Ejemplos de Integración por Partes

① $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

② $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$

Fórmula de Integración por Partes

Ej ① Calcule $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin x\,dx = \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - 0\sin 0\right) + \cos x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$

$u = x$, $dv = \cos x\,dx$; $du = dx$, $v = \sin x$

Así $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$ RTA

Pregunta: Que es $\int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx$ es:

(a) $\pi + 1$
(b) $\frac{\pi}{2} + 1$
(c) $\frac{\pi}{2} - 1$ RTA
(d) $\pi - 1$
(e) $\pi/2$

Ej ② $\int \sec^2 x\,dx = \int \frac{\sec x \cdot \sec^2 x\,dx}{\sec x} = \sec x\,tg x - \int \sec x\,tg x\,dx = \sec x\,tg x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$

$u = \sec x$, $dv = \frac{\sec^2 x\,dx}{\sec x}$; $du = \sec x\,tg x\,dx$, $v = tg x$

Así que $\int \sec^2 x\,dx = \sec x\,tg x - \int \sec x\,tg x\,dx + \int \sec x\,dx$

$\int \sec x\,tg x\,dx = \int \sec^2 x\,dx - \int \sec x\,dx$

Así que $\int \sec^2 x\,dx = \sec x\,tg x - \int \sec x\,dx + \int \sec x\,dx$

$\int \sec^2 x\,dx = \sec x\,tg x + \ln|\sec x + tg x| + C$ donde $C = 2K$

Ej ③ $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin x \cdot \sin x\,dx = \int \frac{2\sin x \cdot \sin x}{2}\,dx = \int \frac{2\sin x \cdot \sin x}{2}\,dx = -\cos x\sin x + \int \cos x\cos x\,dx = -\cos x\sin x + \int \cos^2 x\,dx$

Se Cambia a $\cos x$ de modo que el coseno de u sea el derivado de dv para la parte

$u = \sin x$, $dv = \sin x\,dx$; $du = \cos x\,dx$, $v = -\cos x$

Así que $\int \sin^2 x\,dx = -\cos x\sin x + \int \cos^2 x\,dx$

Como $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

Así $\int \sin^2 x\,dx = -\cos x\sin x + \int \sqrt{1 - \sin^2 x}\,dx$

Ejercicio #47 Página 479

Ej ④ $\int \cos x\,tg x\,dx = \int \frac{\cos x \cdot \sin x}{\cos x}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$u = \cos x$, $dv = \frac{\sin x\,dx}{\cos x}$; $du = -\sin x\,dx$, $v = \ln|\sec x|$

Así que $\int \cos x\,tg x\,dx = -\cos x + \ln|\sec x| + C$

Ejercicio #47 Página 479

Ej ⑤ $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = ?$

$\int \sin 2x\,dx = \int \cos x \cdot 2\sin x\,dx = \int \frac{2\cos x \cdot \sin x}{2}\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x + C$

Se Cambia a $\cos x$ de modo que el coseno de u sea el derivado de dv para la parte

$u = \cos x$, $dv = \sin x\,dx$; $du = -\sin x\,dx$, $v = -\cos x$

Por la Fórmula, $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) = -1 - 1 = -2$

Así $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = -2$ Ejer. #33 Pág 470 (Pitta)

Ejercicio Pitta: 469-470 del 1 al 50 (cada 2 ejercicios)

MÉTODO DE FRACCIONES PARCIALES

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ ← Cuando grado $p(x) \geq$ grado $q(x)$ se arregla hasta el cociente del polinomio
← Cuando grado $p(x) <$ grado $q(x)$ se arregla aplica Fracciones Parciales

1 Caso: Factores Lineales: Cuando el denominador queda a poder expresar en factores lineales, que no se repiten.

Ej $\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}$ ← Factores lineales no repetidos

$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

Ej ① Calcule $\int \frac{x^2+x+3}{x^2-x}\,dx = \int \frac{x^2+x+3}{x(x-1)}\,dx = \int\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x-1}\right)dx = x + \int\frac{2}{x}\,dx + \int\frac{5}{x-1}\,dx$

$x^2 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)$ ← Factorizando

$= x + 2\ln|x| + 5\ln|x-1| + C$

$= x + \ln|x^2| + \ln|(x-1)^5| + C$

$= x + \ln\left|x^2(x-1)^5\right| + C$

MET DE FRACCIÓN PARCIAL

NO Estoy Seguro: $\frac{x^2+x+3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{B}{x-1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$ ⊗

Mejor Así: $x^2+x+3 = A(x-1) + Bx$ ⊗

$x^2+x+3 = A(x-1) + Bx(x-1) + C(x)(x-1)$ ⊗

Cuando $x=0$: $3 = A(-1) \Rightarrow \frac{3}{-1} = A$, $A = -3$

Cuando $x=1$: $6 = C(1)(0) \Rightarrow 6 = C$, $\boxed{C=6}$

Cuando $x=-1$: $(-1)^2+(-1)+3 = A(-1)(-1) + B(-1)(-1) + C(-1)(-1)$, $2 = 2B \Rightarrow \boxed{B=1}$

Finalmente: $\boxed{\int \frac{x^2+x+3}{x^2-x}\,dx = \ln\left|\frac{(x+1)(x-1)^3}{x^3}\right| + C}$

En general: $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$

denominador $= q(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$ ← Se forman 5 factores lineales

$\boxed{\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + \frac{A_4}{x-x_4} + \frac{A_5}{x-x_5}}$

CASO: (Cuando $q(x)$ Tiene Factores Lineales NO REPETIDOS

Nota: Deducir la fórmula de Integración por Partes

$d(uv) = u\,dv + v\,du$

Integrando $\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$

$uv = \int u\,dv + \int v\,du$

$uv - \int v\,du = \int u\,dv$

Se Sabe Usar:

⊛ $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$ ①

$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}$ ②

Ejemplo ① $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x \cdot e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

Se Escoge:

$\boxed{u = x}$ → Derivo → $\boxed{du = dx}$

$dv = e^x\,dx$ → Integro. → $\boxed{v = e^x}$

$\int dv = \int e^x\,dx$, $v = e^x$

Así $\int x e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

Prototipo: $\int \underbrace{p(x)}_{u} \cdot \underbrace{e^x\,dx}_{dv}$

$\int \underbrace{x}_{u} e^x\,dx$

$\int \underbrace{x^2}_{u} e^x\,dx$

$\int \underbrace{x^3}_{u} e^x\,dx$

Ej: $\int \underbrace{x^2}_{u}\underbrace{e^x\,dx}_{dv} = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx$ ← Se Repite

$= x^2e^x - 2(xe^x - e^x) + C = \boxed{x^2e^x - 2xe^x - 2e^x + C}$

$\boxed{u = x^2}$ → Derivo → $\boxed{du = 2x\,dx}$

$dv = e^x\,dx$ → Integro → $\boxed{v = e^x}$

$\int dv = \int e^x\,dx$, $v = e^x$

Así $\int x^2e^x\,dx = x^2e^x - 2xe^x - 2e^x + C$

Ej: $\int \underbrace{\ln x}_{u}\underbrace{dx}_{dv} = x\ln x - \underbrace{\int x\left(\frac{1}{x}dx\right)}_{\int dx} = \boxed{x\ln x - x + C}$

$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$ Fórmula de Integ. Por Partes

$\boxed{u = \ln x}$ → Derivo → $\boxed{du = \frac{1}{x}dx}$

$dv = dx$ → Integro a ambos lados → $\boxed{v = x}$

Así $\boxed{\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C}$

Ejemplo ④ $\int \sec^3 x\,dx = \int \underbrace{\sec x}_{u} \cdot \underbrace{\sec^2 x\,dx}_{dv} = \sec x\,tg x - \int (tg x)(\sec x\,tg x\,dx) = \sec x\,tg x - \int \sec x\,tg^2 x\,dx$

$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

$tg^2 x = \sec^2 x - 1$

$= \sec x\,tg x - \int \sec x\,[\sec^2 x - 1]\,dx$

$= \sec x\,tg x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

$\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

$u = \sec x$ → Derivo → $du = \sec x\,tg x\,dx$

$dv = \sec^2 x\,dx$ → Integro. → $v = tg x$

$\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,tg x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$

$2\int \sec^3 x\,dx = \sec x\,tg x + \ln|\sec x + tg x| + C$

Respuesta

IMPORTANTE

$\boxed{\int \sec^3 x\,dx = \frac{1}{2}\sec x\,tg x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + tg x| + K \quad \text{donde } K = C/2}$