4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán para resolver problemas aplicados.

▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

[redacted] $2^x = 7$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar x" del exponente.

Solución:

$$2^x = 7 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln 2^x = \ln 7 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$x \ln 2 = \ln 7 \qquad \text{Ley 3 (bajar exponente)} \longrightarrow \log_a A^c = C \log_a A.$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 2} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 2.807 \qquad \text{Calculadora}$$

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

$$3^{-0.2287} \simeq 7$$

EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

Solución.

$$3^{x+2} = 7$$

$$\log\left(3^{x+2}\right) = \log 7$$

$$(x+2)\log 3 = \log 7$$

$$x+2 = \frac{\log 7}{\log 3}$$

$$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2 \simeq -0.2287$$

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$3^{x+2} = 7$	Ecuación dada
$\log(3^{x+2}) = \log 7$	Tome log de cada lado
$(x+2)\log 3 = \log 7$	Ley 3 (bajar exponente)
$x + 2 = \dfrac{\log 7}{\log 3}$	Divida entre log 3
$x = \dfrac{\log 7}{\log 3} - 2$	Reste 2
≈ -0.228756	Calculadora

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

Ejemplo 2

Resuelva la ecuación

$$8e^{2x} = 20$$

Solución.

Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$e^{2x} = \frac{20}{8}$$

$$\ln e^{2x} = \ln(2.5)$$

$$2x\underbrace{\ln e}_{=1} = \ln 2.5$$

$$x = \frac{\ln 2.5}{2} \approx 0.4581$$

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\
e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\
\ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tome ln de cada lado} \\
2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\
x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Divida entre 2} \\
&\approx 0.458 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

Ejercicios. (Fuer die Studenten)

Resolver las siguientes.

1. $e^{3-2x} = 4$

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Como la base del término exponencial es e, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$e^{3-2x} = 4$	Ecuación dada
$\ln(e^{3-2x}) = \ln 4$	Tome ln de cada lado
$3 - 2x = \ln 4$	Propiedad de ln
$-2x = -3 + \ln 4$	Reste 3
$x = \frac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807$	Multiplique por $-\frac{1}{2}$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

2. $e^{2x} - e^x - 6 = 0.$

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$e^{2x} - e^x - 6 = 0$	Ecuación dada
$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0$	Ley de Exponentes
$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0$	Factorice (un cuadrático en e^x)
$e^x - 3 = 0$ o bien $e^x + 2 = 0$	Propiedad del Producto Cero
$e^x = 3$ $\quad$ $e^x = -2$	

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

3. $3xe^x + x^2e^x = 0.$

EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$3xe^x + x^2e^x = 0$	Ecuación dada
$x(3 + x)e^x = 0$	Factorizamos factores comunes
$x(3 + x) = 0$	Dividimos entre e^x (porque $e^x \neq 0$)
$x = 0$ o $3 + x = 0$	Propiedad del Producto Cero

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 33

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0 \checkmark$$

$x = -3$:

$$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3} = -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0 \checkmark$$

Aplicabilidad de estas ecuaciones:

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace *t* años contiene 73% del ^{14}C que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$\boxed{0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Solución:

$$\log_2(x + 2) = 5$$

$$x + 2 = 2^5$$

$$x = 32 - 2 = 30$$

Para despejar x, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

Ejercicios Resolución de ecuaciones logarítmicas. (Fuer die Studenten)

1. De cada ecuación, despeje x

(a) $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

2. Resuelva la ecuación:

$$4 + 3\log(2x) = 16.$$

3. $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$

Solución:

1. (a) $\ln x = 8$

$$x = e^8$$

(b) $\log_2(25 - x) = 3$

$$25 - x = 2^3$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

SOLUCIÓN

(a)

$\ln x = 8$ Ecuación dada

$x = e^8$ Forma exponencial

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$\ln x = 8$ Ecuación dada

$e^{\ln x} = e^8$ Eleve e a cada lado

$x = e^8$ Propiedad de ln

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$\log_2(25 - x) = 3$ Ecuación dada

$25 - x = 2^3$ Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)

$25 - x = 8$

$x = 25 - 8 = 17$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS 37 Y 41

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$4 + 3\log(2x) = 16$ Ecuación dada

$3\log(2x) = 12$ Reste 4

$\log(2x) = 4$ Divida entre 3

$2x = 10^4$ Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)

$x = 5000$ Divida entre 2

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$4 + 3\log 2(5000) = 4 + 3\log 10{,}000$

$= 4 + 3(4)$

$= 16$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 43

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1$ Ley 1

$(x + 2)(x - 1) = 10$ Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)

$x^2 + x - 2 = 10$ Expanda lado izquierdo

$x^2 + x - 12 = 0$ Reste 10

$(x + 4)(x - 3) = 0$ Factorice

$x = -4$ o $x = 3$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -4$:

$\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1)$

$= \log(-2) + \log(-5)$

no definido ✘

$x = 3$:

$\log(3 + 2) + \log(3 - 1)$

$= \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2)$

$= \log 10 = 1$ ✔

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.
   (a) Primero, aislamos e^x para obtener la ecuación equivalente___.
   (b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.
   (c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.
2. Resolvamos la ecuación logarítmica $\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.
   (a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.
   (b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.
   (c) Ahora encontramos $x =$ _______.

HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$ **4.** $10^{-x} = 4$
5. $e^{-2x} = 7$ **6.** $e^{3x} = 12$
7. $2^{1-x} = 3$ **8.** $3^{2x-1} = 5$
9. $3e^x = 10$ **10.** $2e^{12x} = 17$
11. $e^{1-4x} = 2$ **12.** $4(1 + 10^{5x}) = 9$
13. $4 + 3^{5x} = 8$ **14.** $2^{3x} = 34$
15. $8^{0.4x} = 5$ **16.** $3^{x/14} = 0.1$
17. $5^{-x/100} = 2$ **18.** $e^{3-5x} = 16$
19. $e^{2x+1} = 200$ **20.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$
21. $5^x = 4^{x+1}$ **22.** $10^{1-x} = 6^x$
23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$ **24.** $7^{x/2} = 5^{1-x}$
25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$ **26.** $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$
27. $100(1.04)^{2t} = 300$ **28.** $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **30.** $e^{2x} - e^x - 6 = 0$
31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **32.** $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$
33. $x^2 2^x - 2^x = 0$ **34.** $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$
35. $4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = 0$ **36.** $x^2e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje x.

37. $\ln x = 10$ **38.** $\ln(2 + x) = 1$
39. $\log x = -2$ **40.** $\log(x - 4) = 3$
41. $\log(3x + 5) = 2$ **42.** $\log_3(2 - x) = 3$
43. $4 - \log(3 - x) = 3$ **44.** $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$
45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$
46. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$
47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$
48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$
49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$
50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$
51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$
52. $\log x + \log(x - 3) = 1$
53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$
54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de x es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3 \log x$?

57. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

APLICACIONES

75. Interés compuesto Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
   (a) Encuentre la cantidad después de 3 años.
   (b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

76. Interés compuesto Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
   (a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
   (b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?

77. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

78. Interés compuesto Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de \$5000?

79. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

80. Tasa de interés Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

81. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

82. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

83. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.

(a) Encuentre la población de peces después de 3 años.

(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

84. Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.

(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.

(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?

85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.

(a) De la ecuación, despeje P.

(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.

(a) De la ecuación, despeje P.

(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

86. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

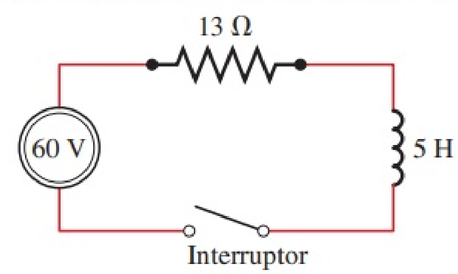
(a) De la ecuación, despeje T.

(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos ($t = 20$).

87. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.

(a) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.

(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



88. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

(a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.

(b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

4.5 Respuestas a ejercicios impares.

1. **(a)** $e^x = 25$ **(b)** $x = \ln 25$ **(c)** 3.219
2. **(a)** $\log 3(x-2) = \log x$ **(b)** $3(x-2) = x$ **(c)** 3
3. 1.3979 **5.** -0.9730 **7.** -0.5850 **9.** 1.2040 **11.** 0.0767
13. 0.2524 **15.** 1.9349 **17.** -43.0677 **19.** 2.1492
21. 6.2126 **23.** -2.9469 **25.** -2.4423 **27.** 14.0055
29. $\ln 2 \approx 0.6931, 0$ **31.** $\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.5493$ **33.** ± 1 **35.** $0, \frac{4}{3}$
37. $e^{10} \approx 22026$ **39.** 0.01 **41.** $\frac{95}{3}$ **43.** -7 **45.** 5 **47.** 5
49. $\frac{13}{12}$ **51.** 4 **53.** 6 **55.** $\frac{3}{2}$ **57.** $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ **59.** 2.21
61. 0.00, 1.14 **63.** -0.57 **65.** 0.36
67. $2 < x < 4$ o $7 < x < 9$ **69.** $\log 2 < x < \log 5$
71. $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln x}{2\ln 2}$ **73.** $f^{-1}(x) = 2^x + 1$
75. **(a)** \$6435.09 **(b)** 8.24 años **77.** 6.33 años **79.** 8.15 años

81. 13 días **83.** **(a)** 7337 **(b)** 1.73 años **85.** **(a)** $P = P_0 e^{-h/k}$
(b) 56.47 kPa **87.** **(a)** $t = -\frac{5}{13}\ln(1 - \frac{13}{60}I)$ **(b)** 0.218 s