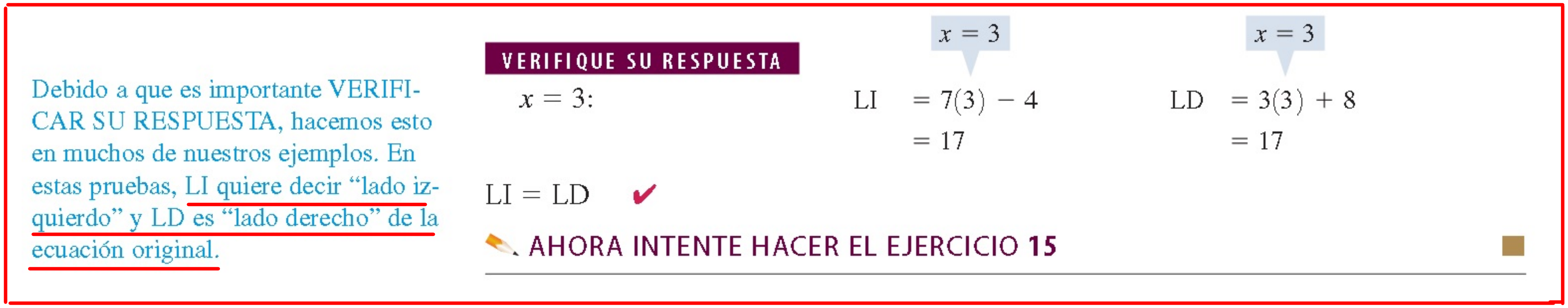
$$x = 3 \qquad \text{Simplifique}$$



Propiedad

1. $A = B \iff A + C = B + C$

2. $A = B \iff CA = CB \quad (C \neq 0)$



Debido a que es importante VERIFICAR SU RESPUESTA, hacemos esto en muchos de nuestros ejemplos. En estas pruebas, LI quiere decir "lado izquierdo" y LD es "lado derecho" de la ecuación original.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 3$:

$x = 3$

LI $= 7(3) - 4$

$= 17$

$x = 3$

LD $= 3(3) + 8$

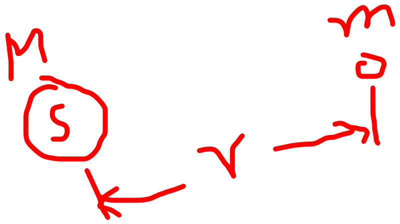
$= 17$

LI = LD ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15** ■

En las ciencias, muchas fórmulas involucran varias variables, por lo que es necesario expresar una en términos de otras. En el siguiente ejemplo, resolvemos la ley gravitacional de Newton para una variable.

Ésta es la Ley de Newton de Gravitación Universal. Da la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están a una distancia r entre sí. La constante G es la constante universal de gravitación.



EJEMPLO 2 | Solución para una variable en términos de otras

Despeje M de la ecuación siguiente.

$$\boxed{F = G\frac{mM}{r^2}}$$

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar M en un lado, tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Factorice } M \text{ del lado derecho}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{Gm}}\right)\left(\frac{\cancel{Gm}}{\cancel{r^2}}\right)M \qquad \text{Multiplique por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\boxed{\frac{r^2F}{Gm}} = \underline{M} \qquad \text{Simplifique}$$

$$\boxed{\text{La solución es } M = \frac{r^2F}{Gm}.}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29** ■

EJEMPLO 3 | Despejar una variable en términos de otras

El área superficial A del rectángulo cerrado que se muestra en la Figura 1 puede calcularse a partir de la longitud l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$\boxed{A = \underline{2lw} + \underline{2wh} + \underline{2lh}}$$

Despeje w en términos de las otras variables de esta ecuación.

SOLUCIÓN Aun cuando esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos como es usual al aislar w en un lado, tratando las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Reúna términos que contengan } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Reste } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Factorice } w \text{ del lado derecho}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{Divida entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$. $= \dfrac{A-2lh}{2(l+h)}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31** ■

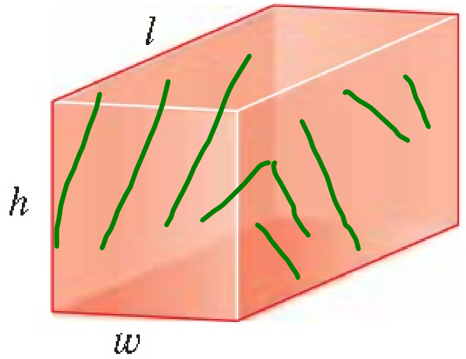


FIGURA 1 Una caja rectangular cerrada

$$\frac{A-2lh}{2l+2h} = \frac{\cancel{(2l+2h)}w}{\cancel{2l+2h}} \longrightarrow \boxed{w = \frac{A-2lh}{2l+2h} = \frac{A-2lh}{2(l+h)}}$$

Solución de ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado como $x^2 + 2x - 3 = 0$ o $2x^2 + 3 = 5x$.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

$$\{\ \underline{a}x^2 + \underline{b}x + \underline{c} = 0$$

$$a \neq 0$$

Ecuaciones cuadráticas

$$\boxed{x^2 - 2x - 8 = 0}$$

$$\boxed{3x + 10 = 4x^2}$$

$$\boxed{\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{6} = 0}$$

Algunas ecuaciones cuadráticas pueden resolverse al factorizar y usar las siguientes propiedades básicas de números reales.

PROPIEDAD DE PRODUCTO CERO

$\boxed{AB = 0}$ si y sólo si $A = 0$ o $B = 0$

Esto significa que si podemos factorizar el lado izquierdo de una ecuación cuadrática (o de otro grado), entonces podemos resolverla igualando a 0 cada factor a la vez. Este método funciona sólo cuando el lado derecho de la ecuación es 0.

$$AB = 0 \rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$$

EJEMPLO 4 Solución de una ecuación cuadrática por factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

SOLUCIÓN Primero debemos reescribir la ecuación de modo que el lado derecho sea 0.

$$\boxed{x^2 + 5x = 24}$$

$$x^2 + 5x - 24 = 24 - 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$\underline{(x-3)(x+8) = 0}$$

$$\downarrow$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{ó} \quad x + 8 = 0$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8$$

Las soluciones son: X=3 y X= -8

$x=3$:

$$(3)^2 + 5(3) = 24$$

$$9 + 15 = 24$$

$$24 = 24$$

$$LI = LD$$ ✓

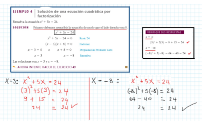
$x=-8$:

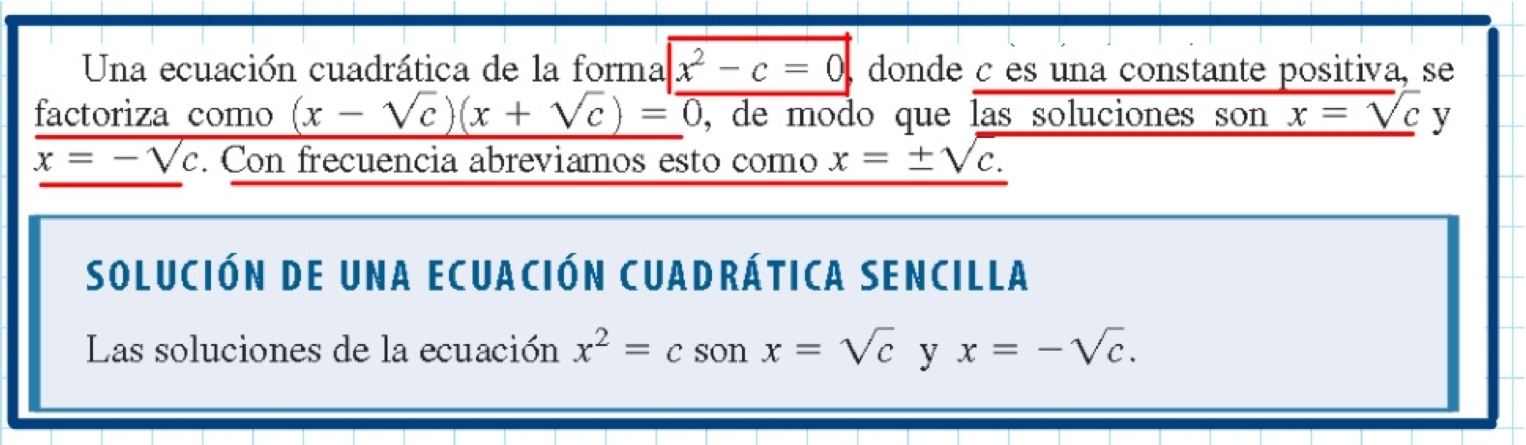
$$(-8)^2 + 5(-8) = 24$$

$$64 - 40 = 24$$

$$24 = 24$$

$$LI = LD$$ ✓





Una ecuación cuadrática de la forma $\boxed{x^2 - c = 0}$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, de modo que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA SENCILLA

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

$$\boxed{x^2 - c = 0}$$

$$\boxed{c > 0}$$

$$(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$$

↓

$x - \sqrt{c} = 0$ ó $x + \sqrt{c} = 0$

↓ ↓

$x = \sqrt{c}$ $x = -\sqrt{c}$

$$\boxed{x = \pm\sqrt{c}}$$

EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

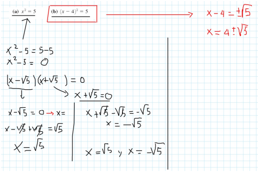
a) $x^2 = 5 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

b) $(x-4)^2 = 5$

$$\underbrace{x - 4 = \pm\sqrt{5}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x = 4 \pm \sqrt{5}}$$



(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

$x - 4 = \pm\sqrt{5}$

$x = 4 \pm \sqrt{5}$

$x^2 - 5 = 5 - 5$

$x^2 - 5 = 0$

$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$

$x + \sqrt{5} = 0$

$x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow x =$

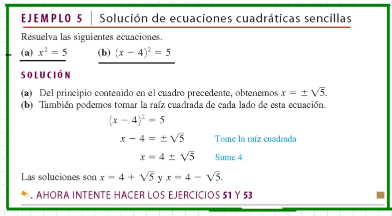
$x - \sqrt{5} + \sqrt{5} = \sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}$

$x + \sqrt{5} - \sqrt{5} = -\sqrt{5}$

$x = -\sqrt{5}$

$x = \sqrt{5}$ y $x = -\sqrt{5}$



EJEMPLO 5 | Solución de ecuaciones cuadráticas sencillas

Resuelva las siguientes ecuaciones.

(a) $x^2 = 5$ **(b)** $(x - 4)^2 = 5$

SOLUCIÓN

(a) Del principio contenido en el cuadro precedente, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

(b) También podemos tomar la raíz cuadrada de cada lado de esta ecuación.

$$(x-4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \text{Sume 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **51** Y **53**

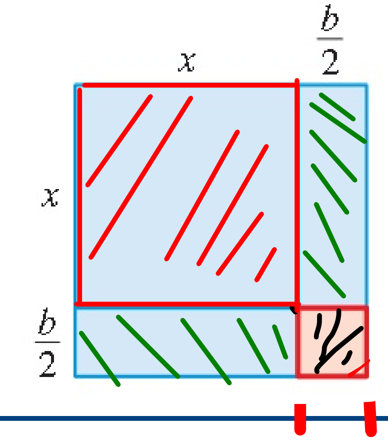
Como vimos en el Ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces podemos resolverla al tomar la raíz cuadrada de cada lado. En una ecuación de esta forma el lado izquierdo es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x. Por lo tanto, si una ecuación cuadrática no se factoriza fácilmente, entonces podemos resolverla usando la técnica de **completar el cuadrado.** Esto significa que sumamos una constante a una expresión para hacerla cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer que $x^2 - 6x$ sea cuadrado perfecto, debemos sumar 9 porque $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Completar el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un pequeño cuadrado de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.



COMPLETAR EL CUADRADO

Para hacer que $\boxed{x^2 + bx}$ sea un cuadrado perfecto, sume $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto.

$$\boxed{x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2}$$

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \qquad || \qquad \underbrace{x^2 + bx}_{}$$

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ **(b)** $\underset{\smile}{3}x^2 - 12x + 6 = 0$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$

$$x^2 - 8x + 13 - 13 = 0 - 13$$

$$1 \cdot x^2 - \underset{\smile}{8}x = -13$$

$$x^2 - 8x + \left(-\frac{8}{2}\right)^2 = -13 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = 3$$

$$(x-4)(x-4) = 3$$

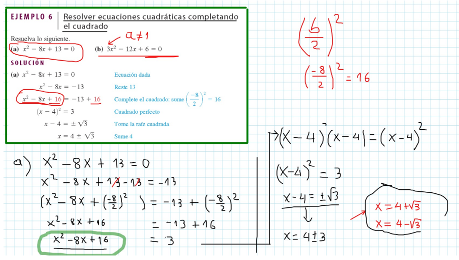
$$(x-4)^2 = 3$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{3}$$

$$\boxed{x = 4 \pm \sqrt{3}}$$

---

b



EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva lo siguiente.

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ (b) $3x^2 - 12x + 6 = 0$

$\leftarrow a \neq 1$

SOLUCIÓN

(a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ Ecuación dada

$x^2 - 8x = -13$ Reste 13

$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$ Complete el cuadrado: sume $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

$(x-4)^2 = 3$ Cuadrado perfecto

$x - 4 = \pm\sqrt{3}$ Tome la raíz cuadrada

$x = 4 \pm \sqrt{3}$ Sume 4

$\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$

a) $x^2 - 8x + 13 = 0$

$x^2 - 8x + 1\cancel{3} - 1\cancel{3} = -13$

$\left(x^2 - 8x + \left(\frac{-8}{2}\right)^2\right) = -13 + \left(-\frac{8}{2}\right)^2$

$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16$

$\underline{x^2 - 8x + 16} = 3$

$\to (x-4)(x-4) = (x-4)^2$

$(x-4)^2 = 3$

$x - 4 = \pm\sqrt{3}$

$\downarrow$

$x = 4 \pm 3$

$x = 4 + \sqrt{3}$

$x = 4 - \sqrt{3}$

SOLUCIÓN

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$3x^2 - 12x + 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$3x^2 - 12x = -6$$

$$3\underbrace{(x^2 - 4x)} = -6$$

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4$$

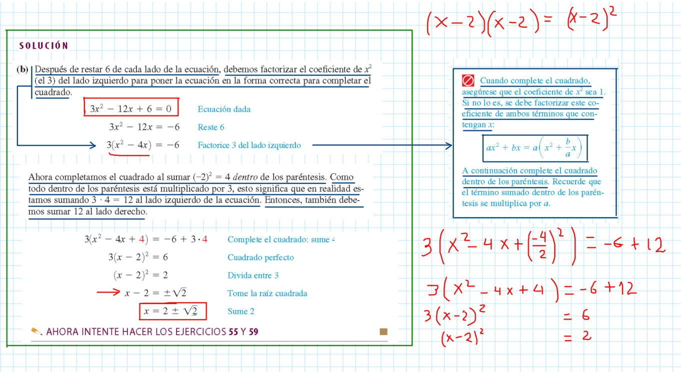
$$3(x - 2)(x - 2) = 6$$

$$3(x - 2)^2 = 6$$

$$(x - 2)^2 = 2$$

$$x - 2 = \pm\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2 \pm \sqrt{2}}$$



$$(x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

SOLUCIÓN

(b) Después de restar 6 de cada lado de la ecuación, debemos factorizar el coeficiente de x^2 (el 3) del lado izquierdo para poner la ecuación en la forma correcta para completar el cuadrado.

$$\boxed{3x^2 - 12x + 6 = 0} \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$3x^2 - 12x = -6 \qquad \text{Reste 6}$$

$$3(x^2 - 4x) = -6 \qquad \text{Factorice 3 del lado izquierdo}$$

Cuando complete el cuadrado, asegúrese que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no lo es, se debe factorizar este coeficiente de ambos términos que contengan x:

$$\boxed{ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)}$$

A continuación complete el cuadrado dentro de los paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro de los paréntesis se multiplica por a.

Ahora completamos el cuadrado al sumar $(-2)^2 = 4$ *dentro* de los paréntesis. Como todo dentro de los paréntesis está multiplicado por 3, esto significa que en realidad estamos sumando $3 \cdot 4 = 12$ al lado izquierdo de la ecuación. Entonces, también debemos sumar 12 al lado derecho.

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 3 \cdot 4 \qquad \text{Complete el cuadrado: sume 4}$$

$$3(x - 2)^2 = 6 \qquad \text{Cuadrado perfecto}$$

$$(x - 2)^2 = 2 \qquad \text{Divida entre 3}$$

$$\rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$\boxed{x = 2 \pm \sqrt{2}} \qquad \text{Sume 2}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **59**

$$3\left(x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2\right) = -6 + 12$$

$$3(x^2 - 4x + 4) = -6 + 12$$

$$3(x-2)^2 = 6$$

$$(x-2)^2 = 2$$

Podemos usar la técnica de completar el cuadrado para obtener una fórmula para las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

LA FÓRMULA CUADRÁTICA

Las raíces de la ecuación cuadrática $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$, donde $a \neq 0$, son

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

DEMOSTRACIÓN Primero, dividimos entre a cada lado de la ecuación y pasamos la constante al lado derecho, obteniendo

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{Divida entre } a$$

A continuación completamos el cuadrado al sumar $(b/2a)^2$ a cada lado de la ecuación:

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{Complete el cuadrado: sume } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2} && \text{Cuadrado perfecto} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Tome la raíz cuadrada} \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Reste } \frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

■

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \qquad a \neq 0$$

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

La fórmula cuadrática podría usarse para resolver las ecuaciones de los Ejemplos 4 y 6. El estudiante debe realizar los detalles de estos cálculos.

EJEMPLO 7 | Uso de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones siguientes.

(a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 + 12x + 9 = 0$

(c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

SOLUCIÓN

(a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$b = -5$

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$a = 3$ $c = -1$

Por la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

(b) Usando la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ dará

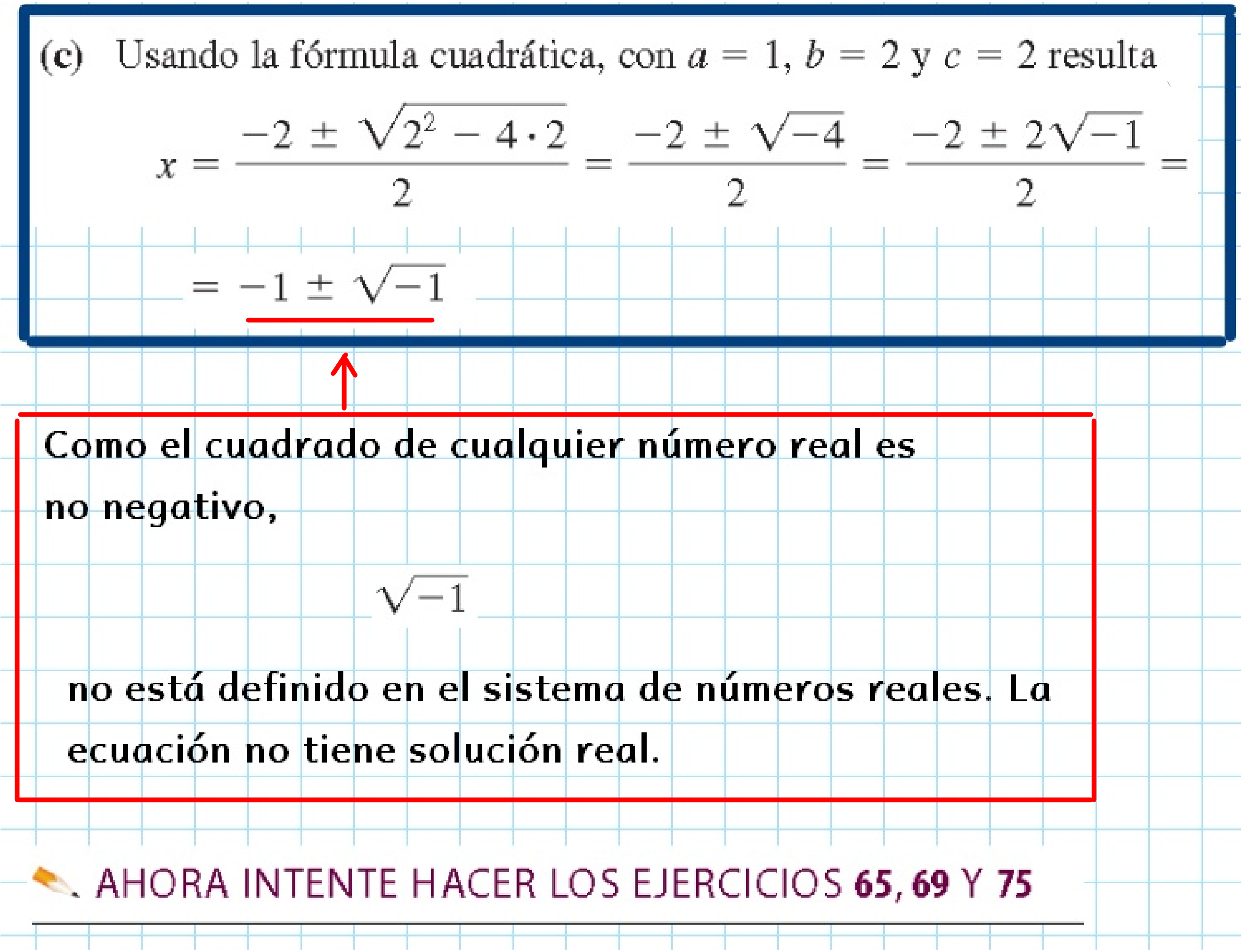
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

Otro método

$$\begin{aligned} 4x^2 + 12x + 9 &= 0 \\ (2x + 3)^2 &= 0 \\ 2x + 3 &= 0 \\ x &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ 2x+3 \\ \hline 6x+9 \\ +\ 4x^2+6x \\ \hline 4x^2+12x+9 \end{array}$$



(c) Usando la fórmula cuadrática, con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ resulta

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} =$$

$$= \underline{-1 \pm \sqrt{-1}}$$

Como el cuadrado de cualquier número real es no negativo,

$$\sqrt{-1}$$

no está definido en el sistema de números reales. La ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **65, 69** Y **75**

$a = 1$

$b = 2$

$c = 2$

$i = (\sqrt{-1})$

EL DISCRIMINANTE

El **discriminante** de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ es $\boxed{D = b^2 - 4ac}$

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

EJEMPLO 8 | Uso del discriminante

Use el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

(a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ **(b)** $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **(c)** $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

SOLUCIÓN

(a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, por lo cual la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

(b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo cual la ecuación tiene una solución real.

(c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, por lo cual la ecuación no tiene solución real.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **79, 81 Y 83** ■

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$(a \neq 0)$$

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$