FUNCIONES

Quizás la idea más útil para modelar el mundo real sea el concepto de función. Es uno de los conceptos más fundamentales e importantes de toda la matemática.

La podemos definir como "una regla" que describe la forma en que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, cuando estudiamos el movimiento , la distancia recorrida depende del tiempo, es decir es una función del tiempo.

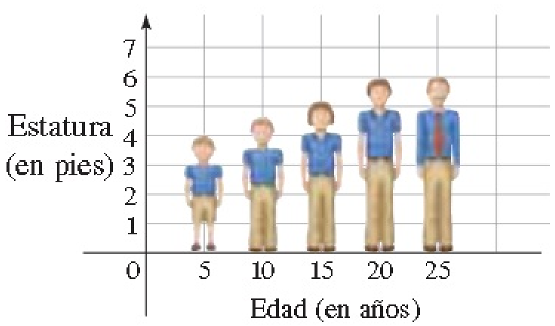
Funciones a nuestro alrededor

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

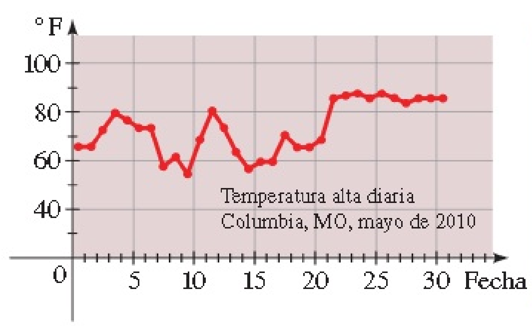
- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.

FIGURA 1



La estatura es función de la edad.



La temperatura es función de la fecha.

w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \leq 1$	1.22
$1 < w \leq 2$	1.39
$2 < w \leq 3$	1.56
$3 < w \leq 4$	1.73
$4 < w \leq 5$	1.90
$5 < w \leq 6$	2.07

El porte es función del peso.

En la siguiente lista los números de la derecha se relacionan con los de la izquierda de la siguiente forma

1 -> 1
2 -> 4
3 -> 9
4 -> 16
.
.
.

¿ se puede determinar la regla que los relaciona ?
--> Los números de la derecha son los cuadrados de los de la izquierda;
Por lo tanto la "regla" es "eleve al cuadrado"
En general, escribimos

$$x \longrightarrow x^2$$

Para referinos a esta "regla" le damos un nombre; la llamaremos "*f*"

"f" es la regla "elevar al cuadrado el número"
Cuando escribimos f(2) queremos decir "aplicar la regla f al número 2":

$$F(2) = 2^2 = 4$$
$$F(3) = 3^2 = 9$$
$$F(4) = 4^2 = 16$$

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

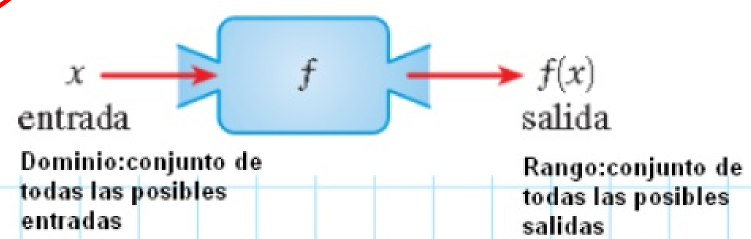
Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\boxed{\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 3 Diagrama de máquina de f



La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

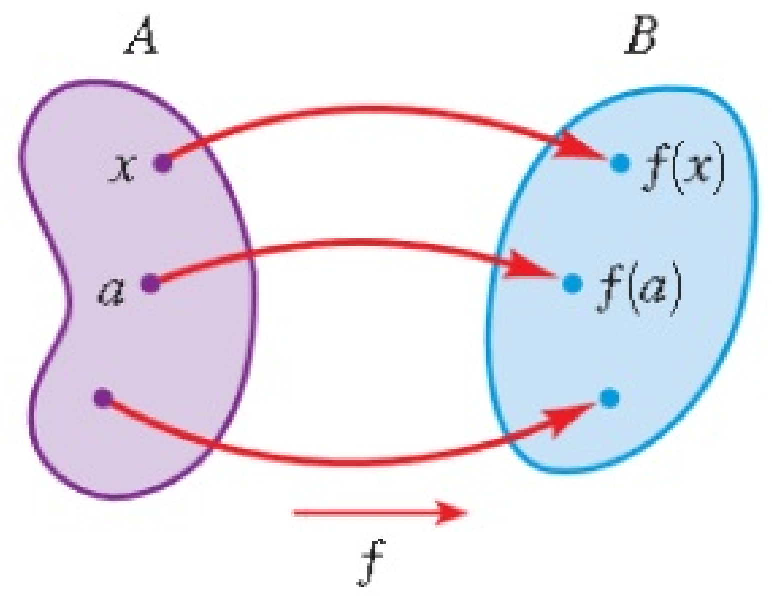


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$\boxed{f(x) = x^2 + 4}$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.

(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.

(c) Encuentre el dominio y rango de f.

(d) Trace un diagrama de máquina para f.

a) "Elevar al cuadrado , luego sumar 4"

b) $F(3) = 3^2 + 4 = 13$; $F(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$

$F(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ – dominio

Rango: $x^2 \geq 0$ $\{y \mid y > 4\} = [4, \infty]$

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

$$x^2 \geq 0$$

$$x^2 + 4 \geq 4$$

$$\boxed{f(x) \geq 4} \rightarrow \{y \mid y \geq 4\}$$

$$= [4, \infty]$$

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$f(3) = 3^2 + 4 = 13$ — Sustituir x por 3

$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8$ — Sustituir x por -2

$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9$ — Sustituir x por $\sqrt{5}$

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43**

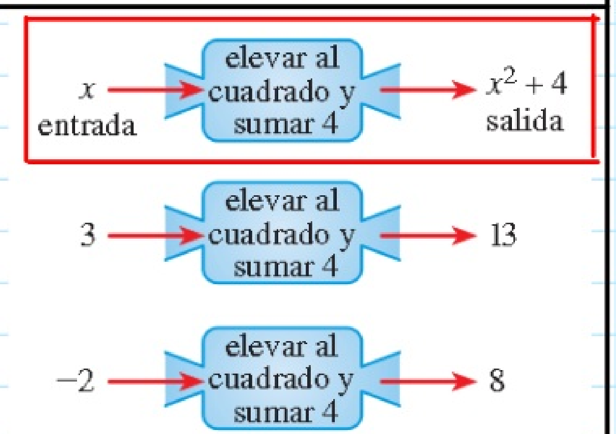


FIGURA 5 Diagrama de máquina

Fuer die Studenten

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.

(a) $f(-2)$ (b) $f(0)$ (c) $f(4)$ (d) $f(\frac{1}{2})$

$$f(x) = 3x^2 + x - 5$$

a) $f(-2) =$

b) $f(0) =$

c) $f(4) =$

d) $f(\frac{1}{2}) =$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f(\frac{1}{2}) = \underbrace{3 \cdot (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$ $\Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \underbrace{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}_{\frac{5}{4}} - 5 = \frac{5}{4} - 5 = \frac{5-20}{4} = \frac{-15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 19

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por :

$$\boxed{C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

$C(100) = 39 \qquad 0 \le 100 \le 400$

$C(400) = 39 \qquad 0 \le 400 \le 400$

$C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

→ Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

→ Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

→ Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 27

Fuer die Studenten

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ (b) $f(-a)$

(c) $f(a+h)$ (d) $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$

Solución:

a) $f(a) = \underline{2a^2 + 3a - 1}$

b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = \underline{2a^2 - 3a - 1}$

c) $f(a+h) = 2(a+h)^2 + 3(a+h) - 1$

$= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3a + 3h - 1$

$= \underline{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1}$

d) Al hacer uso de los resultados de los incisos a) y c) tenemos:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(\cancel{2a^2} + 4ah + 2h^2 \cancel{+3a} + 3h \cancel{-1}) - (\cancel{2a^2} \cancel{+3a} \cancel{-1})}{h} =$$

$$= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = \frac{\cancel{h}(4a + 2h + 3)}{\cancel{h}} =$$

$$= \underline{4a + 2h + 3}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 35

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$\boxed{f(x) = x^2} \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x-4}} \qquad \boxed{g(x) = \sqrt{x}}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \geq 0\}$.

$$F(x) \rightarrow \{x \mid x \neq 4\}$$

$$\{x \mid x \geq 0\}$$

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x} = \dfrac{1}{x(x-1)}$; **f(x) no está definida cuando x=0 o x=1**

Por lo tanto el dominio de f(x) es:

$$\{x \mid x \neq 0,\ x \neq 1\}$$

esto lo podemos escribir en notación de intervalos:

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$;

$9 - x^2 \geq 0$

$(3-x)(3+x) = 0$

$(3-x) = 0 \rightarrow x = 3$

$(3+x) = 0 \rightarrow x = -3$

$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$

(c) $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t+1}}$

$t+1 > 0 \rightarrow t > -1$

$\Rightarrow \{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$

$t + 1 > 0$

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

$C^\circ = \frac{5}{9}(F - 32)$

$\Rightarrow F = \frac{9}{5}C^\circ + 32$

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

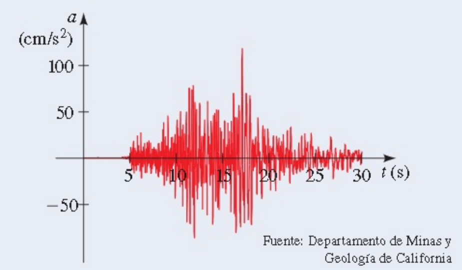
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado [redacted] antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

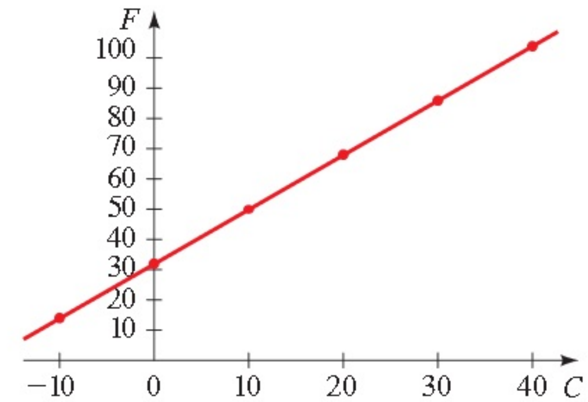
$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.



AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.

2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.

3. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.
(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2
6. Dividir entre 7, luego restar 4
7. Restar 5, luego elevar al cuadrado
8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$
10. $k(x) = \sqrt{x+2}$
11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$
12. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x-1}$
14. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

16. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6$; $\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$

18. $f(x) = x^3 + 2x$; $\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$

19. $f(x) = 2x + 1$;
$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

20. $f(x) = x^2 + 2x$;
$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$;
$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \le x \le 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.

(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

71. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.

(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?

(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

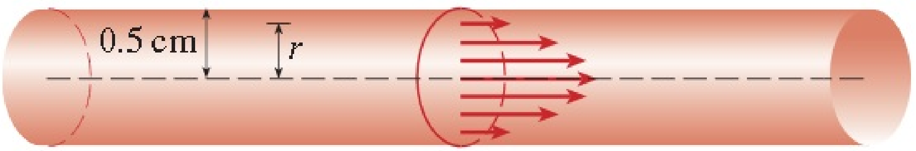
73. Circulación sanguínea Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.

(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?

(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895