Resolución de desigualdades lineales ▶ Resolución de desigualdades no lineales ▶ Desigualdades con valor absoluto ▶ Modelado con desigualdades

$\Longleftrightarrow$

x	$4x + 7 \le 19$	
1	$11 \le 19$	✔
2	$15 \le 19$	✔
3	$19 \le 19$	✔
4	$23 \le 19$	✕
5	$27 \le 19$	✕

Algunos problemas en álgebra llevan a **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad se ve muy semejante a una ecuación, excepto que en lugar del signo igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\le$ o $\ge$. A continuación veamos un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \le 19$$

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no la satisfacen.

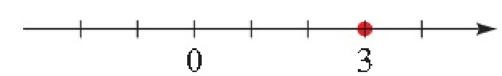
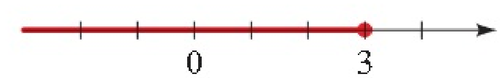
Resolver una desigualdad que contenga una variable significa hallar todos los valores de la variable que hagan verdadera la desigualdad. A diferencia de una ecuación, una desigualdad por lo general tiene un infinito de soluciones, que forma un intervalo o una unión de intervalos en la recta real. La siguiente ilustración muestra el modo en que una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

$<$

$>$

$\le$

$\ge$

		Solución	**Gráfica**
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad	$4x + 7 \le 19$	$x \le 3$	

$(-\infty, 3]$

$4x + 7 \le 19$

$4(4) + 7 \le 19$

$23 \le 19$

Para resolver desigualdades, usamos las reglas siguientes para aislar la variable en un lado del signo de desigualdad. Estas reglas nos dicen cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "es equivalente a"). En estas reglas los símbolos A, B y C representan números reales o expresiones algebraicas. A continuación expresamos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\le$, pero aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

REGLAS PARA DESIGUALDADES

Regla	Descripción
1. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de cada lado de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$	**Multiplicar** cada lado de una desigualdad por la misma *cantidad negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$	**Tomar** recíprocos de cada lado de una desigualdad que contenga cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Ponga especial atención a las Reglas 3 y 4. La Regla 3 dice que podemos multiplicar (o dividir) cada lado de una desigualdad por un número *positivo*, pero la Regla 4 dice que si multiplicamos cada lado de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, obtenemos

$$-6 > -10$$

EJEMPLO 1 | Resolver una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y trace el conjunto solución.

$A - B$

$A + (-B)$

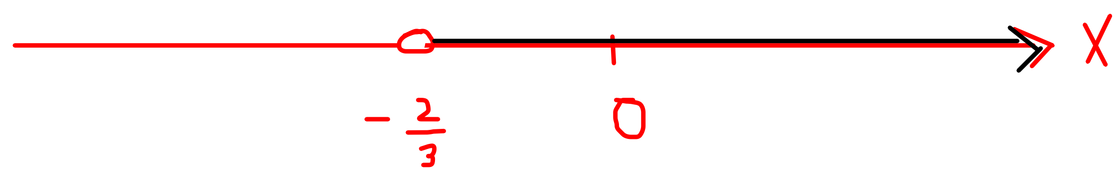
$3x < 9x + 4$

$3x - 9x < \cancel{9x} + 4 - \cancel{9x}$

$-6x < 4$

$\left(-\frac{1}{\cancel{6}}\right)(-\cancel{6}x) > -\left(\frac{1}{6}\right)(4)$

$x > -\frac{2}{3}$



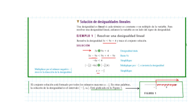
$\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$

$-6x < 4$

$\frac{-\cancel{6}x}{-\cancel{6}} > \frac{4}{-6}$

$x > -\frac{2}{3}$

$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$



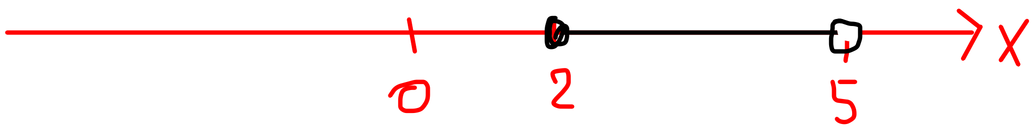
EJEMPLO 2 | Resolver un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \leq 3x - 2 < 13$.

$4 \leq 3x - 2 < 13 \quad \Big\| \quad 4 \leq 3x - 2 \quad \Big\| \quad 3x - 2 < 12$

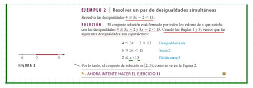
$4 + 2 \leq 3x - \cancel{2} + \cancel{2} < 13 + 2$

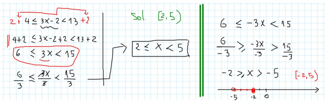
$6 \leq 3x < 15$



$\frac{6}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$

$2 \leq x < 5 \Rightarrow [2, 5)$





$$X^2 - 5X \leq -6$$
$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Solución de desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contengan cuadrados y otras potencias de la variable, usamos factorización, junto con el principio siguiente.

EL SIGNO DE UN PRODUCTO O COCIENTE

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Por ejemplo, para resolver la desigualdad $x^2 - 5x \leq -6$, primero movemos todos los términos al lado izquierdo y factorizamos para obtener

$$(x-2)(x-3) \leq 0$$

Esta forma de la desigualdad nos dice que el producto $(x-2)(x-3)$ debe ser negativo o cero, de modo que, para resolver la desigualdad, debemos determinar en dónde cada factor es negativo o positivo (porque el signo de un producto depende del signo de los factores). Los detalles se explican en el Ejemplo 3, en el que usamos la guía siguiente.

GUÍA PARA RESOLVER DESIGUALDADES NO LINEALES

1. **Pase todos los términos a un lado.** Si es necesario, reescriba la desigualdad de modo que todos los términos diferentes de cero aparezcan en un lado del signo de desigualdad. Si el lado diferente de cero de la desigualdad contiene cocientes, páselos a un común denominador.
2. **Factorice.** Factorice el lado diferente de cero de la desigualdad.
3. **Encuentre los intervalos.** Determine los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta real en intervalos. Haga una lista de los intervalos que están determinados por estos números.
4. **Haga una tabla o diagrama.** Use valores de prueba para hacer una tabla o diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto (o cociente) de estos factores.
5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Asegúrese de verificar si la desigualdad queda satisfecha por algunos o todos los puntos extremos de los intervalos. (Esto puede ocurrir si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$.)

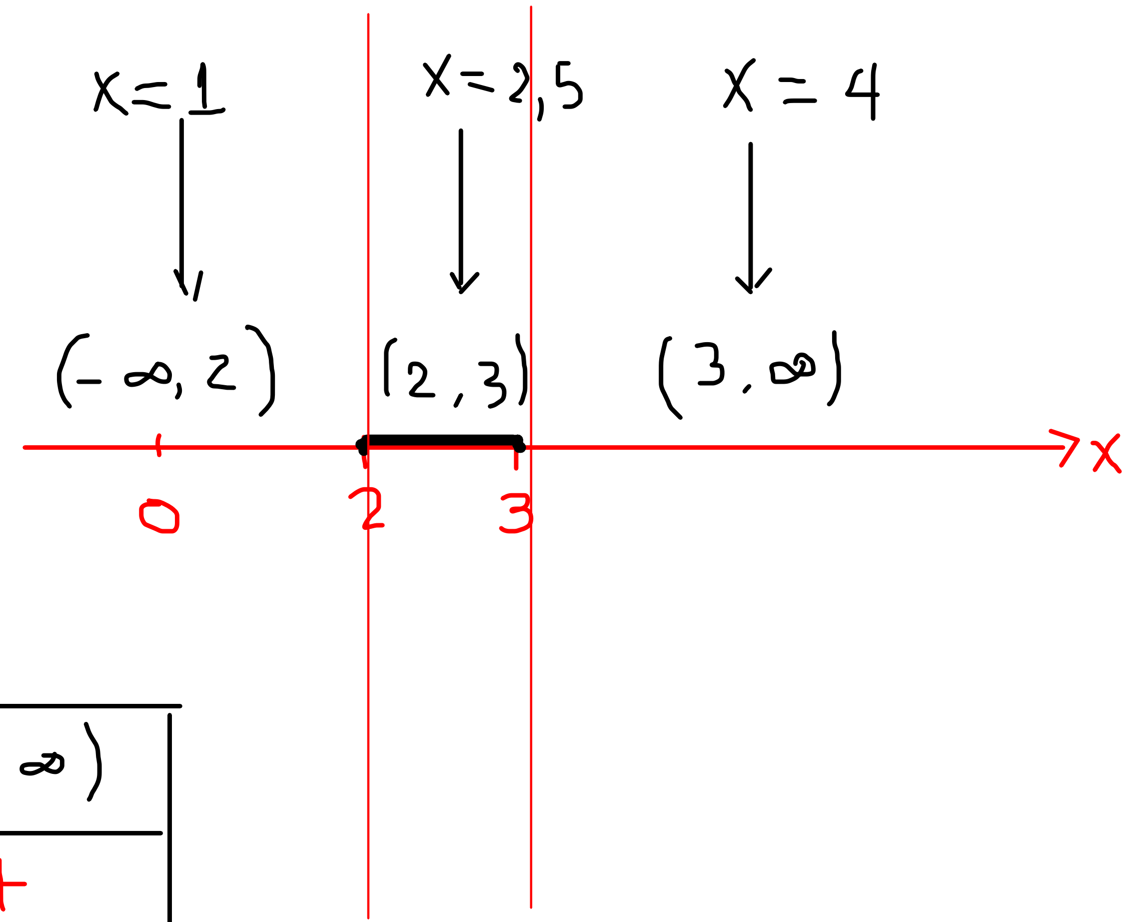
La técnica de factorización que se describe en esta guía funciona sólo si todos los términos diferentes de cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no se escribe en esta forma, primero la reescribimos, como se indica en el Paso 1.

$$x^2 - 5x \le -6$$

$$x^2 - 5x + 6 \le 0$$

$$(x-2)(x-3) \le 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3 \end{array}$$



Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
signo de $x-2$	$-$	$+$	$+$
signo de $x-3$	$-$	$-$	$+$
signo de $(x-2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

$$\{x \mid 2 \le x \le 3\} =$$

$$\Rightarrow = [2, 3]$$

$x^2-5x+6 \le 0$

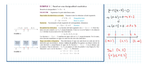
	$x=1$	2	$x=2,5$	3	$x=4$	X
Signo de x-2	$-$		$+$		$+$	
Signo de x-3	$-$		$-$		$+$	
Signo de (x-2)(x-3)	$+$		$-$		$+$	

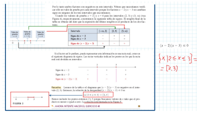
EJEMPLO 3 | Resolver una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 \leq 5x - 6$.

SOLUCIÓN Seguiremos la guía dada líneas antes.

$$x^2 \leq 5x - 6$$





EJEMPLO 5 | Resolver una desigualdad con un cociente

Resuelva la desigualdad $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 1$

SOLUCIÓN

	$x=-1$	$x=\frac{1}{2}$	$x=2$
	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
signo de 2x	$-$	$+$	$+$
signo de 1-x	$+$	$+$	$-$
signo de $\dfrac{2x}{1-x}$	$-$	$+$	$-$

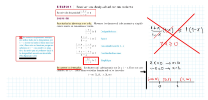
$$\frac{1+x}{1-x} \geq 1$$

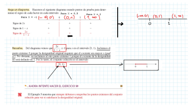
$$\frac{1+x}{1-x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1+x-1+x}{1-x} \geq 0$$

$$\frac{2x}{1-x} \geq 0$$

$$[0, 1) = \{x \mid 0 \leq x < 1\}$$





Ejercicio 1.-Fuer die Studenten

$$\boxed{-x^2+4>0}$$

$$\boxed{-x^2+4>0} \rightarrow -x^2+4=0 \Rightarrow x^2=4$$

$$x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

$-$ $(-\infty,-2)$ $+$ $(-2,2)$ $-$ $(2,+\infty)$

-2 2

Para x = -3 $\longrightarrow -(-3)^2+4=-9+4=-5$ $-$

Para x = 0 $\longrightarrow -(0)^2+4=4$ $+$

Para x = 3 $\longrightarrow -(3)^2+4=-5$ $-$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Sol. } (-2,2)}$

$(2-x)(2+x)>0$

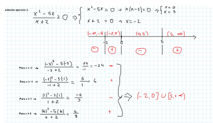
$2-x=0 \rightarrow x=2$

$2+x=0 \rightarrow x=-2$

Mas sobre sistemas de inecuaciones de segundo grado:

https://www.youtube.com/watch?v=AZ1_gwZSi-g
https://www.youtube.com/watch?v=qaY1qp5JCEc
https://www.youtube.com/watch?v=Ms-TNayg-qI

Ejercicio 2.



$$\frac{x^2 - 5x}{x+2} \geq 0$$

Ejercicio 3. Desigualdad con tres factores

$$x < \frac{2}{x-1}$$

Desigualdades con valor absoluto

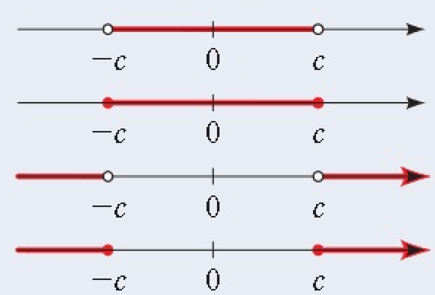
Usamos las siguientes propiedades para resolver desigualdades que contienen valor absoluto.

Estas propiedades se cumplen cuando x es sustituida por cualquier expresión algebraica. (En la figura supusimos que $c > 0$.)

PROPIEDADES DE DESIGUALDADES CON VALOR ABSOLUTO

Desigualdad	Forma equivalente
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$

Gráfica



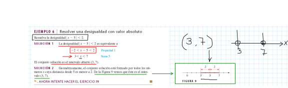
EJEMPLO 6 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

$\boxed{\text{Resuelva la desigualdad } |x - 5| < 2.}$

$|x-5| < 2$

$-2 < x - 5 < 2$

$3 < x < 7 \implies (3, 7) = \{x \mid 3 < x < 7\}$



Fuer die Studenten

EJEMPLO 7 | Resolver una desigualdad con valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\boxed{|3x + 2| \geq 4.}$

$$|3x+2| \geq 4$$

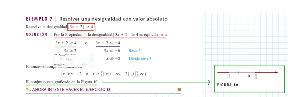
$$3x + 2 \geq 4 \quad \text{ó} \quad 3x + 2 \leq -4$$

$$3x \geq 2 \qquad\qquad 3x \leq -6$$

$$x \geq \frac{2}{3} \qquad\qquad x \leq -2$$

$$\left\{ x \mid x \leq -2 \ \text{ o } \ x \geq \frac{2}{3} \right\} =$$

$$= (-\infty, -2] \cup \left[\frac{2}{3}, \infty\right)$$



▼ Modelado con desigualdades

Modelar problemas prácticos lleva a desigualdades porque con frecuencia estamos interesados en determinar cuándo una cantidad es mayor (o menor) que otra.

EJEMPLO 8 | Boletos para carnaval

Un carnaval tiene dos planes para boletos

Plan A: Cuota de \$5 la entrada y \$0.25 cada juego mecánico

Plan B: Cuota de \$2 la entrada y \$0.50 cada juego mecánico

¿Cuántos juegos mecánicos tendría que tomar para que el Plan A sea menos costoso que el Plan B?

SOLUCIÓN Identifique la variable. Nos piden el número de viajes en juego mecánico para el cual es menos costoso que el Plan B. Por lo tanto, hacemos

x = número de viajes en juego mecánico

Convierta las palabras en álgebra. La información del problema puede organizarse como sigue.

En palabras	En álgebra
Número de viajes	x
Costo con Plan A	$5 + 0.25x$
Costo con plan B	$2 + 0.50x$

Formule el modelo. A continuación formulamos el modelo.

$$\boxed{\text{costo con Plan A}} < \boxed{\text{costo con Plan B}}$$

$$5 + 0.25x < 2 + 0.50x$$

Resuelva. A continuación despejamos x.

$$3 + 0.25x < 0.50x \qquad \text{Reste 2}$$

$$3 < 0.25x \qquad \text{Reste } 0.25x$$

$$12 < x \qquad \text{Divida entre } 0.25$$

Entonces, si usted piensa tomar *más de* 12 viajes, el Plan A es menos costoso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **107**

$$°C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

EJEMPLO 9 | Relación entre escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en una botella de medicina indican que la botella debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué intervalo de temperaturas corresponde en una escala Fahrenheit?

SOLUCIÓN La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) está dada por la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Expresando el enunciado de la botella en términos de desigualdades, tenemos

$$\boxed{5 < C < 30}$$

Entonces las temperaturas Fahrenheit correspondientes satisfacen las desigualdades

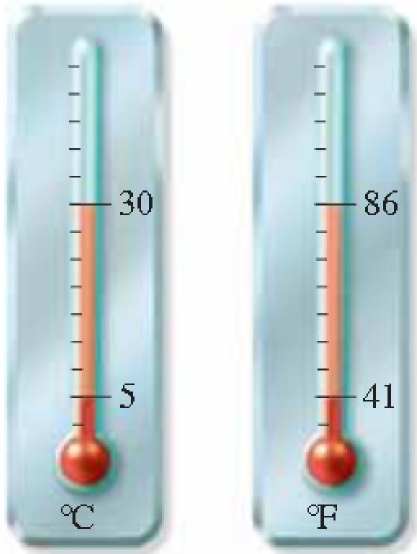
$$5 < \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 \qquad \text{Sustituya } C = \tfrac{5}{9}(F - 32)$$

$$\tfrac{9}{5} \cdot 5 < F - 32 < \tfrac{9}{5} \cdot 30 \qquad \text{Multiplique por } \tfrac{9}{5}$$

$$9 < F - 32 < 54 \qquad \text{Simplifique}$$

$$9 + 32 < F < 54 + 32 \qquad \text{Sume 32}$$

$$\boxed{41 < F < 86} \qquad \text{Simplifique}$$



La medicina debe conservarse a una temperatura entre 41°F y 86°F.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **105**

1.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Llene el espacio en blanco con un signo de desigualdad apropiado.
   (a) Si $x < 5$, entonces $x - 3$ ____ 2.
   (b) Si $x \leq 5$, entonces $3x$ ____ 15.
   (c) Si $x \geq 2$, entonces $-3x$ ____ -6.
   (d) Si $x < -2$, entonces $-x$ ____ 2.
2. *¿Verdadero o falso?*
   (a) Si $x(x + 1) > 0$, entonces x y $x + 1$ son ambos positivos o ambos negativos.
   (b) Si $x(x + 1) > 5$, entonces x y $x + 1$ son cada uno mayores a 5.
3. (a) La solución de la desigualdad $|x| \leq 3$ es el intervalo ______.
   (b) La solución de la desigualdad $|x| \geq 3$ es una unión de dos intervalos ____ $\cup$ ____.
4. (a) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es menor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ ______.
   (b) El conjunto de todos los puntos sobre la recta real cuya distancia desde cero es mayor a 3 puede ser descrito por la desigualdad de valor absoluto $|x|$ ______.

HABILIDADES

5–10 ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S satisfacen la desigualdad.

5. $3 - 2x \leq \frac{1}{2}$

6. $2x - 1 \geq x$

7. $1 < 2x - 4 \leq 7$

8. $-2 \leq 3 - x < 2$

9. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$

10. $x^2 + 2 < 4$

11–34 ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

11. $2x \leq 7$

12. $-4x \geq 10$

13. $2x - 5 > 3$

14. $3x + 11 < 5$

15. $7 - x \geq 5$

16. $5 - 3x \leq -16$

17. $2x + 1 < 0$

18. $0 < 5 - 2x$

19. $3x + 11 \leq 6x + 8$

20. $6 - x \geq 2x + 9$

21. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$

22. $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

23. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$

24. $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$

25. $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$

26. $2(7x - 3) \leq 12x + 16$

27. $2 \leq x + 5 < 4$

28. $5 \leq 3x - 4 \leq 14$

29. $-1 < 2x - 5 < 7$

30. $1 < 3x + 4 \leq 16$

31. $-2 < 8 - 2x \leq -1$

32. $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$

33. $\dfrac{1}{6} < \dfrac{2x - 13}{12} \leq \dfrac{2}{3}$

34. $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{4 - 3x}{5} \leq \dfrac{1}{4}$

35–72 ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

35. $(x + 2)(x - 3) < 0$

36. $(x - 5)(x + 4) \geq 0$

37. $x(2x + 7) \geq 0$

38. $x(2 - 3x) \leq 0$

39. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$

40. $x^2 + 5x + 6 > 0$

41. $2x^2 + x \geq 1$

42. $x^2 < x + 2$

43. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$

44. $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$

45. $x^2 > 3(x + 6)$

46. $x^2 + 2x > 3$

47. $x^2 < 4$

48. $x^2 \geq 9$

49. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$

50. $(x - 5)(x - 2)(x + 1) > 0$

51. $(x - 4)(x + 2)^2 < 0$

52. $(x + 3)^2(x + 1) > 0$

53. $(x - 2)^2(x - 3)(x + 1) \leq 0$

54. $x^2(x^2 - 1) \geq 0$

55. $x^3 - 4x > 0$

56. $16x \leq x^3$

57. $\dfrac{x - 3}{x + 1} \geq 0$

58. $\dfrac{2x + 6}{x - 2} < 0$

59. $\dfrac{4x}{2x + 3} > 2$

60. $-2 < \dfrac{x + 1}{x - 3}$

61. $\dfrac{2x + 1}{x - 5} \leq 3$

62. $\dfrac{3 + x}{3 - x} \geq 1$

63. $\dfrac{4}{x} < x$

64. $\dfrac{x}{x + 1} > 3x$

65. $1 + \dfrac{2}{x + 1} \leq \dfrac{2}{x}$

66. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{4}{x} \geq 1$

67. $\dfrac{6}{x - 1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$

68. $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{5}{x + 1} + 4$

69. $\dfrac{x + 2}{x + 3} < \dfrac{x - 1}{x - 2}$

70. $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} \leq 0$

71. $x^4 > x^2$

72. $x^5 > x^2$

73–88 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

73. $|x| \leq 4$

74. $|3x| < 15$

75. $|2x| > 7$

76. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$

77. $|x - 5| \leq 3$

78. $|x + 1| \geq 1$

79. $|2x - 3| \leq 0.4$

80. $|5x - 2| < 6$

81. $|3x - 2| \geq 5$

82. $|8x + 3| > 12$

83. $\left|\dfrac{x - 2}{3}\right| < 2$

84. $\left|\dfrac{x + 1}{2}\right| \geq 4$

85. $|x + 6| < 0.001$

86. $3 - |2x + 4| \leq 1$

87. $8 - |2x - 1| \geq 6$

88. $7|x + 2| + 5 > 4$

88–92 ■ Se da una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contenga un valor absoluto.

89. Todos los números reales x menos 3 unidades desde 0

APLICACIONES

105. Escalas de temperatura Use la relación entre C y F dada en el Ejemplo 9 para hallar el intervalo en la escala Fahrenheit correspondiente al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

106. Escalas de temperatura ¿Cuál intervalo en la escala Celsius corresponde al intervalo de temperatura $50 \leq F \leq 95$?

107. Costo de renta de un auto Una compañía de renta de autos ofrece dos planes para renta de un auto.

Plan A: $30 por día y $0.10 por milla

Plan B: $50 por día con kilometraje ilimitado

108. Costo de llamadas de larga distancia Una compañía telefónica ofrece dos planes de llamadas de larga distancia.

Plan A: $25 por mes y $0.05 por minuto

Plan B: $5 por mes y $0.12 por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia sería financieramente ventajoso el Plan B?