1.3 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Suma y resta de polinomios ▶ Multiplicación de expresiones algebraicas ▶ Fórmulas de productos notables ▶ Factorización de factores comunes ▶ Factorización de trinomios ▶ Fórmulas especiales de factorización ▶ Factorización por agrupación de términos

Una variable es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado. Si empezamos con variables, por ejemplo **x, y** y **z**, y algunos números reales, y las combinamos usando suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces, **obtenemos una expresión algebraica.** Veamos a continuación algunos ejemplos:

$$\Longrightarrow \quad \boxed{2x^2 - 3x + 4 \;; \quad \sqrt{x} + 10 \;; \quad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión citada líneas antes es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

ax^k

POLINOMIOS

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$\boxed{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene **grado *n***. Los monomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio reciben el nombre de **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomial	$9x^5$	5
6	monomial	6	0

$6x^0 = 6 \cdot 1 = 6$

Suma y resta de polinomios

Sumamos y **restamos** polinomios usando las propiedades de números reales [redacted]. La idea es combinar **términos semejantes** (esto es, términos con las mismas variables elevados a las mismas potencias) usando la Propiedad Distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Para restar polinomios, tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión en paréntesis, entonces se cambia el signo de cada término dentro del paréntesis cuando quitemos el paréntesis:

$$\boxed{-(b + c) = -b - c}$$

[Éste es simplemente el caso de la Propiedad Distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

EJEMPLO 1 | Suma y resta de polinomios

(a) Encuentre la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

(b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

SOLUCIÓN

(a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x) = 2x^3 - x^2 - 5x + 4$

(b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x) =$

Multiplicación de expresiones algebraicas

Para hallar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas, es necesario usar repetidamente la Propiedad Distributiva. En particular, usándola tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto dice que multiplicamos los dos factores al multiplicar cada término de un factor por cada término del otro factor y sumamos estos productos. Esquemáticamente, tenemos

$$(a + b)(c + d) = \underset{\uparrow}{ac} + \underset{\uparrow}{ad} + \underset{\uparrow}{bc} + \underset{\uparrow}{bd}$$

EJEMPLO 2 | Multiplicación de binomios usando

$$
\begin{aligned}
(2x + 1)(3x - 5) &= \underset{\uparrow}{6x^2} - \underset{\uparrow}{10x} + \underset{\uparrow}{3x} - \underset{\uparrow}{5} && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= 6x^2 - 7x - 5 && \text{Combine términos semejantes}
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

Cuando multiplicamos trinomios u otros polinomios con más términos, usamos la Propiedad Distributiva. También es útil acomodar nuestro trabajo en forma de tabla. El siguiente ejemplo ilustra ambos métodos.

EJEMPLO 3 | Multiplicación de polinomios

Encuentre el producto: $(2x + 3)(x^2 - 5x + 4)$

SOLUCIÓN 1: Usando la Propiedad Distributiva

$$\begin{aligned}
(2x + 3)(x^2 - 5x + 4) &= 2x(x^2 - 5x + 4) + 3(x^2 - 5x + 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x \cdot x^2 - 2x \cdot 5x + 2x \cdot 4) + (3 \cdot x^2 - 3 \cdot 5x + 3 \cdot 4) && \text{Propiedad Distributiva} \\
&= (2x^3 - 10x^2 + 8x) + (3x^2 - 15x + 12) && \text{Leyes de Exponentes} \\
&= 2x^3 - 7x^2 - 7x + 12 && \text{Combine términos semejantes}
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2: Usando forma de tabla

$$\begin{array}{lrrrrl}
\times & & x^2 & -\ 5x & +\ 4 & \\
 & & & 2x & +\ 3 & \\ \hline
+ & & 3x^2 & -\ 15x & +\ 12 & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 3 \\
 & 2x^3 & -\ 10x^2 & +\ 8x & & \text{Multiplique } x^2 - 5x + 4 \text{ por } 2x \\ \hline
 & 2x^3 & -\ 7x^2 & -\ 7x & +\ 12 & \text{Sume términos}
\end{array}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45

Fórmulas de productos notables

Ciertos tipos de productos se presentan con tanta frecuencia que es necesario aprenderlos. Se pueden verificar las siguientes fórmulas al ejecutar las multiplicaciones.

FÓRMULAS DE PRODUCTOS NOTABLES

Si A y B son números reales cualesquiera o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ — Suma y producto de términos iguales
2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ — Cuadrado de una suma
3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ — Cuadrado de una diferencia
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ — Cubo de una suma
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ — Cubo de una diferencia

La idea clave en el uso de estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **Principio de Sustitución**: podemos sustituir cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para hallar $(x^2 + y^3)^2$ usamos la Fórmula 2 de Productos, sustituyendo x^2 por A y y^3 por B, para obtener

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 \\ B &= y^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \longrightarrow (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)$$

EJEMPLO 6 **Uso de las fórmulas de productos especiales**

Use las fórmulas de productos notables para hallar cada producto.

(a) $(3x + 5)^2$ $= (A+B)^2 = (3x)^2 + \underline{2(3x)}(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$

$A = 3x$

$B = 5$

(b) $(x^2 - 2)^3$ $=$

Factorización de factores comunes

Usamos la Propiedad Distributiva para expandir expresiones algebraicas. A veces necesitamos invertir este proceso (de nuevo usando la Propiedad Distributiva) al **factorizar** una expresión como un producto de otras más sencillas. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN

$$\boxed{x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)}$$

[redacted]

DESARROLLO

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

EJEMPLO 7 Factorización de factores comunes

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \checkmark$$

(b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 = (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2)$

$= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)$$
$$= 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \checkmark$$

(a) El máximo factor común en los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, de modo que tenemos

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad ✔$$

(b) Observamos que

$$\left.\begin{array}{l} 8,\ 6 \text{ y } -2 \text{ tienen el máximo factor común } 2 \\ x^4,\ x^3 \text{ y } x \text{ tienen el máximo factor común } x \\ y^2,\ y^3 \text{ y } y^4 \text{ tienen el máximo factor común } y^2 \end{array}\right\}$$

Por tanto, el máximo factor común de los tres términos del polinomio es $\boxed{2xy^2}$, y tenemos

$$\begin{aligned} 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \end{aligned}$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$$\begin{aligned} &2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) \\ &\quad = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad ✔ \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61, 63 Y 65**

Factorización de trinomios

Para factorizar un trinomio de la forma $\boxed{x^2 + bx + c,}$ observamos que

$$\boxed{(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs}$$

por lo que necesitamos escoger números r y s tales que $r + s = b$ y $rs = c$.

EJEMPLO 8 | Factorizar $x^2 + bx + c$ por ensayo y error.

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

SOLUCIÓN Necesitamos hallar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea 7. Por ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Entonces, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

factores de 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67**

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✔

$12 \cdot 1 = 12;\ 12 + 1 \neq 7$ ✗

$6 \cdot 2 = 12;\ 6 + 2 \neq 7$ ✗

$3 \cdot 4 = 12;\ 3 + 4 = 7$ ✓

$$ax^2+bx+c$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs}$$

Por tanto, tratamos de hallar números p, q, r y s tales que $pq = a$ y $rs = c$, $ps + qr = b$. Si estos números son enteros todos ellos, entonces tendremos un número limitado de posibilidades de intentar conseguir p, q, r y s.

EJEMPLO 8 | Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

SOLUCIÓN Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o $3 \cdot 2$ y -5 como $-5 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Al tratar estas posibilidades, llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de -5

VERIFIQUE SU RESPUESTA

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✔

$6 \to 6 \cdot 1$, $3 \cdot 2$

$-5 \to -5 \cdot 1$, $5 \cdot (-1)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

$$6x^2 + 7x - 5 = \; ?$$

$(6x - 5)(x + 1) = 6x^2 + 6x - 5x - 5 = 6x^2 + x - 5$ ✗

$(6x + 5)(x - 1) = 6x^2 - 6x + 5x - 5 = 6x^2 - x - 5$ ✗

$(3x - 5)(2x + 1) = 6x^2 + 3x - 10x - 5 = 6x^2 - 7x - 5$ ✗

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 - 3x + 10x - 5 = 6x^2 + 7x - 5$

$6 \to 6 \cdot 1$

$6 \to 3 \cdot 2$

$-5 \to -5 \cdot 1$

$-5 \to 5 \cdot (-1)$

Fórmulas especiales de factorización

Algunas expresiones algebraicas notables se pueden factorizar usando las fórmulas que siguen. Las tres primeras son simplemente Fórmulas de Productos Notables escritas a la inversa.

FÓRMULAS ESPECIALES DE FACTORIZACIÓN

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

EJEMPLO 10 | Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice lo siguiente.

(a) $4x^2 - 25 = (2x)^2 - (5)^2 = (2x-5)(2x+5)$

a) $4x^2 - 25 =$

$A = 2x$
$B = 5$

$= A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$(2x)^2 - (5)^2 =$

$= (2x-5)(2x+5)$

c) $\underbrace{(x+y)}^2 - z^2 =$

EJEMPLO 11 Factorización de cuadrados perfectos

Factorice cada trinomio.

(a) $x^2 + 6x + 9 =$

$x^2 + 6x + 9 =$

$(x + 3)(x + 3) =$

$= (x + 3)^2$

(b) $4x^2 - 4xy + y^2$

b)

$A = 2x \; ; \; B = y$

$2AB = 4xy$

$4x^2 - 4xy + y^2 =$

$= (2x - y)^2$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **105** Y **107**

EJEMPLO 12 Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

(a) $27x^3 - 1 = \underbrace{(3x)}_{A}{}^3 - \underbrace{1}_{B}{}^3 = (3x-1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]$

$= (3x-1)(9x^2 + 3x + 1)$

$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

(b) $x^6 + 8$

$x^6 + 8 = (x^2)^3 + (2)^3 = (x^2+2)((x^2)^2 - (x^2)(2) + (2)^2)$

$(x^2+2)(x^4 - 2x^2 + 4)$

$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **77** Y **79**

$4x^2 - 4xy + y^2$

EJEMPLO 13 | Factorizar por completo una expresión

Factorice por completo cada expresión.

(a) $2x^4 - 8x^2$ $= 2x^2(x^2 - 4)$

$= 2x^2(x-2)(x+2)$

(b) $x^5y^2 - xy^6$

b) $x^5y^2 - xy^6 = xy^2(x^4 - y^4)$

$= xy^2(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$= xy^2(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **115** Y **117**

EJEMPLO 14 | Factorizar expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice lo siguiente.

(a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ **(b)** $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

SOLUCIÓN

(a) Factorice la potencia de x que tenga el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$:

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Factorice } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorice la ecuación de segundo grado } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

Para factorizar $x^{-1/2}$ de $x^{3/2}$, *restamos* exponentes:

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)}) \\ &= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2}) \\ &= x^{-1/2}(x^2) \end{aligned}$$

$$x^{3/2-(-1/2)} = x^{\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)} = x^2$$

$$x^{1/2-\left(-\frac{1}{2}\right)} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{2}} = x$$

$$x^{-1/2} = x^{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)} = x^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^0 = 1$$

$$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} = 3x^{-\frac{1}{2}}\underbrace{\left(x^2 - 3x + 2\right)} = 3x^{-\frac{1}{2}}(x-1)(x-2)$$

$$x^{\left[\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]} = x^2$$

$$x^{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = x^1 = x$$

VERIFIQUE SUS RESPUESTAS

Para ver que haya factorizado correctamente, multiplique usando las Leyes de Exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✔

(b) $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$

$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **91 Y 93**

$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} = 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$

$= \boxed{3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)}$

$\rightarrow (3x^{-\frac{1}{2}} \cdot x^1 - 3x^{-1/2})(x - 2)$

$(3x^{1/2} - 3x^{-1/2})(x - 2)$

$3x^{\frac{1}{2}+1} - 6x^{1/2} - 3x^{-\frac{1}{2}+1} + 6x^{-1/2}$

$3x^{3/2} - 6x^{1/2} - 3x^{1/2} + 6x^{-1/2}$

$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$

Factorización por agrupación de términos

Los polinomios con al menos cuatro términos pueden factorizarse a veces por agrupación de términos. El siguiente ejemplo ilustra la idea.

EJEMPLO 15 | Factorización por agrupación

Factorice lo siguiente.

(a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ **(b)** $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 4x + 4 &= (x^3 + x^2) + (4x + 4) && \text{Agrupe términos} \\ &= x^2(x + 1) + 4(x + 1) && \text{Factorice factores comunes} \\ &= (x^2 + 4)(x + 1) && \text{Factorice } x + 1 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

(b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupe términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Factorice factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Factorice $x - 2$ de cada término

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83** ■

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **15 Y 17**

1.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Considere el polinomio $2x^5 + 6x^4 + 4x^3$.

¿Cuántos términos tiene este polinomio? _____

Enliste los términos:______

¿Cuál factor es común a cada término?_____

Factorice el polinomio: $2x^5 + 6x^4 + 4x^3 =$ _____.

2. Para factorizar el trinomio $x^2 + 7x + 10$, buscamos dos enteros cuyo producto sea____ y cuya suma sea____.

Estos enteros son ___ y ___, de modo que el trinomio se factoriza como_____.

3. La fórmula de productos notables para la "suma de un cuadrado" es $(A + B)^2 =$ ______.

Por tanto, $(2x + 3)^2 =$ ______.

4. La fórmula de productos notables para la "suma y diferencia de los mismos términos" es $(A + B)(A - B) =$ _________.

Entonces $(5 + x)(5 - x) =$ __________.

5. La fórmula de factorización especial para "la diferencia de cuadrados" es $A^2 - B^2 =$ ______. Entonces, $4x^2 - 25$ se factoriza como _______.

6. La fórmula de factorización especial para un "cuadrado perfecto" es $A^2 + 2AB + B^2 =$ ______. Entonces $x^2 + 10x + 25$ se factoriza como _________.

HABILIDADES

7-12 ■ Complete la tabla siguiente diciendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio; a continuación, haga una lista de sus términos y exprese su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
7. $x^2 - 3x + 7$			
8. $2x^5 + 4x^2$			
9. -8			
10. $\frac{1}{2}x^7$			
11. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
12. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

13-22 ■ Encuentre la suma, diferencia o producto.

13. $(12x - 7) - (5x - 12)$ **14.** $(5 - 3x) + (2x - 8)$

15. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

16. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

17. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

18. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

19. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

20. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

21. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

22. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

23-28 ■ Multiplique las expresiones algebraicas [redacted] y simplifique.

23. $(3t - 2)(7t - 4)$ **24.** $(4s - 1)(2s + 5)$

25. $(3x + 5)(2x - 1)$ **26.** $(7y - 3)(2y - 1)$

27. $(x + 3y)(2x - y)$ **28.** $(4x - 5y)(3x - y)$

29-44 ■ Multiplique las expresiones algebraicas usando una fórmula de producto notable y simplifique.

29. $(3x + 4)^2$ **30.** $(1 - 2y)^2$

31. $(2u + v)^2$ **32.** $(x - 3y)^2$

33. $(2x + 3y)^2$ **34.** $(r - 2s)^2$

35. $(x + 5)(x - 5)$ **36.** $(y - 3)(y + 3)$

37. $(3x - 4)(3x + 4)$ **38.** $(2y + 5)(2y - 5)$

39. $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)$ **40.** $(\sqrt{y} + \sqrt{2})(\sqrt{y} - \sqrt{2})$

41. $(y + 2)^3$ **42.** $(x - 3)^3$

43. $(1 - 2r)^3$ **44.** $(3 + 2y)^3$

45-60 ■ Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.

45. $(x + 2)(x^2 + 2x + 3)$ **46.** $(x + 1)(2x^2 - x + 1)$

47. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ **48.** $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

49. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ **50.** $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

51. $y^{1/3}(y^{2/3} + y^{5/3})$ **52.** $x^{1/4}(2x^{3/4} - x^{1/4})$

53. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ **54.** $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

55. $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b)$

56. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

57. $((x - 1) + x^2)((x - 1) - x^2)$

58. $(x + (2 + x^2))(x - (2 + x^2))$

59. $(2x + y - 3)(2x + y + 3)$ **60.** $(x + y + z)(x - y - z)$

61-66 ■ Factorice el factor común.

61. $-2x^3 + 16x$ **62.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

63. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **64.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

65. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **66.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

67-74 ■ Factorice el trinomio.

67. $x^2 + 2x - 3$ **68.** $x^2 - 6x + 5$

69. $8x^2 - 14x - 15$ **70.** $6y^2 + 11y - 21$

71. $3x^2 - 16x + 5$ **72.** $5x^2 - 7x - 6$

73. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

74. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

75-82 ■ Use una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

75. $9a^2 - 16$ **76.** $(x + 3)^2 - 4$

77. $27x^3 + y^3$ **78.** $a^3 - b^6$

79. $8s^3 - 125t^3$ **80.** $1 + 1000y^3$

81. $x^2 + 12x + 36$ **82.** $16z^2 - 24z + 9$

83-88 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

83. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **84.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

85. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **86.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

87. $x^3 + x^2 + x + 1$ **88.** $x^5 + x^4 + x + 1$

89-94 ■ Factorice por completo la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

89. $x^{5/2} - x^{1/2}$ **90.** $3x^{-1/2} + 4x^{1/2} + x^{3/2}$

91. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$ **92.** $(x - 1)^{7/2} - (x - 1)^{3/2}$

93. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

94. $x^{-1/2}(x + 1)^{1/2} + x^{1/2}(x + 1)^{-1/2}$

95-124 ■ Factorice por completo la expresión.

95. $12x^3 + 18x$

96. $30x^3 + 15x^4$

97. $x^2 - 2x - 8$

98. $x^2 - 14x + 48$

99. $2x^2 + 5x + 3$

100. $2x^2 + 7x - 4$

101. $9x^2 - 36x - 45$

102. $8x^2 + 10x + 3$

103. $49 - 4y^2$

104. $4t^2 - 9s^2$

105. $t^2 - 6t + 9$

106. $x^2 + 10x + 25$

107. $4x^2 + 4xy + y^2$

108. $r^2 - 6rs + 9s^2$

109. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

110. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2$

111. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$

112. $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

113. $8x^3 - 125$

114. $x^6 + 64$

115. $x^3 + 2x^2 + x$

116. $3x^3 - 27x$

117. $x^4y^3 - x^2y^5$

118. $18y^3x^2 - 2xy^4$

119. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$

120. $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

121. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

122. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

123. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

124. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

125-128 ■ Factorice por completo la expresión. (Este tipo de expresión aparece en cálculo cuando se usa la "Regla del Producto".)

125. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

126. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

127. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

128. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

129. **(a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

(b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

(c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

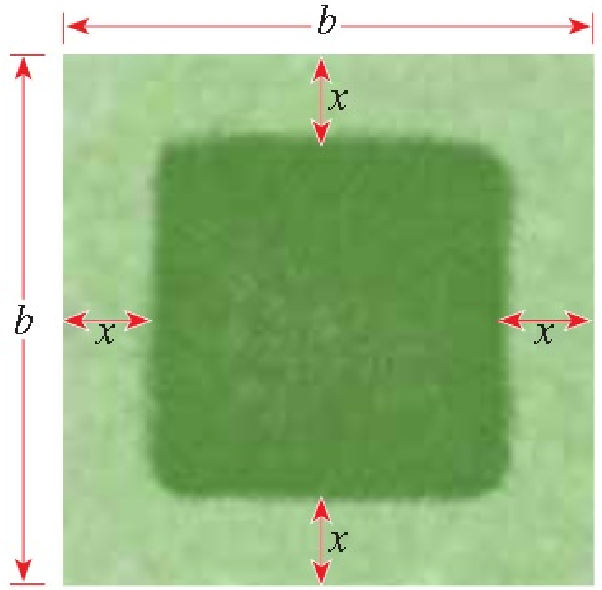
(d) Factorice por completo: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

APLICACIONES

132. Podar un campo Cada semana, un campo cuadrado de cierto parque estatal es podado alrededor de los bordes. El resto del campo se mantiene sin podar para que sirva como hábitat para aves y animales pequeños (vea la figura). El campo mide b pies por b pies, y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

(b) Factorice la expresión de la parte (a) para demostrar que el área de la parte podada también es $4x(b - x)$.



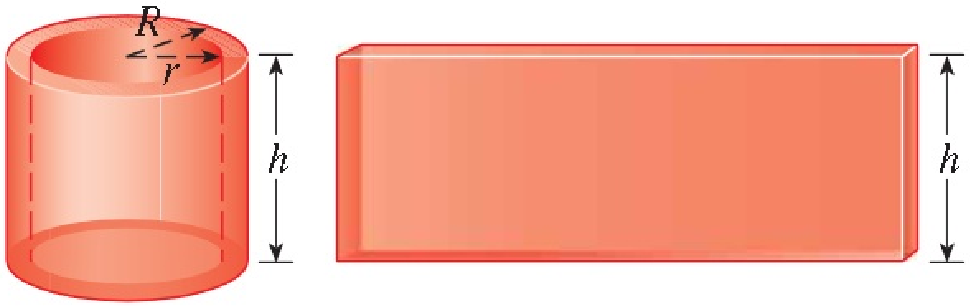
131. Volumen de concreto Se construye una alcantarilla con grandes capas cilíndricas vaciadas en concreto, como se muestra en la figura. Usando la fórmula para el volumen de un cilindro dada al final de este libro, explique por qué el volumen de la capa cilíndrica es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{grosor}$$

Use el diagrama "desenrollado" para explicar por qué esto tiene sentido geométricamente hablando.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

133. Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios y, a continuación, calcule la suma y producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, conteste las siguientes preguntas.

(a) ¿Cómo está relacionado el grado del producto con los grados de los polinomios originales?
(b) ¿Cómo está relacionado el grado de la suma con los grados de los polinomios originales?

134. El poder de las fórmulas algebraicas Use la fórmula de una diferencia de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Nótese que es fácil calcular mentalmente la forma factorizada pero no es tan fácil calcular la forma original en esta forma. Evalúe mentalmente cada expresión:

(a) $528^2 - 527^2$
(b) $122^2 - 120^2$
(c) $1020^2 - 1010^2$

A continuación, use la fórmula de productos notables

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar mentalmente estos productos:

(d) $79 \cdot 51$
(e) $998 \cdot 1002$

135. Diferencias de potencias pares

(a) Factorice por completo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.
(b) Verifique que $18{,}335 = 12^4 - 7^4$ y que $2{,}868{,}335 = 12^6 - 7^6$.
(c) Use los resultados de las partes (a) y (b) para factorizar los enteros 18,335 y 2,868,335. A continuación demuestre que en estas dos factorizaciones todos los factores son números primos.

136. Factorización de $A^n - 1$ Verifique estas fórmulas al expandir y simplificar el lado derecho.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$

$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$

$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Con base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa usted que sería posible factorizar $A^5 - 1$? Verifique su conjetura. Ahora generalice el patrón que haya observado para obtener una fórmula de factorización para $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

137. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ A veces se puede factorizar con facilidad un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$. Por ejemplo,

$$x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$$

Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar así. En cambio, podemos usar el siguiente método.

$$\begin{aligned}
x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 && \text{Sume y reste } x^2 \\
&= (x^2 + 2)^2 - x^2 && \text{Factorice el cuadrado perfecto} \\
&= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)
\end{aligned}$$

Factorice lo siguiente, usando cualquier método apropiado.

(a) $x^4 + x^2 - 2$
(b) $x^4 + 2x^2 + 9$
(c) $x^4 + 4x^2 + 16$
(d) $x^4 + 2x^2 + 1$

1.3 EJERCICIOS

Respuestas a ejercicios números pares:

SECCIÓN 1.3 ■ PÁGINA 32

1. 3; $2x^5, 6x^4, 4x^3$; $2x^3, 2x^3(x^2 + 3x + 2)$
2. 10, 7; 2, 5; $(x + 2)(x + 5)$
3. $A^2 + 2AB + B^2$; $4x^2 + 12x + 9$ **4.** $A^2 - B^2$; $25 - x^2$
5. $(A + B)(A - B)$; $(2x - 5)(2x + 5)$ **6.** $(A + B)^2$; $(x + 5)^2$
7. Trinomio; $x^2, -3x, 7$; 2 **9.** Monomio; -8; 0
11. Cuatro términos; $-x^4, x^3, -x^2, x$; 4 **13.** $7x + 5$
15. $5x^2 - 2x - 4$ **17.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 11$ **19.** $9x + 103$
21. $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$ **23.** $21t^2 - 26t + 8$
25. $6x^2 + 7x - 5$ **27.** $2x^2 + 5xy - 3y^2$ **29.** $9x^2 + 24x + 16$
31. $4u^2 + 4uv + v^2$ **33.** $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **35.** $x^2 - 25$
37. $9x^2 - 16$ **39.** $x - 4$ **41.** $y^3 + 6y^2 + 12y + 8$
43. $-8r^3 + 12r^2 - 6r + 1$ **45.** $x^3 + 4x^2 + 7x + 6$
47. $2x^3 - 7x^2 + 7x - 5$ **49.** $x\sqrt{x} - x$ **51.** $y^2 + y$
53. $x^4 - a^4$ **55.** $a - b^2$ **57.** $-x^4 + x^2 - 2x + 1$
59. $4x^2 + 4xy + y^2 - 9$ **61.** $2x(-x^2 + 8)$ **63.** $(y - 6)(y + 9)$
65. $xy(2x - 6y + 3)$ **67.** $(x - 1)(x + 3)$ **69.** $(2x - 5)(4x + 3)$
71. $(3x - 1)(x - 5)$ **73.** $(3x + 4)(3x + 8)$ **75.** $(3a - 4)(3a + 4)$
77. $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ **79.** $(2s - 5t)(4s^2 + 10st + 25t^2)$
81. $(x + 6)^2$ **83.** $(x + 4)(x^2 + 1)$ **85.** $(2x + 1)(x^2 - 3)$
87. $(x + 1)(x^2 + 1)$ **89.** $\sqrt{x}(x - 1)(x + 1)$ **91.** $x^{-3/2}(1 + x)^2$
93. $(x^2 + 1)^{-1/2}(x^2 + 3)$ **95.** $6x(2x^2 + 3)$ **97.** $(x - 4)(x + 2)$
99. $(2x + 3)(x + 1)$ **101.** $9(x - 5)(x + 1)$ **103.** $(7 - 2y)(7 + 2y)$
105. $(t - 3)^2$ **107.** $(2x + y)^2$ **109.** $4ab$
111. $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$
113. $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$ **115.** $x(x + 1)^2$
117. $x^2y^3(x + y)(x - y)$ **119.** $(x + 2)(2x^2 + 1)$
121. $3(x - 1)(x + 2)$ **123.** $(a - 1)(a + 1)(a - 2)(a + 2)$
125. $2(x^2 + 4)^4(x - 2)^3(7x^2 - 10x + 8)$
127. $(x^2 + 3)^{-4/3}(\frac{1}{3}x^2 + 3)$
129. **(d)** $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b - a + c)$