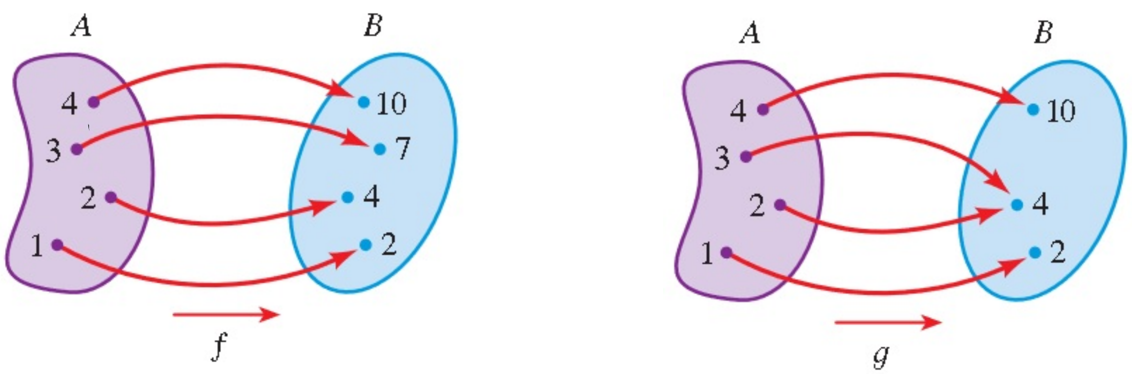
2.7 FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

▼ Funciones uno a uno

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$



f es uno a uno

g no es uno a uno

FIGURA 1

PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

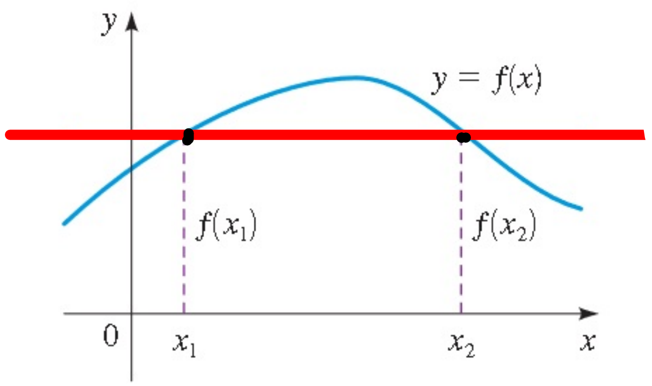


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Función biyectiva

La noción de una **función** es fundamentalmente importante en prácticamente todas las áreas de las **matemáticas**, por lo que es importante aprender algunas definiciones básicas con respecto a las funciones. Una **función biyectiva** es una función que es tanto **inyectiva** como **sobreyectiva**. Esta función también es conocida con el nombre de función **uno-a-uno**, y es importante hacer la distinción de que nunca asigna dos elementos en su **dominio** al mismo elemento en su **rango**.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

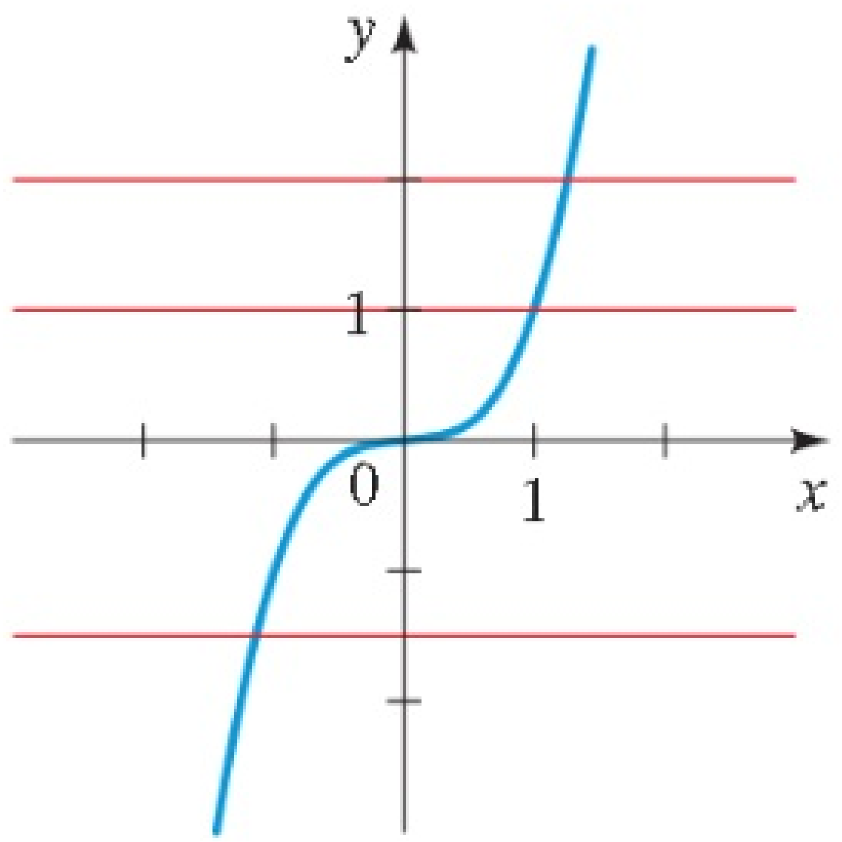


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

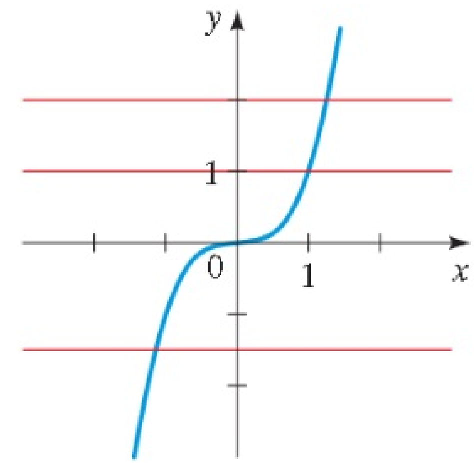


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

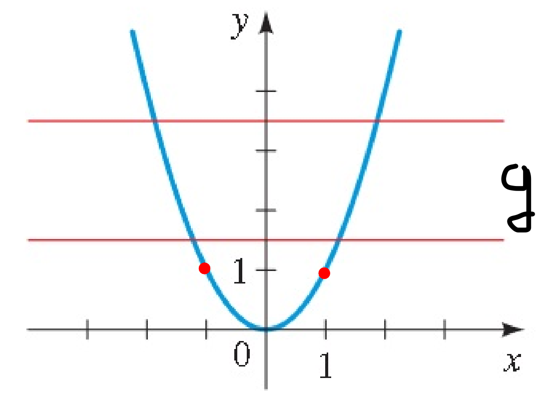
SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \quad \text{y} \quad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, g no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15



$g(x)=x^2$

FIGURA 4 [redacted]) $= x^2$ no es uno a uno.

La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y}$$

para cualquier y en B.

Esta definición dice que si f toma x por y, entonces f^{-1} regresa y a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición tenemos

$$\boxed{\begin{aligned} \text{dominio de } f^{-1} &= \text{rango de } f \\ \text{rango de } f^{-1} &= \text{dominio de } f \end{aligned}}$$

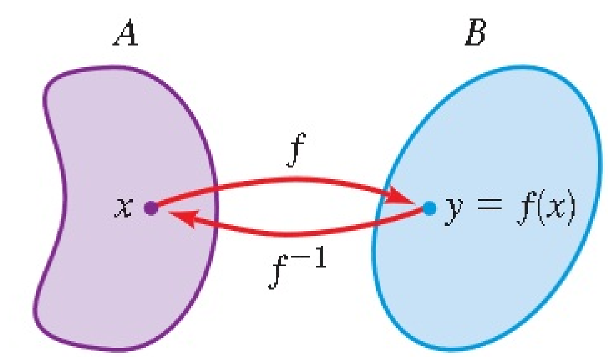


FIGURA 6

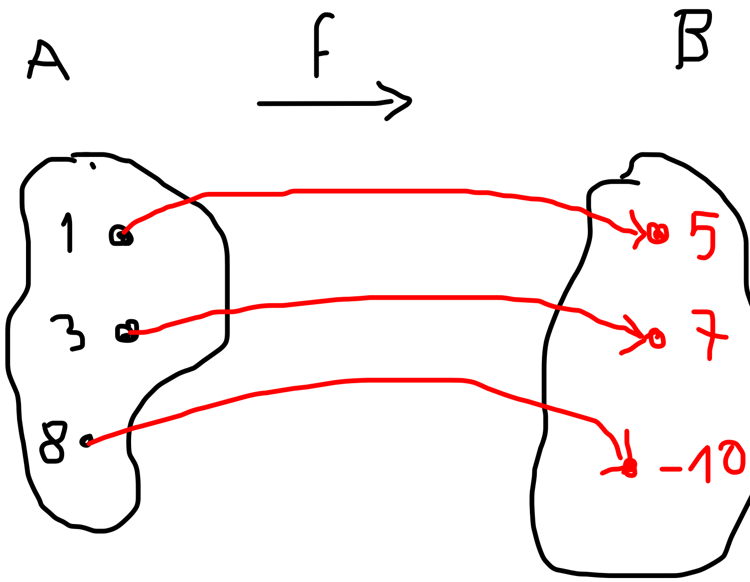
EJEMPLO 4 | Hallar f^{-1} para valores específicos

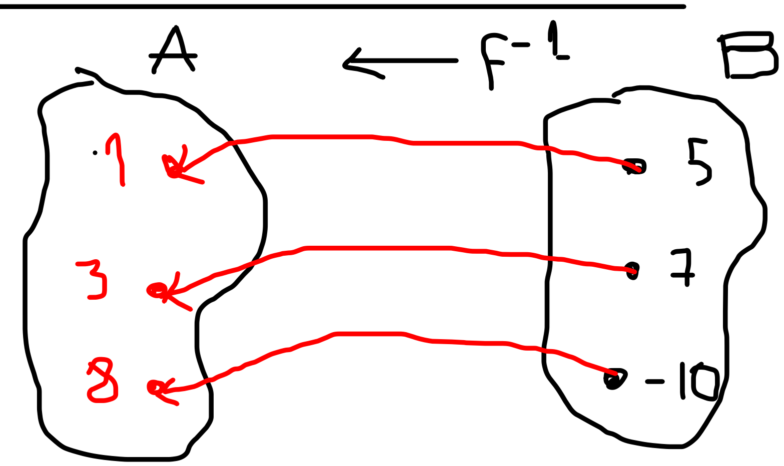
Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, hallar $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(-10)$.

$f(1) = 5 \rightarrow f^{-1}(5) = 1$ porque $f(1) = 5$

$f(3) = 7 \rightarrow f^{-1}(7) = 3$

$f(8) = -10 \rightarrow f^{-1}(-10) = 8$





EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $\boxed{f(x) = 3x - 2.}$

Solución:

Primero escribimos: $y = F(x)$

$$y = 3x - 2$$

luego, de esta ecuación se despeja x:

$$3x = y + 2$$

$$x = \frac{y+2}{3}$$

Por último,intercambiamos X y Y:

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Por lo tanto , la función inversa es:

$$F^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$$

Ejercicio: Hallar la inversa de la siguiente función.

$$F(x) = \frac{x^5 - 3}{2}$$

$$y = \frac{x^5 - 3}{2} \rightarrow 2y = x^5 - 3$$

$$x^5 = 2y + 3$$

$$x = (2y+3)^{1/5}$$

$$\Rightarrow F^{-1}(x) = (2x+3)^{1/5}$$

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

No confunda el -1 de f^{-1} por un exponente.

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

Ojo!!!

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$\boxed{f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y}$$

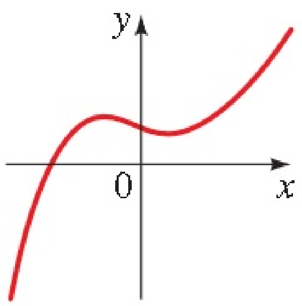
para cualquier y en B.

2.7 EJERCICIOS

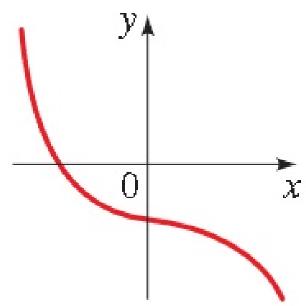
HABILIDADES

5-10 ■ Nos dan la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno.

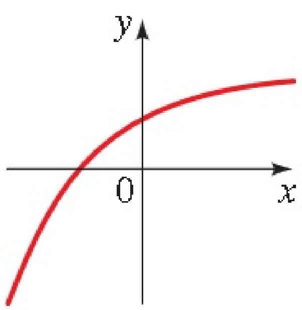
5.



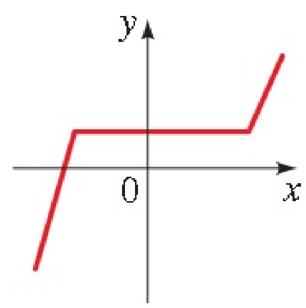
6.



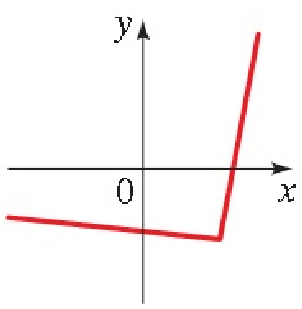
7.



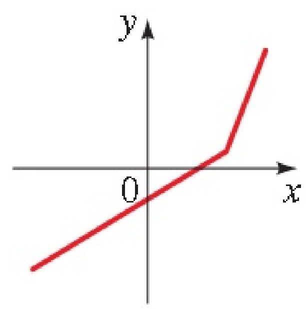
8.



9.



10.



11-20 ■ Determine si la función es uno a uno.

11. $f(x) = -2x + 4$

12. $f(x) = 3x - 2$

13. $g(x) = \sqrt{x}$

14. $g(x) = |x|$

15. $h(x) = x^2 - 2x$

16. $h(x) = x^3 + 8$

17. $f(x) = x^4 + 5$

18. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \le x \le 2$

19. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

21-22 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

21. **(a)** Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.
(b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

25-36 ■ Use la Propiedad de la Función Inversa para demostrar que f y g son inversas entre sí.

25. $f(x) = x - 6; \quad g(x) = x + 6$

26. $f(x) = 3x; \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

27. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x + 5}{2}$

28. $f(x) = \dfrac{3 - x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

37-60 ■ Encuentre la función inversa de f.

37. $f(x) = 2x + 1$

38. $f(x) = 6 - x$

39. $f(x) = 4x + 7$

40. $f(x) = 3 - 5x$

53. $f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0$

54. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

2.7-Respuestas a ejercicios impares

1. diferente, Recta Horizontal **2. (a)** uno a uno, $g(x) = x^3$ **(b)** $g^{-1}(x) = x^{1/3}$ **3. (a)** Tome la raíz cúbica, reste 5, luego divida el resultado entre 3 **(b)** $f(x) = (3x + 5)^3, f^{-1}(x) = \dfrac{x^{1/3} - 5}{3}$

4. (a) Falso **(b)** Verdadero **5.** No **7.** Sí **9.** No **11.** Sí **13.** Sí **15.** No **17.** No **19.** No **21. (a)** 2 **(b)** 3 **23.** 1

37. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ **39.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 7)$

41. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{4}(5 - x)}$ **43.** $f^{-1}(x) = (1/x) - 2$

45. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x}{1 - x}$ **47.** $f^{-1}(x) = \dfrac{7x + 5}{x - 2}$

49. $f^{-1}(x) = (5x - 1)/(2x + 3)$

51. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2), x \geq 0$

53. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}, x \leq 4$

55. $f^{-1}(x) = (x - 4)^3$

57. $f^{-1}(x) = x^2 - 2x, x \geq 1$

59. $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$