2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

$\overset{y}{\downarrow}$

$(x, f(x))$

(x, y)

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (vea Figura 1).

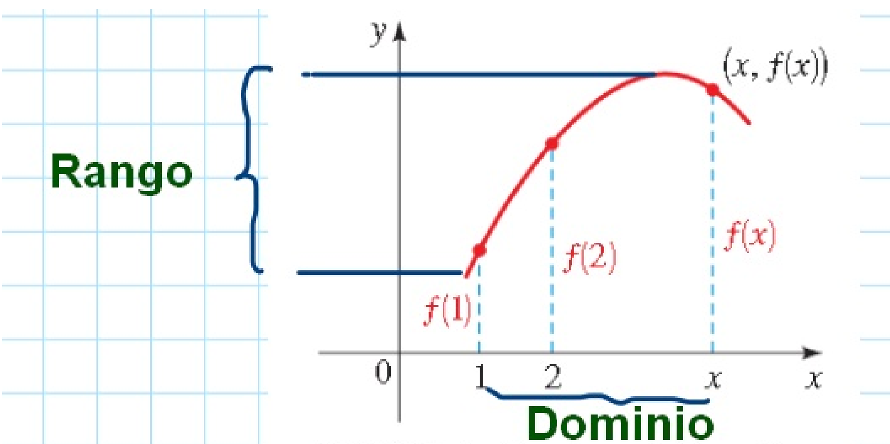
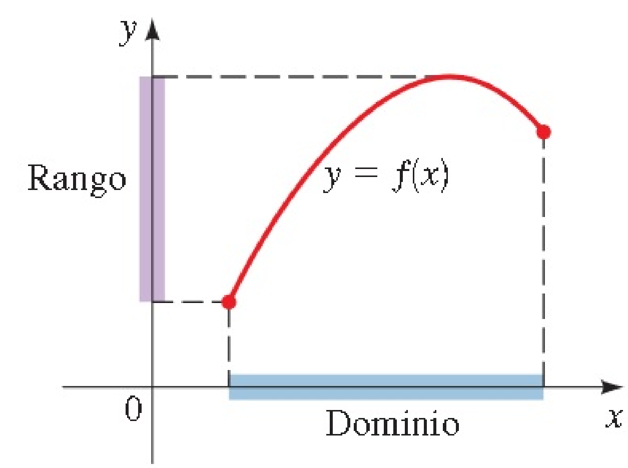


FIGURA 1 La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.



Gráfica de una función lineal:

Una función f de la forma

$f(x)= mx+b$

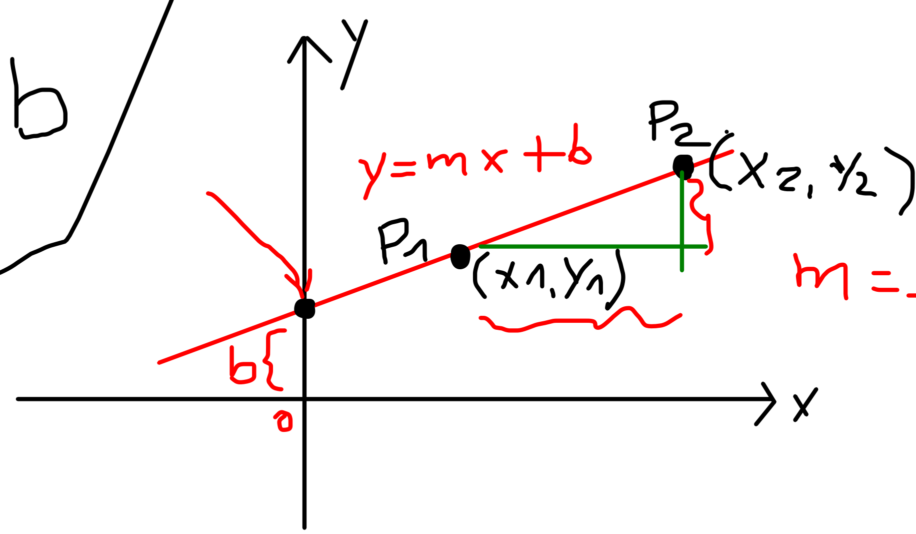
se denomina función lineal porque su gráfica es la gráfica de la ecuación

$y = mx + b,$

que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y.

Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es m=0. La función f(x)= b, donde b es un número determinado, recibe el nombre de función constante porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal y = b.

$$y = \underline{m}x + b$$

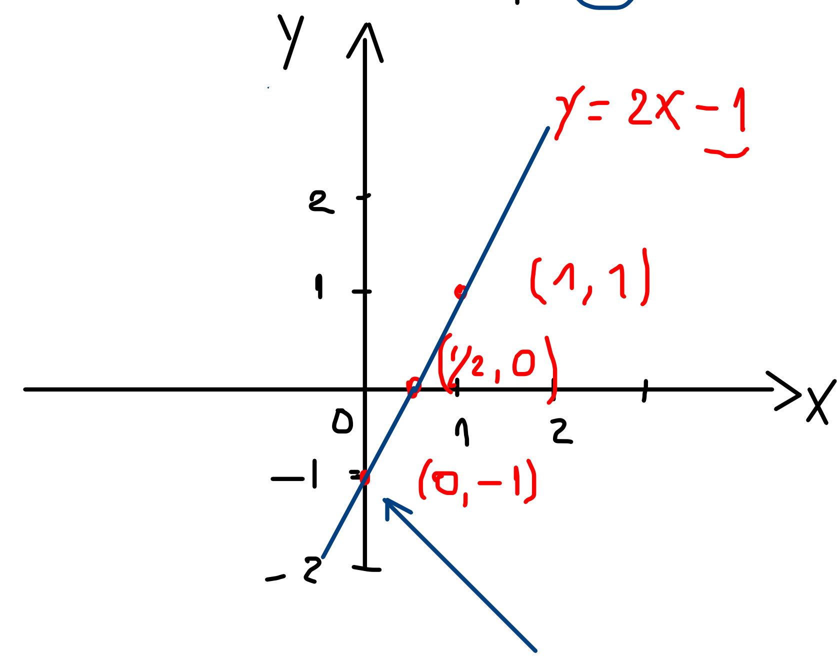


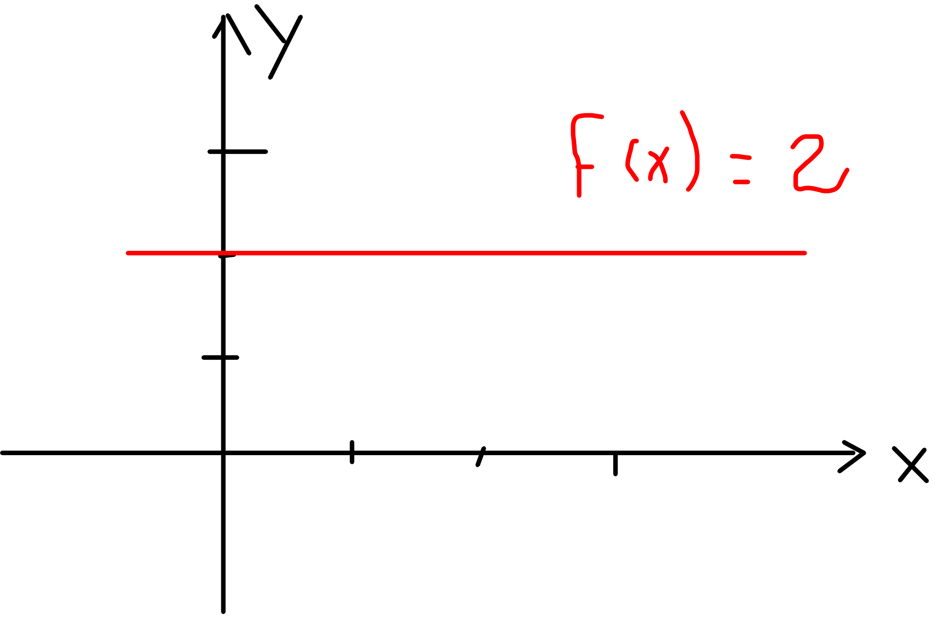
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

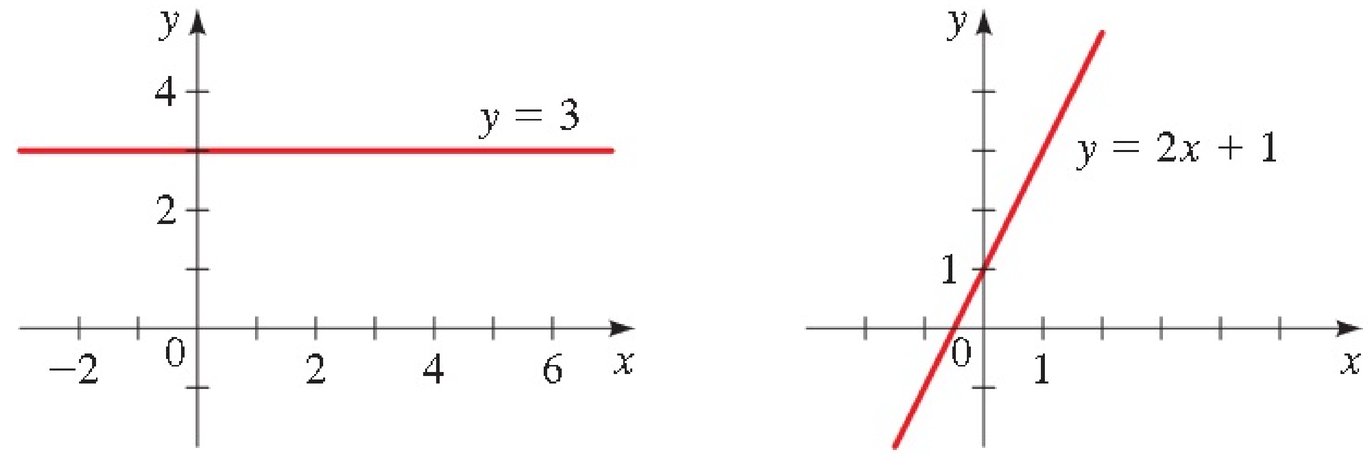
Ejemplo 1: trace la gráfica de la función $f(x)= 2x -1$

Solución: para trazar esta función lineal, graficamos la ecuación $\boxed{y = 2x -1}$

x	y
0	−1
1	1
$\frac{1}{2}$	0







La función constante $f(x) = 3$

La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

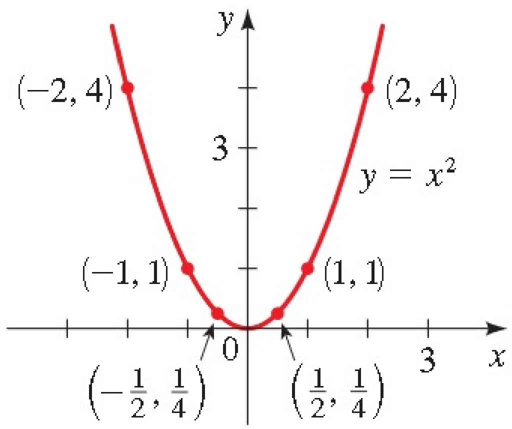
(b) y (c) fuer die Studenten

SOLUCIÓN

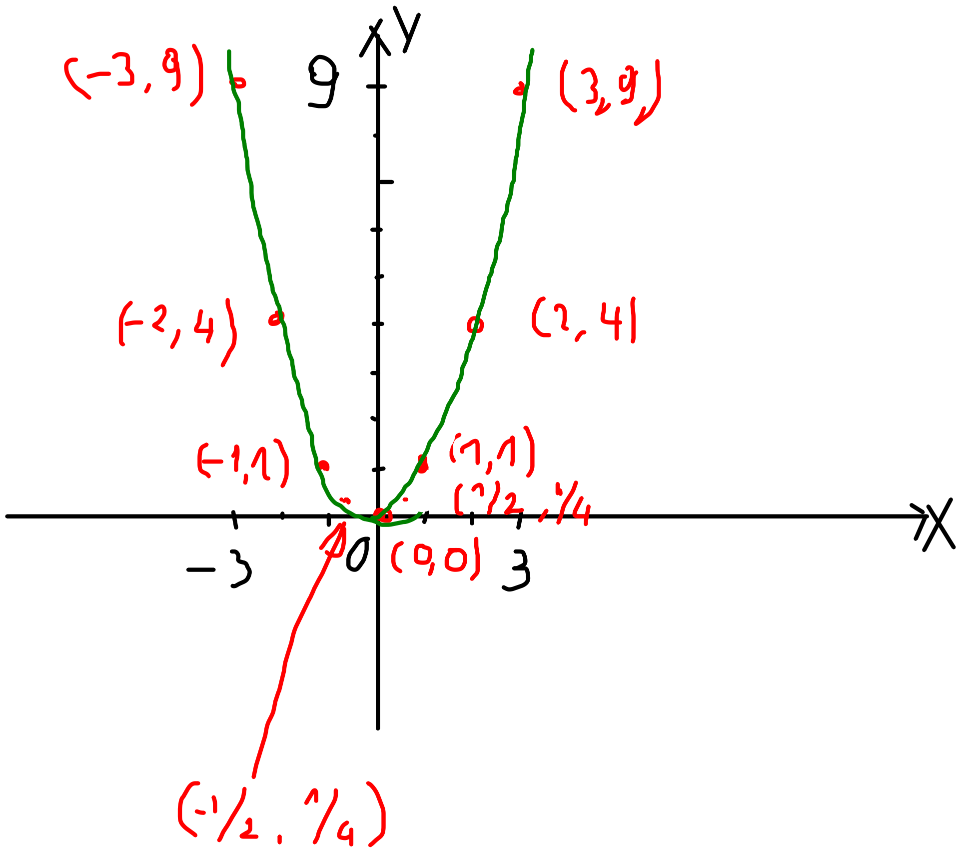
Primero hacemos una tabla de valores, luego localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica.

$\boxed{\textbf{(a)}\ f(x) = x^2}$

x	$f(x)=x^2$
0	0
$\pm\ 1/2$	$1/4$
$\pm\ 1$	1
$\pm\ 2$	4
$\pm\ 3$	9

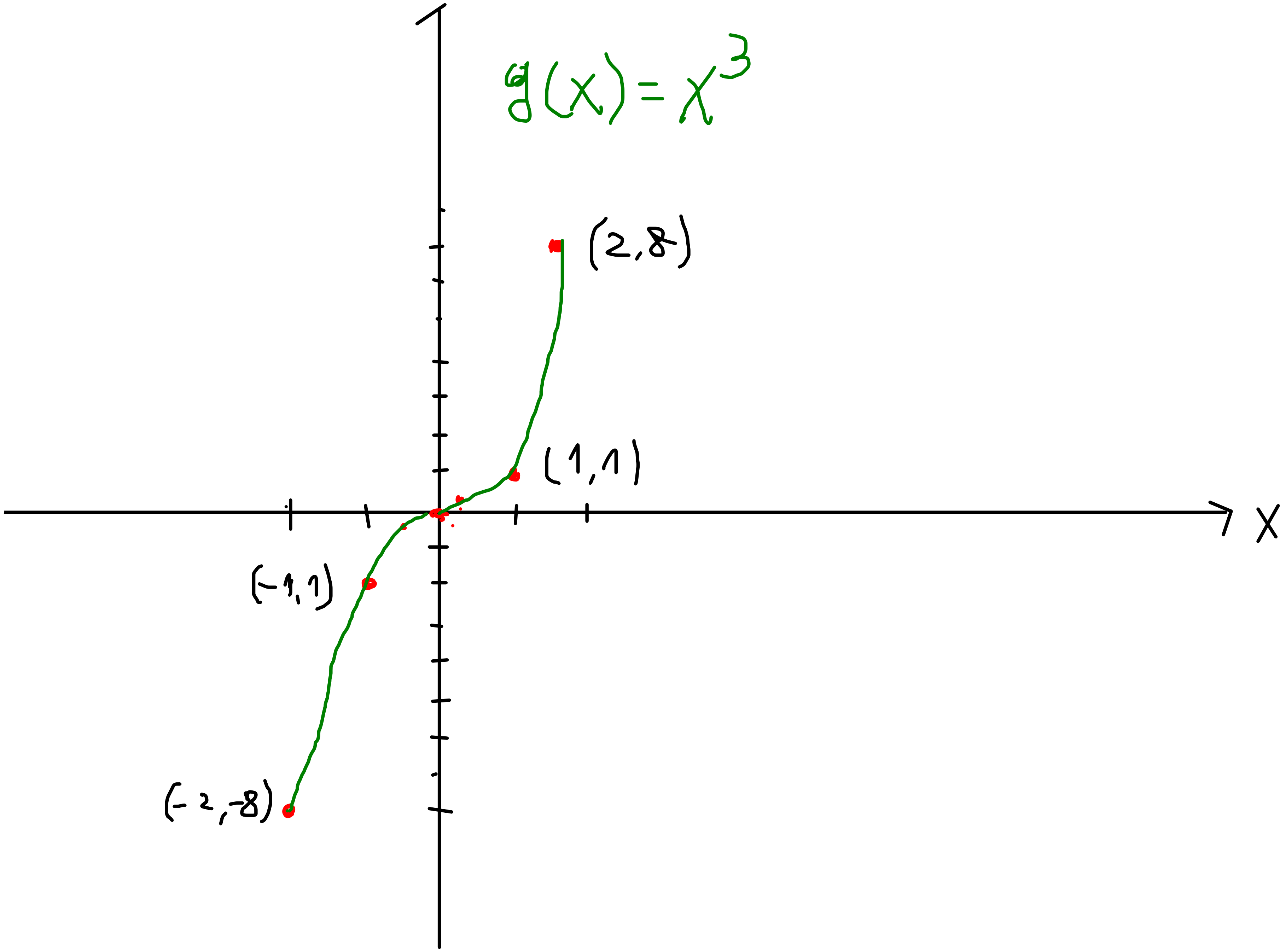


x	$f(x)=x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9



(b) $g(x) = x^3$

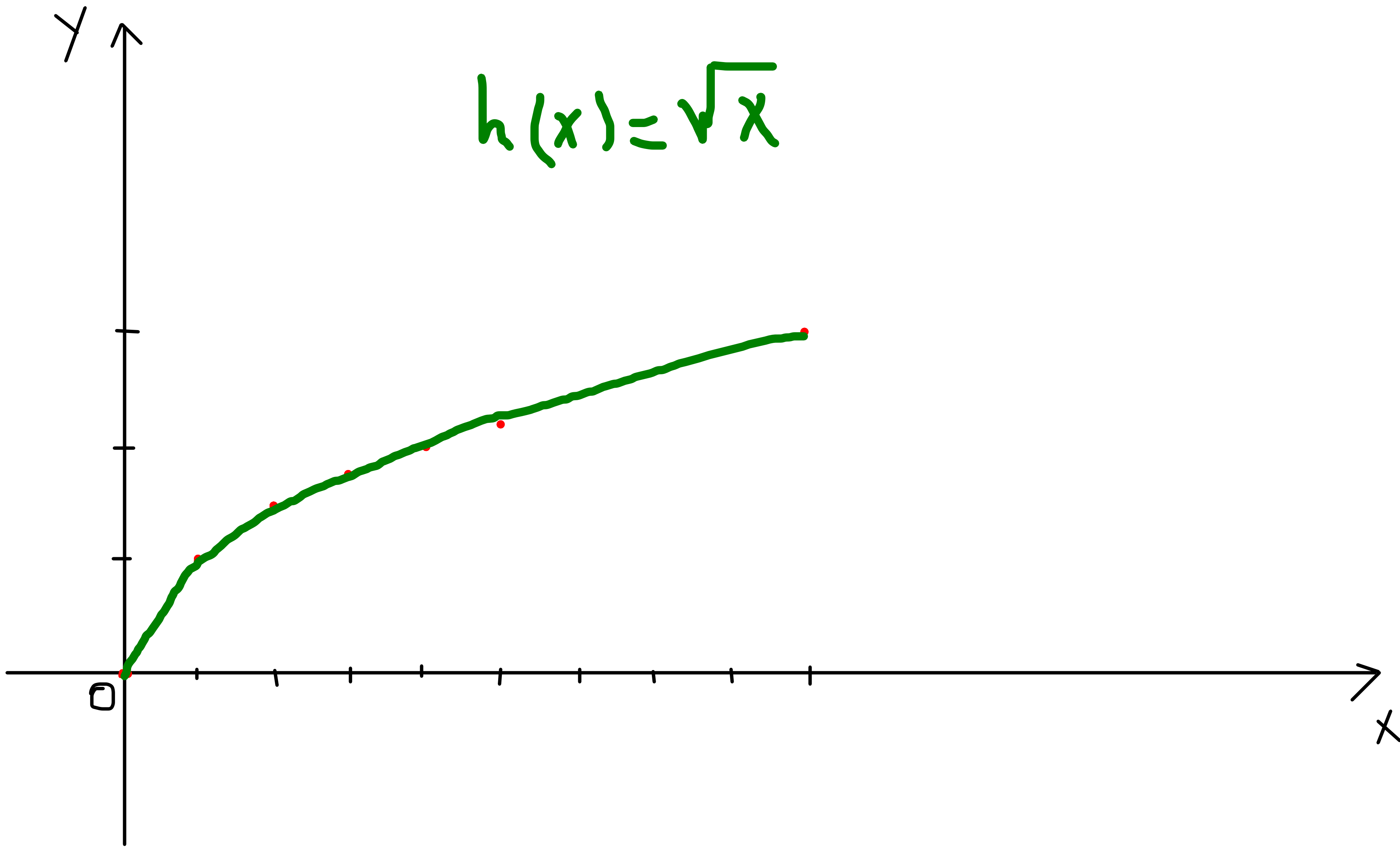
x	$g(x) = x^3$
0	0
$1/2$	$1/8$
1	1
2	8
$-1/2$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8



(c) $h(x) = \sqrt{x}$

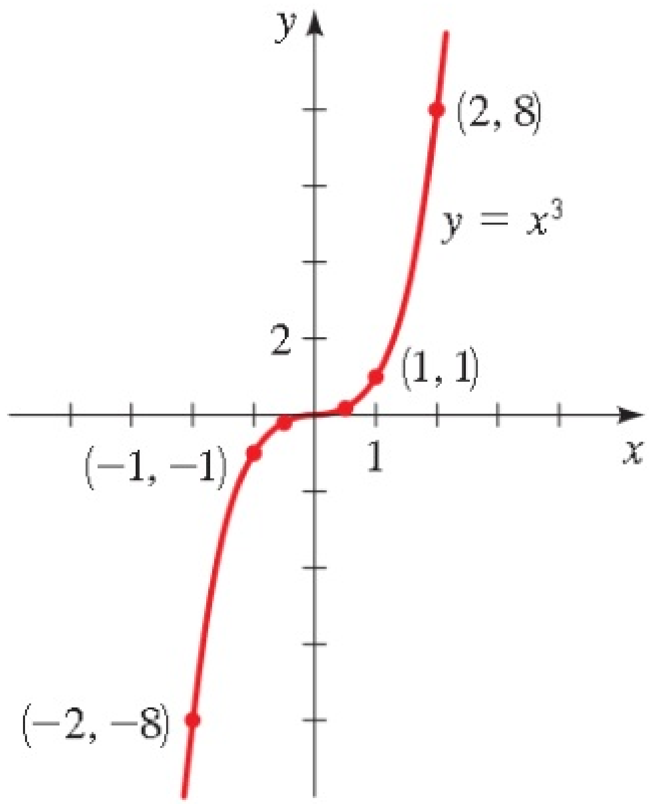
$\{x \mid x \geq 0\}$ - dom.

x	$h(x)=\sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$
9	3



(b) $g(x) = x^3$

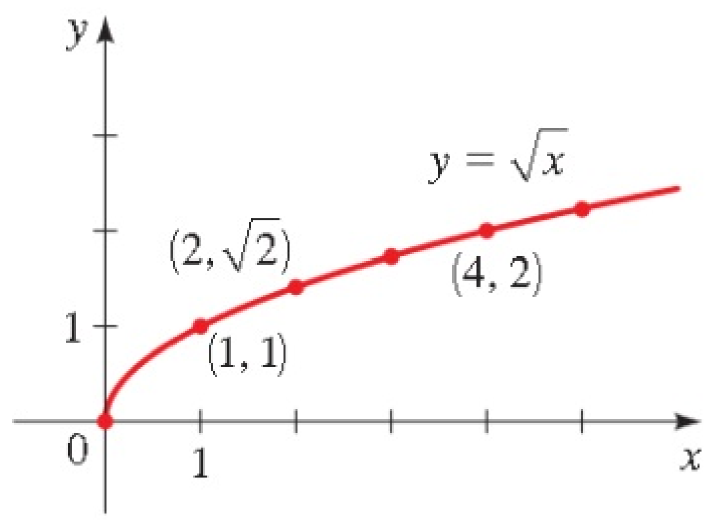
x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8



(b) $g(x) = x^3$

(c) $h(x) = \sqrt{x}$

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$



EJEMPLO 2 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la Figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

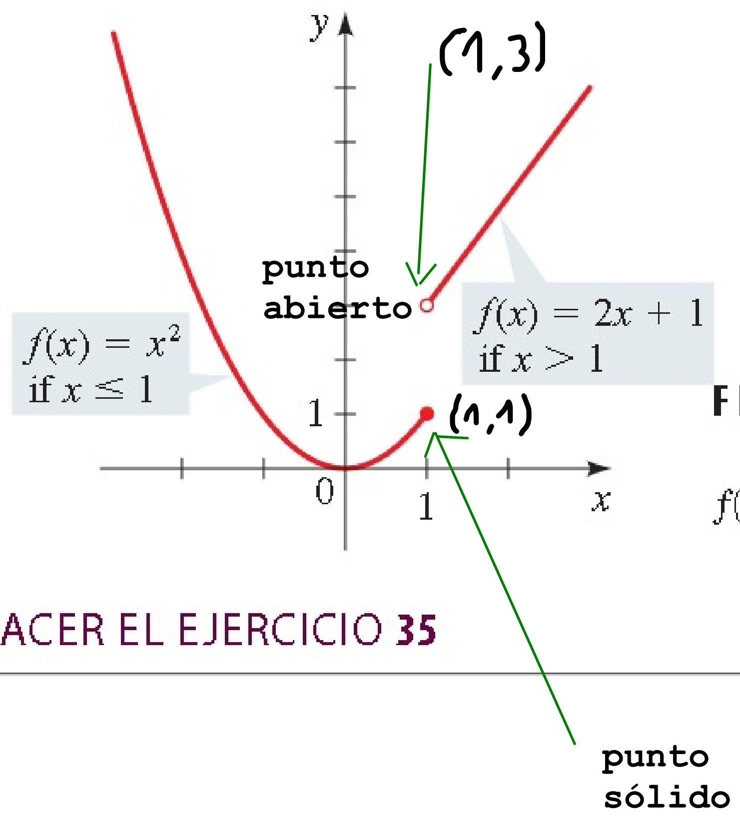


FIGURA 6

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

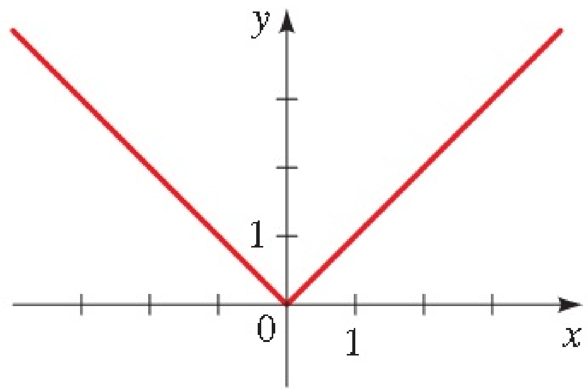
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 3 | Gráfica de la función valor absoluto

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el ejemplo anterior, observamos que la gráfica de f coincide con la recta y=x a la derecha del eje **y** *y coincide con la recta y= -x a la izquierda del eje* **y**



AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

> **LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL**
>
> Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

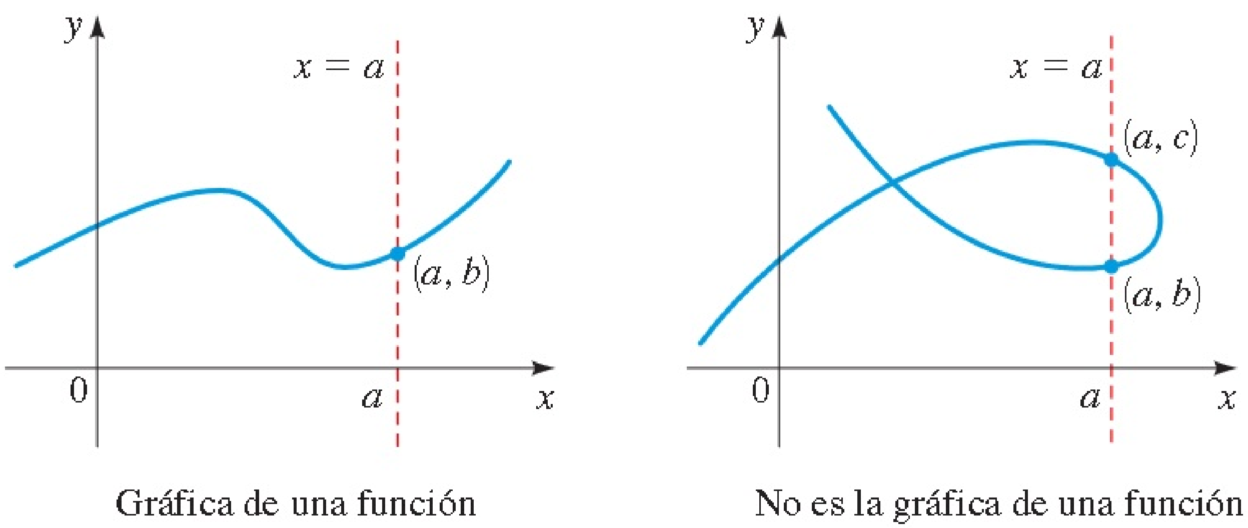
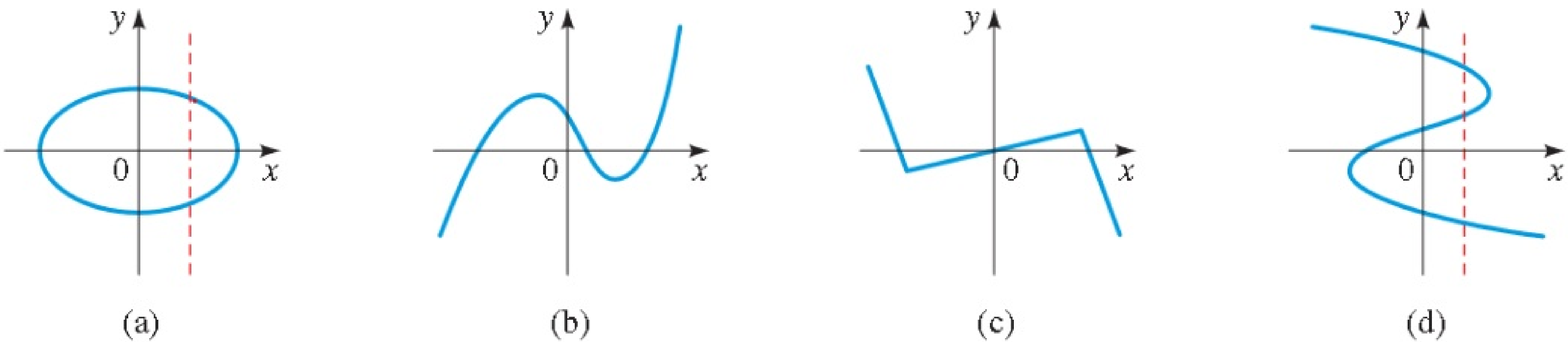


FIGURA 10 Prueba de la Recta Vertical

(b) y (c) fuer die Studenten

Ejercicio 1. *Determine cuáles de las siguientes gráficas corresponden a gráficas de funciones*



AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Ejemplo 5 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

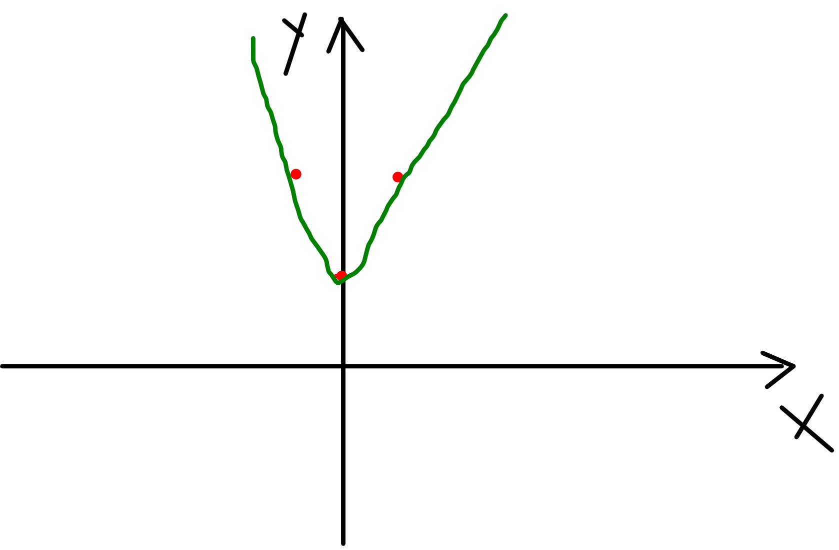
(a) $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

Solución (a)

$$y - x^2 = 2$$

$$y = x^2 + 2$$

$$f(x) = x^2 + 2$$

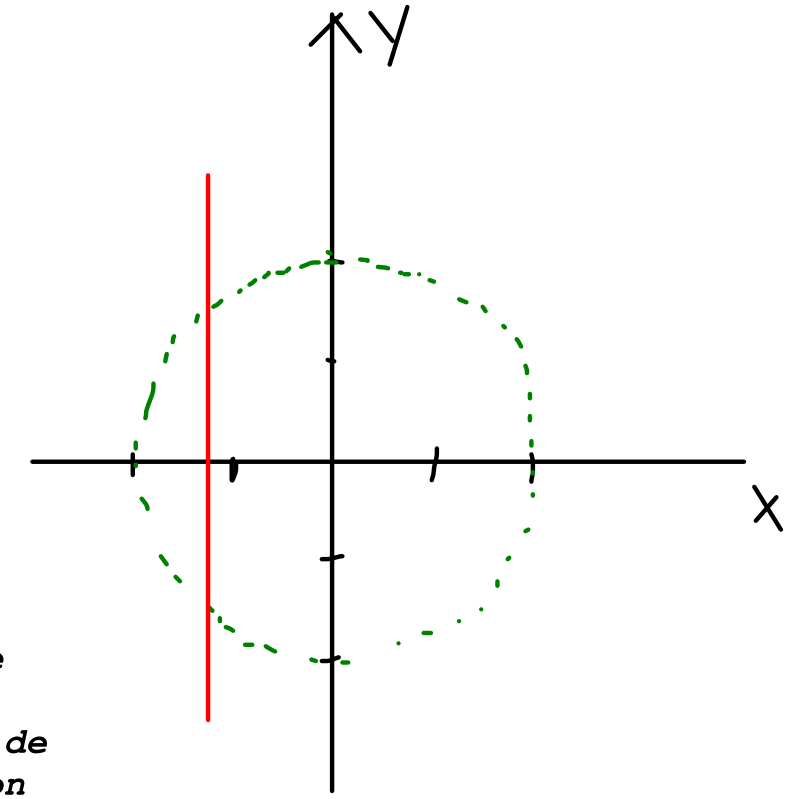


Solución (b)

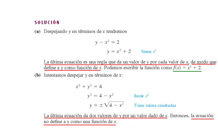
$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$$



De esta última ecuación se obtienen dos valores de y para un determinado valor de x.Por lo tanto, la ecuación no fefine a y como una función de x.

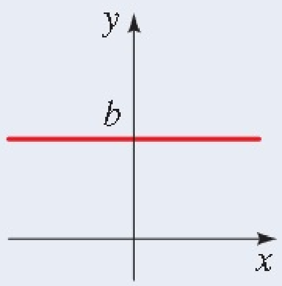


Resumen:

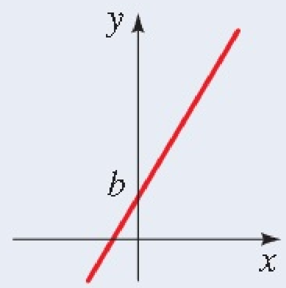
ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales

$f(x) = mx + b$



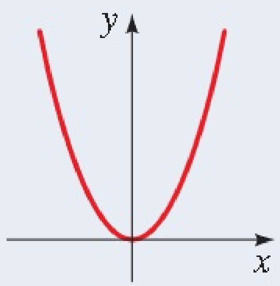
$f(x) = b$



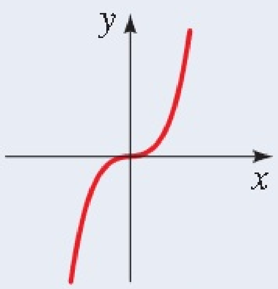
$f(x) = mx + b$

Funciones potencia

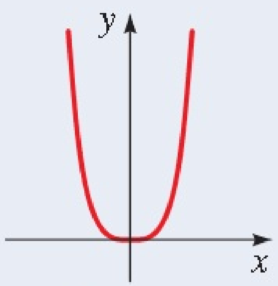
$f(x) = x^n$



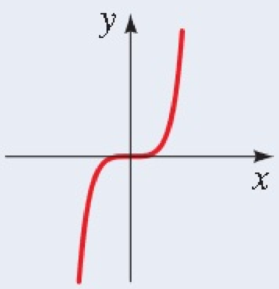
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$



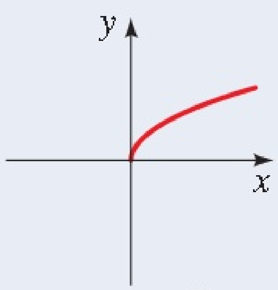
$f(x) = x^4$



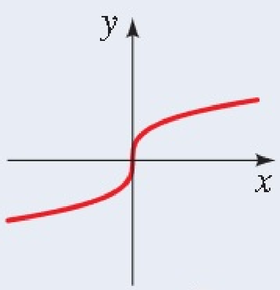
$f(x) = x^5$

Funciones raíz

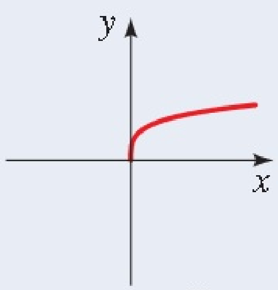
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



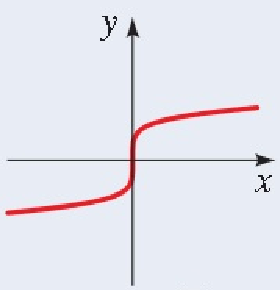
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$



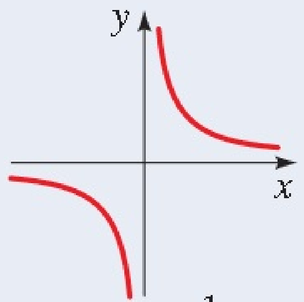
$f(x) = \sqrt[4]{x}$



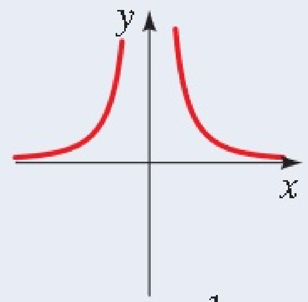
$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas

$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$



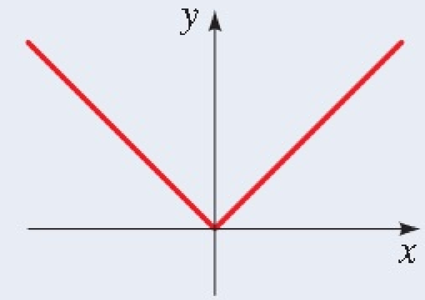
$f(x) = \dfrac{1}{x}$



$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto

$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

2.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para graficar la función f, localizamos los puntos $(x,\_)$ en un plano de coordenadas. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos $(x,\_)$. Por lo tanto, el punto $(2,\_\_\_)$ está sobre la gráfica de f. La altura de la gráfica de f arriba del eje x cuando $x = 2$ es ____.

2. Si $f(2) = 3$, entonces el punto $(2,\_\_\_)$ está sobre la gráfica de f.

3. Si el punto $(2, 3)$ está sobre la gráfica de f, entonces $f(2) =$ ____.

HABILIDADES

5-28 ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5. $f(x) = 2$
6. $f(x) = -3$
7. $f(x) = 2x - 4$
8. $f(x) = 6 - 3x$
9. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \leq x \leq 3$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \quad 0 \leq x \leq 5$
11. $f(x) = -x^2$
12. $f(x) = x^2 - 4$
13. $h(x) = 16 - x^2$
14. $g(x) = (x-3)^2$
15. $g(x) = x^3 - 8$
16. $g(x) = (x+2)^3$
17. $g(x) = x^2 - 2x$
18. $h(x) = 4x^2 - x^4$
19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
20. $f(x) = \sqrt{x+4}$
21. $g(x) = -\sqrt{x}$
22. $g(x) = \sqrt{-x}$
23. $H(x) = |2x|$
24. $H(x) = |x+1|$
25. $G(x) = |x| + x$
26. $G(x) = |x| - x$
27. $f(x) = |2x - 2|$
28. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

33-46 ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

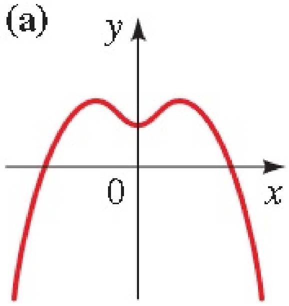
37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

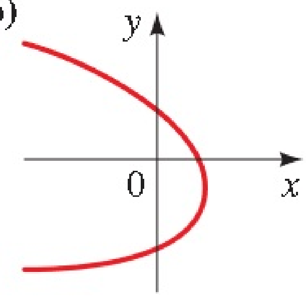
41. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

51-52 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x.

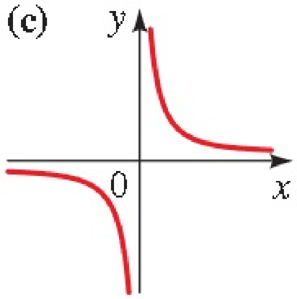
51. **(a)**



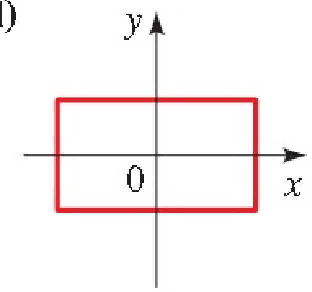
(b)



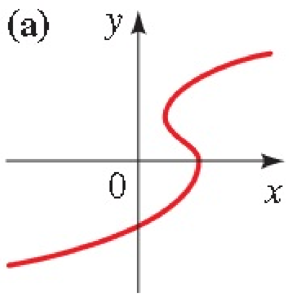
(c)



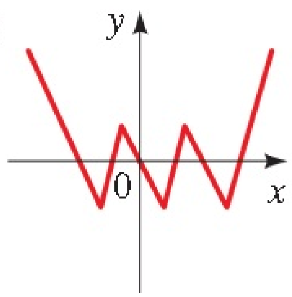
(d)



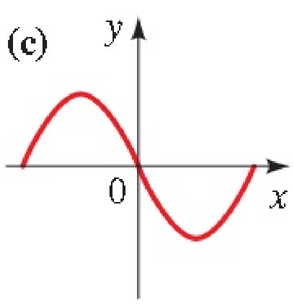
52. **(a)**



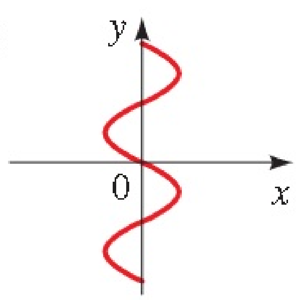
(b)



(c)

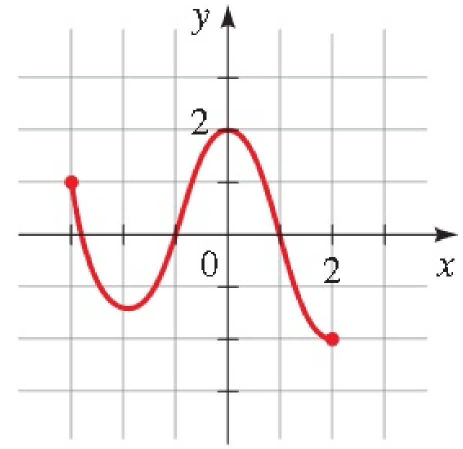


(d)

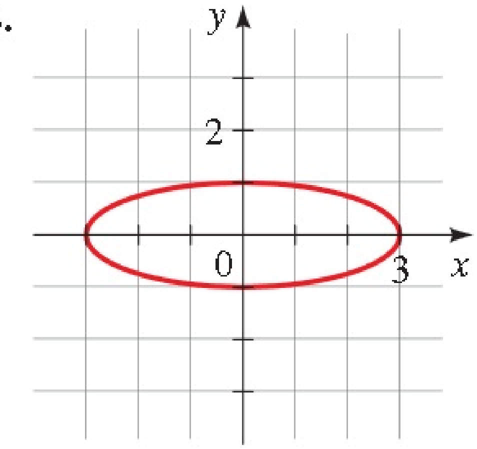


53-56 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

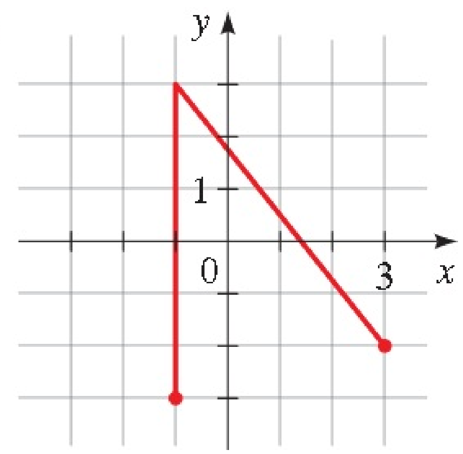
53.



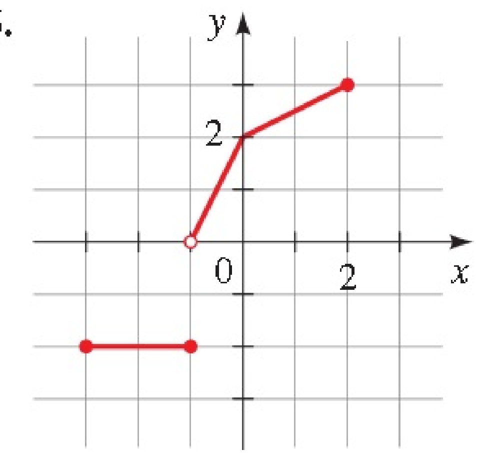
54.



55.



56.



57-68 ■ Determine si la ecuación define y como función de x. (Vea Ejemplo[redacted] 5)

57. $x^2 + 2y = 4$

58. $3x + 7y = 21$

59. $x = y^2$

60. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61. $x + y^2 = 9$

62. $x^2 + y = 9$

63. $x^2y + y = 1$

64. $\sqrt{x} + y = 12$

65. $2|x| + y = 0$

66. $2x + |y| = 0$

67. $x = y^3$

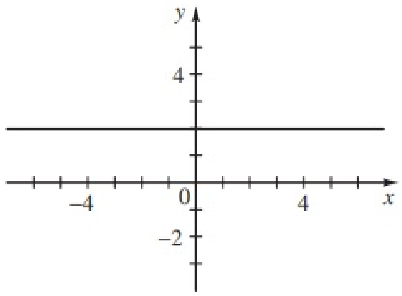
68. $x = y^4$

Respuestas a ejercicios impares sección 2.2

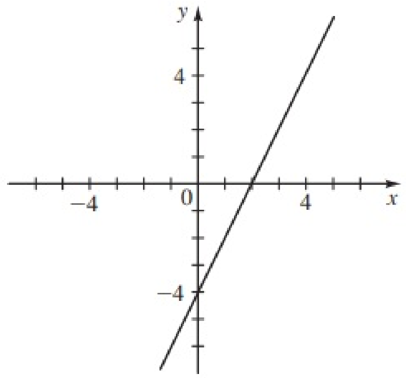
1. $f(x)$, $x^3 + 2$, 10, 10 **2.** 3 **3.** 3

4. **(a)** IV **(b)** II **(c)** I **(d)** III

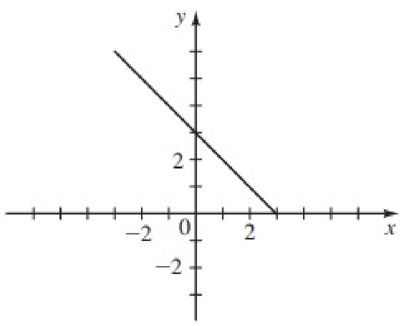
5.



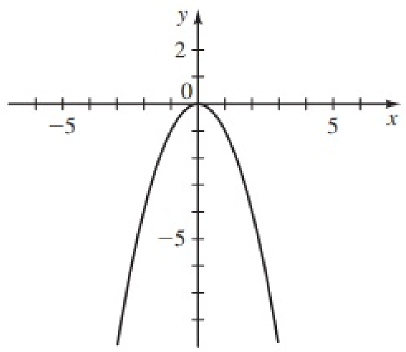
7.



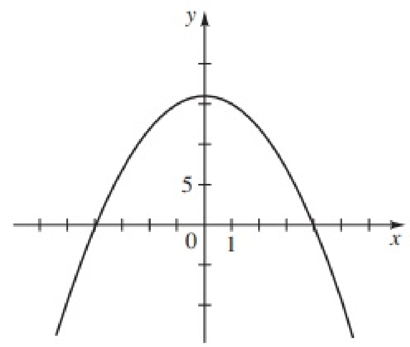
9.



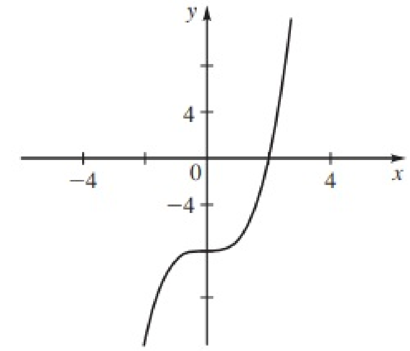
11.



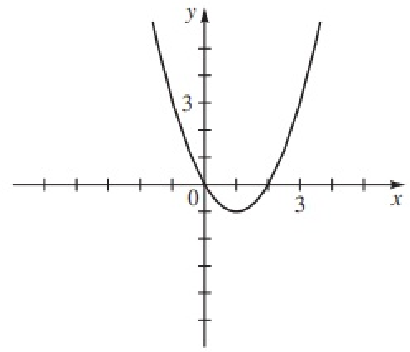
13.



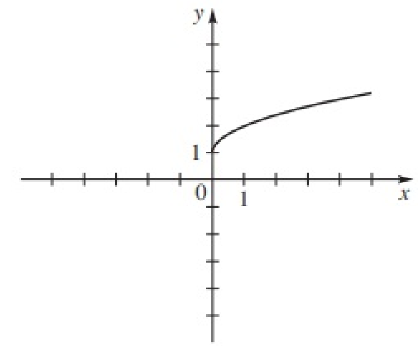
15.



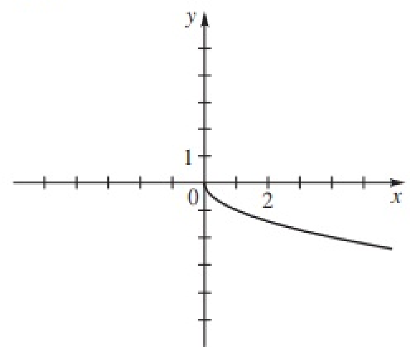
17.



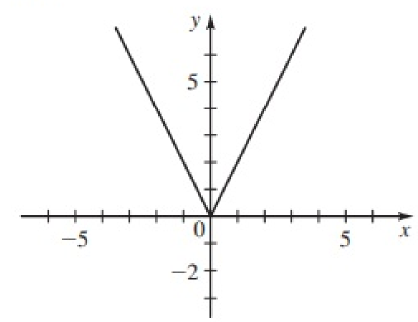
19.



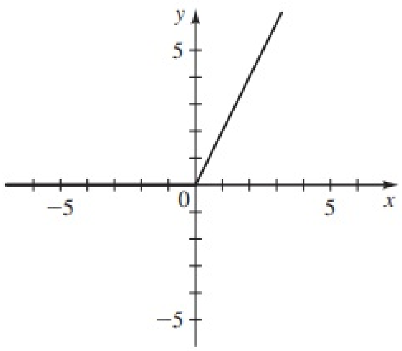
21.



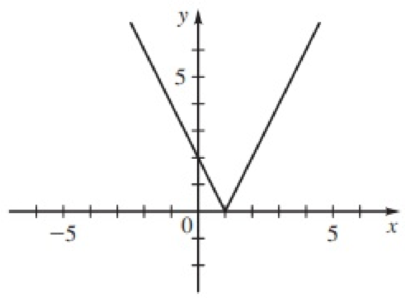
23.



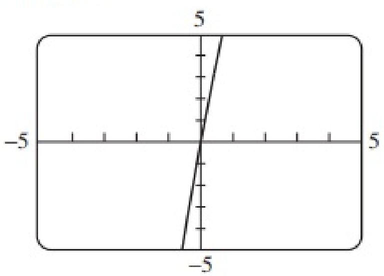
25.



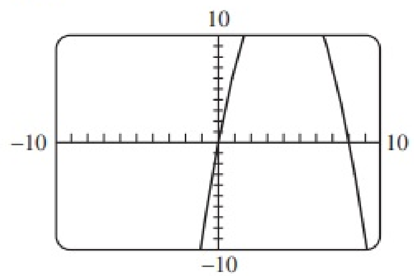
27.



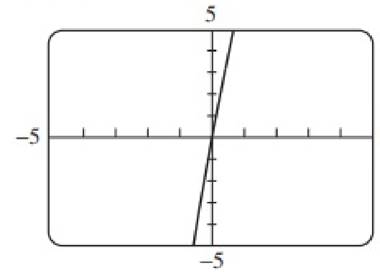
29. (a)



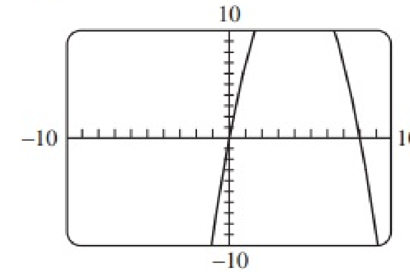
(b)



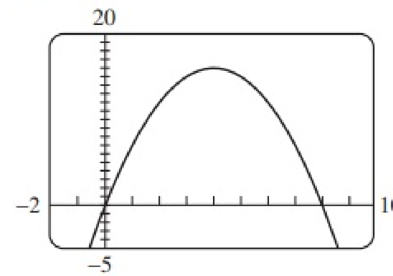
29. (a)



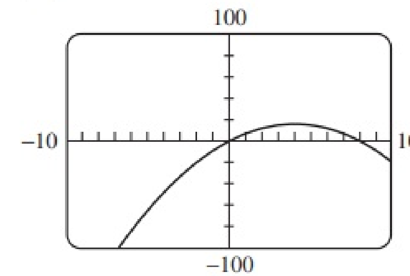
(b)



(c)

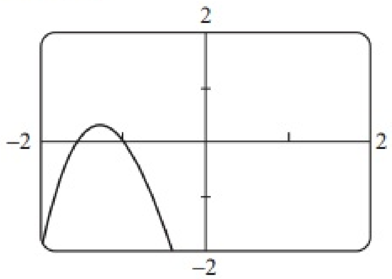


(d)

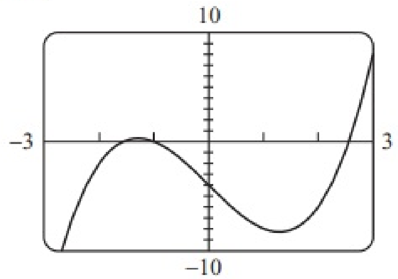


La gráfica (c) es la más apropiada.

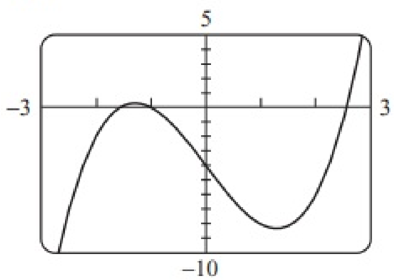
31. (a)



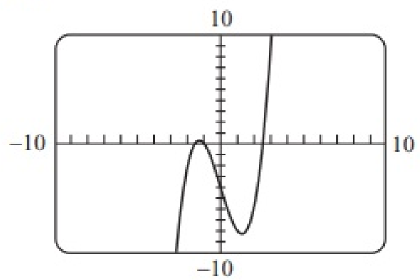
(b)



(c)

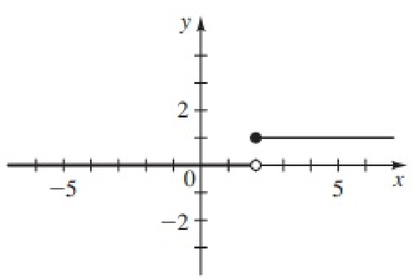


(d)

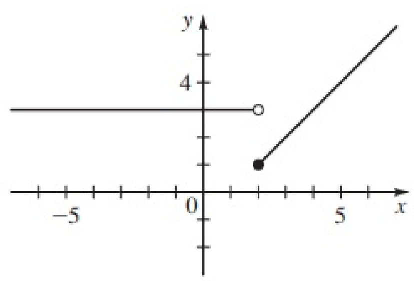


La gráfica (c) es la más apropiada.

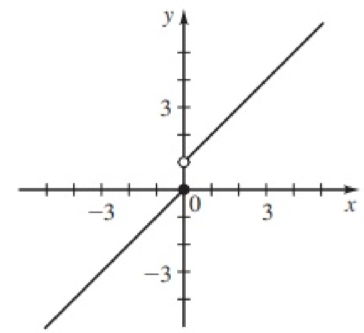
33.



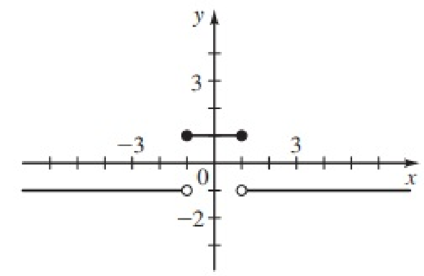
35.



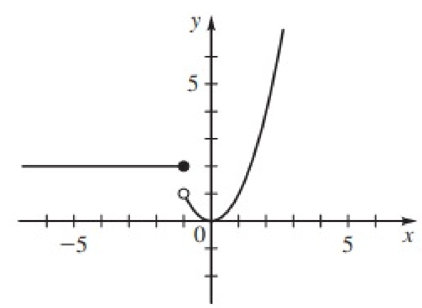
37.



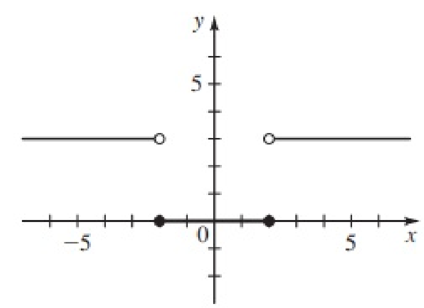
39.



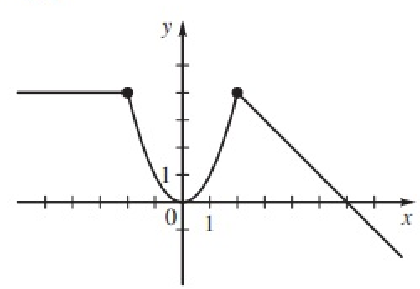
41.



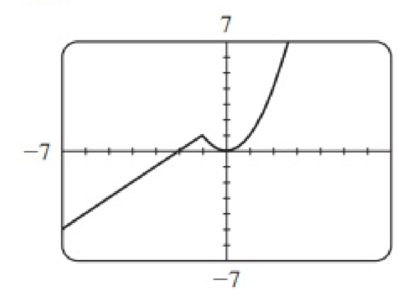
43.



45.



47.



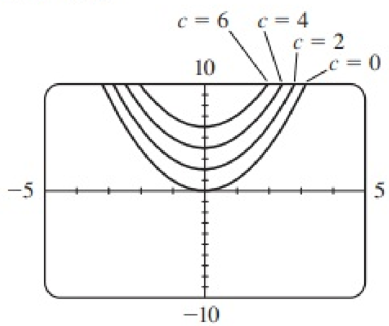
49. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51. **(a)** Sí **(b)** No **(c)** Sí **(d)** No

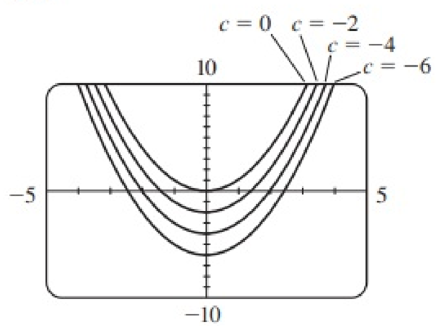
53. Función, dominio $[-3, 2]$, rango $[-2, 2]$ **55.** No es una función

57. Sí **59.** No **61.** No **63.** Sí **65.** Sí **67.** Sí

69. **(a)**

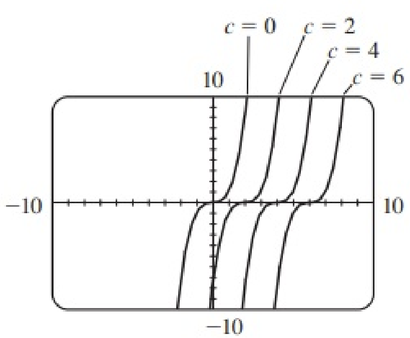


(b)

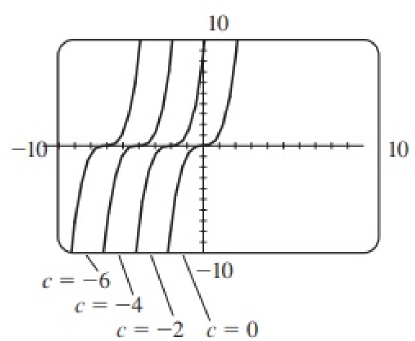


(c) Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia arriba c unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia abajo c unidades.

71. **(a)**

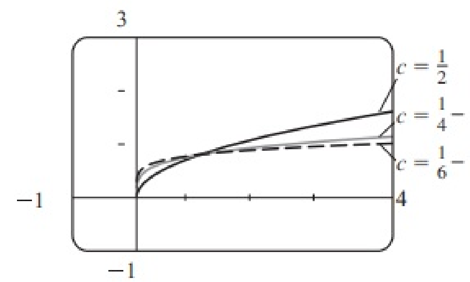


(b)

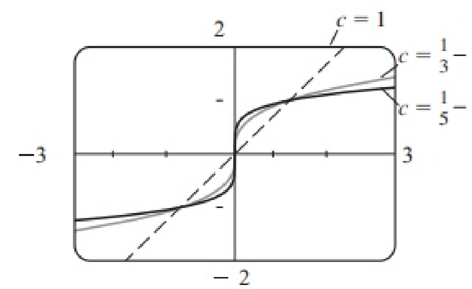


(c) Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la gráfica de $y = x^3$ desplazada a la derecha c unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la gráfica de $y = x^3$ desplazada a la izquierda c unidades.

73. **(a)**



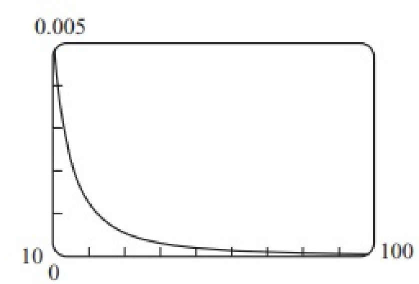
(b)



(c) Las gráficas de raíces pares son semejantes a $\sqrt{x}$; las gráficas de raíces impares son semejantes a $\sqrt[3]{x}$. Cuando c aumenta, la gráfica de $y = \sqrt[c]{x}$ se hace más pronunciada cerca de 0 y más plana cuando $x > 1$. **75.** $f(x) = -\frac{7}{6}x - \frac{4}{3}$, $-2 \le x \le 4$

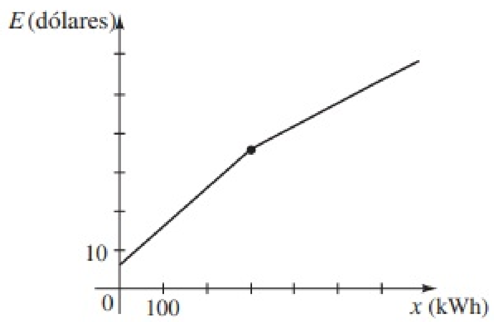
77. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, $-3 \le x \le 3$

79.



81. (a) $E(x) = \begin{cases} 6 + 0.10x & 0 \leq x \leq 300 \\ 36 + 0.06(x - 300), & x > 300 \end{cases}$

(b)



83. $P(x) = \begin{cases} 0.44 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0.61 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0.78 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0.95 & \text{si } 3 < x \leq 3.5 \end{cases}$