GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS NUMÉRICOS

Transversal Programación Básica

UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

CONTENIDO

GENERALIDADES SOBRE SISTEMAS NUMÉRICOS

INTRODUCCIÓN

Con el fin de brindar una guía para la docencia de la asignatura de Programación básica, y conforme a los lineamientos establecidos en el syllabus propuesto en la universidad Distrital, este documento presenta las generalidades de los sistemas numéricos y los aspectos básicos que un estudiante de la asignatura debe dominar acerca de ellos.

1. SOBRE LOS SISTEMAS NUMÉRICOS

"Un sistema de numeración es un conjunto de dígitos o símbolos usados para la representación de cantidades". Cada sistema numérico está definido por la base que utiliza; Dicha base es el número de símbolos diferentes necesarios para representar una cantidad cualquiera dentro de las infinitas posibilidades en el sistema.

Los sistemas numéricos más conocidos son el sistema binario, octal, decimal y hexadecimal. Cada uno definido por su propia base, 2, 8, 10 y 16 respectivamente.

1.1. Valores posicionales

Toda cantidad dentro de un sistema numérico puede ser expresada en función de los valores exponenciales propios del sistema. De modo que la posición de una cifra, indicara su valor en términos exponenciales de la base. Por ejemplo el valor 123 en el sistema decimal se representará de la forma:

$$1\,x\,10^2 \;+\; 2\,x\,10^1 \;+ (3x\,10^0)$$

Para identificar si un número pertenece a una base determinada se suele realizar la siguiente notación

$$(52)_8$$

Donde el subíndice indica la base (cantidad de dígitos que lo conforman) a la que pertenece el número indicado en los paréntesis; que para el ejemplo será Base 8 o el sistema octal. Si un número es representado en valores posicionales se obtiene su correspondiente valor en el sistema decimal, sin importar la base sobre la que se encuentra el número.

Si un numero está compuesto por cifras decimales (refiriéndose al caso de tener cifras antes del punto), como por ejemplo 23.1416, los valores posicionales de aquellas cifras a la derecha del punto, tendrán valores negativos. De modo que el número $(23.1416)_{10}$ se representa de la forma:

$$2\,x\,10^1 \;+\; 3\,x\,10^0 \;+\; 1\,x\,10^{-1} \;+ (4\,x\,10^{-2}) + (1\,x\,10^{-3}) + (6\,x\,10^{-4})$$

2. Sistemas Numéricos Más conocidos

2.1. Sistema Decimal

“El sistema de numeración decimal fue desarrollado por los hindúes, y posteriormente introducido por los árabes en Europa, donde recibe el nombre de sistema de numeración decimal o arábigo”[1].

Como su nombre lo indica, su base es el número 10, de modo que está compuesto por los dígitos del 0 al nueve (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). Este sistema es el más usado en el mundo, pese a que no corresponde al sistema numérico de los ordenadores.

2.2. Sistema Binario

Conocido como el sistema de las maquinas por excelencia. “Por su simplicidad y por poseer únicamente dos dígitos diferentes, el cero y el uno, el sistema de numeración binario se usa en computación para el manejo de datos e información.”[2]

“En una cifra binaria, cada dígito tiene distinto valor dependiendo de la posición que ocupe. El valor de cada posición es el de una potencia de base 2, elevada a un exponente igual a la posición del dígito menos uno. Se puede observar que, tal y como ocurría con el sistema decimal, la base de la potencia coincide con la cantidad de dígitos utilizados (2) para representar los números”[3]. Tal y como se presentó en la sección de valores posicionales, la representación de un número en el sistema binario se da de la siguiente manera:

$$(101)_{2=}\ 1\,x\,2^2 \ + \ 0\,x\,2^1 \ + (1\,x\,2^0)$$

Al resolver esta expresión se obtiene como resultado 5, número que se encontrará en el sistema decimal y que por tanto nos lleva a la conclusión de que $(101)_2 = (5)_{10.}$

Es necesario resaltar que al realizar la representación en valores posicionales y resolver la expresión, se obtiene la representación de dicho numero en el sistema decimal. Esta es la forma más fácil de convertir desde un sistema cualquiera al sistema decimal.

2.3. Sistema Octal

Es posible que la numeración octal se usara en el pasado en lugar de la decimal, por ejemplo, para contar los espacios interdigitales o los dedos distintos de los pulgares. Esto explicaría por qué en latín nueve (novem) se parece tanto a nuevo (novus). Podría tener el significado de número nuevo[4].

---

[1] http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node111.html
[2] http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node112.html
[3] http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/numeracion.html
[4] http://es.scribd.com/doc/87699147/ENSAYO-de-Sistemas-de-Numeracion-Perfect

El sistema de numeración octal es también muy usado en la computación por tener una base que es potencia exacta de 2 o de la numeración binaria. Esta característica hace que la conversión a binario o viceversa sea bastante simple. El sistema octal usa 8 dígitos (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7) y tienen el mismo valor que en el sistema de numeración decimal.

El número $(153)_8$ puede expresarse en función de los valores posicionales y obtener su respectivo valor en el sistema decimal.

$$(153)_8 = \ 1\,x\,8^2 \ + \ 5\,x\,8^1 \ + (3\,x\,8^0)$$

$$(153)_8 = \ 107\ _{10}$$

Los números octales pueden construirse a partir de números binarios agrupando cada tres dígitos consecutivos de estos últimos (de derecha a izquierda) y obteniendo su valor decimal. Esta conversión se muestra más adelante en la sección de conversiones entre sistemas numéricos.

2.4. Sistema Hexadecimal

"Un gran problema con el sistema binario es la verbosidad. Para representar el valor 20210 se requieren ocho dígitos binarios, la versión decimal sólo requiere de tres dígitos y por lo tanto los números se representan en forma mucho más compacta con respecto al sistema numérico binario. Desafortunadamente las computadoras trabajan en sistema binario y aunque es posible hacer la conversión entre decimal y binario, ya vimos que no es precisamente una tarea cómoda. El sistema de numeración hexadecimal, o sea de base 16, resuelve este problema (es común abreviar hexadecimal como hex aunque hex significa base seis y no base dieciséis)"[5].

Cada digito hexadecimal representa un valor comprendido entre 0 y 15, pero dado que en el sistema decimal solo contamos con los números del 0 al 9, se han agregado otros símbolos para representar los valores superiores al 9. De modo que A, B, C, D, E y F, representan los valores de 10, 11, 12, 13, 14 y 15 respectivamente.

3. CONVERSIONES ENTRE SISTEMAS NUMÉRICOS

3.1 Conversión a Binario

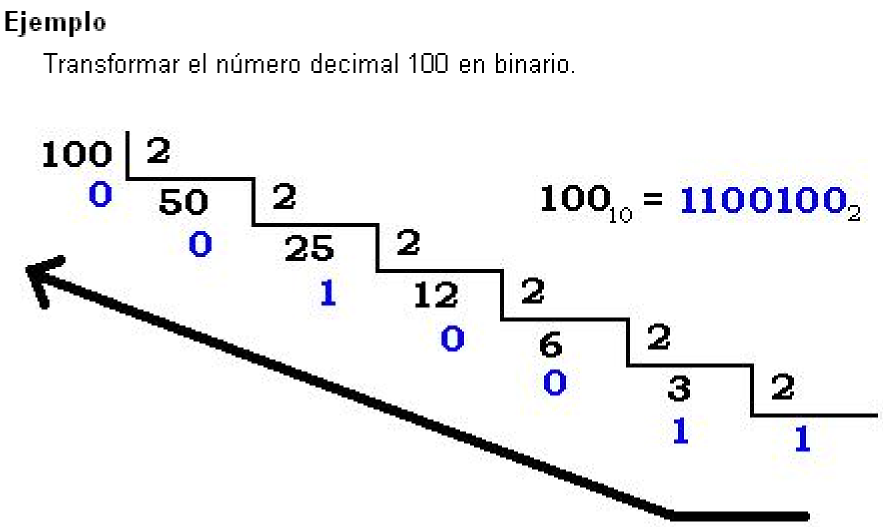
La forma más utilizada para pasar de un sistema de numeración a otro, es realizar primero la conversión del número a binario y posteriormente transformarlo a su respectivo sistema.

[5] http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node118.html

3.1.1 Desde el sistema Decimal

Divisiones sucesivas: Para Transformar un numero en sistema decimal al sistema binario, basta con dividir el número del sistema decimal entre 2, cuyo resultado entero se vuelve a dividir entre 2, y así sucesivamente hasta que el dividendo sea menor que el divisor, 2. Es decir, cuando el número a dividir sea 1 finaliza la división.

A continuación se ordenan los restos empezando desde el último al primero, simplemente se colocan en orden inverso a como aparecen en la división, se les da la vuelta. Éste será el número binario que buscamos.



[6]

Factorización en números primos: Este método consiste también en divisiones sucesivas. Dependiendo de si el número es par o impar, colocaremos un cero o un uno en la columna de la derecha. Si es impar, le restaremos uno y seguiremos dividiendo entre dos, hasta llegar a 1. Después sólo nos queda tomar el último resultado de la columna izquierda (que siempre será 1) y todos los de la columna de la derecha y ordenar los dígitos de abajo a arriba.

```
100|0
 50|0
 25|1   --> 1, 25-1=24 y seguimos dividiendo entre 2
 12|0
  6|0
  3|1
  1|1   -->
```

$$(100)_{10} = (1100100)_2$$

[6] http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario#Decimal_a_binario

Distribución: Consiste en distribuir los unos necesarios entre las potencias sucesivas de 2 de modo que su suma resulte ser el número decimal a convertir. Sea por ejemplo el número 151, para el que se necesitarán las 8 primeras potencias de 2, ya que la siguiente, 2^{28}=256, es superior al número a convertir. Se comienza poniendo un 1 en 128, por lo que aún faltarán 23, 151-128 = 23, para llegar al 151. Este valor se conseguirá distribuyendo unos entre las potencias cuya suma dé el resultado buscado y poniendo ceros en el resto. En el ejemplo resultan ser las potencias 4, 2, 1 y 0, esto es, 16, 4, 2 y 1, respectivamente.

2^0=   1|0
2^1=   2|0
2^2=   4|0
2^3=   8|0
2^4= 16|0
2^5= 32|0
2^6= 64|0
2^7= 128|1

$$128 = (128)_{10} = (10000000)_2$$

Además de trabajar con un número entero, es posible realizar la conversión de un número con decimales (lado derecho de la coma). Para este caso basta con realizar los siguientes pasos:

1. Se transforma la parte entera a binario. (Si la parte entera es 0 en binario será 0, si la parte entera es 1 en binario será 1, si la parte entera es 5 en binario será 101 y así sucesivamente).
2. Se sigue con la parte fraccionaria, multiplicando cada número por 2. Si el resultado obtenido es mayor o igual a 1 se anota como un uno (1) binario. Si es menor que 1 se anota como un 0 binario. (Por ejemplo, al multiplicar 0.6 por 2 obtenemos como resultado 1.2 lo cual indica que nuestro resultado es un uno (1) en binario, solo se toma la parte entera del resultado).
3. Después de realizar cada multiplicación, se colocan los números obtenidos en el orden de su obtención.
4. Algunos números se transforman en dígitos periódicos, por ejemplo: el 0.1.

```
0,3125 (decimal)   => 0,0101 (binario).
Proceso:
0,3125 · 2 = 0,625 => 0
0,625  · 2 = 1,25  => 1
0,25   · 2 = 0,5   => 0
0,5    · 2 = 1     => 1
En orden: 0101     -> 0,0101 (binario)
```

3.1.2 Desde el sistema Octal

Cada dígito octal se convierte en su binario equivalente de 3 bits y se juntan en el mismo orden.

$(247)_8$= 2   4   7

2 = 010, 4 = 100 y 7=111

De modo que $(247)_8$ es igual al número $(010100111)_2$.

3.1.3 Desde el sistema Hexadecimal

Al igual que desde el sistema octal, en el sistema hexadecimal se requiere separar los dígitos del número y representarlos en binario, la diferencia es que esta vez no se representan en grupos de 3 bits sino en grupos de 4.

$(2A7F)_{16} = 2 \quad A \quad 7 \quad F$

2 = 0010, A = 1010,7 = 0111 y F = 1111

De modo que $(2A7F)_{16}$ es igual al número $(0010101001111111)_{2}$.

Para hallar el valor en binario de A, B , C,…F basta con remplazarlos por su valor en el sistema decimal 10, 11, 12 …14 y posteriormente realizar alguno de los métodos de conversión decimal binario que se mencionaron antes. No obstante para facilitar la conversión se presenta adelante una pequeña tabla con las equivalencias en hexadecimal y binario.

HEXADECIMAL	BINARIO
0	**0000**
1	**0001**
2	**0010**
3	**0011**
4	**0100**
5	**0101**
6	**0110**
7	**0111**
8	**1000**
9	**1001**
A	**10010**
B	**1011**
C	**1100**
D	**1101**
E	**1110**
F	**1111**

3.2 Conversión a Decimal

Para convertir a decimal desde cualquier sistema basta con hacer su representación en valores posicionales y obtener su valor.

3.2.1 Desde el sistema Binario

$$(10110)_2 = (1 \times 2^4) + (0 \times 2^3) + (1 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0)$$

$$(10110)_2 = (16) + (0) + (4) + (2) + (0)$$

$$(10110)_2 = (22)_{10}$$

3.2.2 Desde el sistema Octal

$$(741)_8 = (7 \times 8^2) + (4 \times 8^1) + (1 \times 8^0)$$

$$(741)_8 = (448) + (32) + (1)$$

$$(741)_8 = (481)_{10}$$

3.2.3 Desde el sistema Hexadecimal

$$(C2B)_{16} = (C \times 16^2) + (2 \times 16^1) + (B \times 16^0)$$

$$(C2B)_{16} = (12 \times 16^2) + (2 \times 16^1) + (11 \times 16^0)$$

$$(C2B)_{16} = (3072) + (32) + (11)$$

$$(C2B)_{16} = (3115)_{10}$$

3.3 Conversión a Hexadecimal

3.3.1 Desde el sistema Binario

Simplemente agrupamos los dígitos en grupos de 4 (contando desde la derecha) y posteriormente los remplazamos por su respectiva equivalencia en el sistema hexadecimal.

$$(10110)_2 = 0001\ 0110$$

$$(10110)_2 = 1 \quad 6$$

$$(10110)_2 = (16)_{16}$$

3.3.2 Desde el sistema Decimal

Para convertir desde el sistema decimal es necesario realizar divisiones sucesivas por 16 y tomar los residuos desde el último al primero (orden inverso de aparición). Cuando el residuo es 10 o más, se remplaza por su respectivo valor en el sistema hexadecimal. Este tipo de conversión también se utiliza para convertir desde el sistema decimal a cualquiera de los demás sistemas.

En el ejemplo anterior se muestra el proceso para convertir $(1869)_{10}$ al sistema hexadecimal. Al agrupar los residuos del último al primero se obtiene (7 4 13) pero el 13 equivale a D en el sistema hexadecimal. Por tanto, $(1869)_{10}$ es igual a $(74D)_{16}$.

3.3.3 Desde el sistema Octal

El método más simple para convertir desde el sistema octal consiste en realizar la conversión del número en base 8 a binario, y posteriormente transformarlo a hexadecimal.

$$(741)_8 = 7\ 4\ 1$$

$$(741)_8 = 111\ 100\ 001$$

$$(111100001)_2 = 0001\ 1110\ 0001$$

$$(111100001)_2 = 1\ E\ 1$$

$$(111100001)_2 = (1E1)_{16}$$

3.4 Conversión a Octal

3.4.1 Desde el sistema Binario

Simplemente agrupamos los dígitos en grupos de 3 (contando desde la derecha) y posteriormente los remplazamos por su respectiva equivalencia en el sistema hexadecimal.

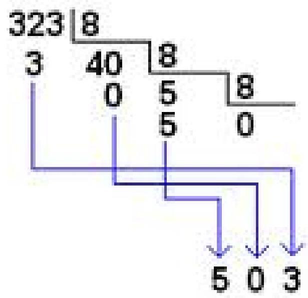
$$(10110)_2 = 010\ 110$$

$$(10110)_2 = 2 \quad 6$$

$$(10110)_2 = (26)_8$$

3.4.2 Desde el sistema Decimal

Al igual que en los casos anteriores, se realizan divisiones sucesivas por la base del sistema, y se toman los residuos en el orden inverso de aparición.



En la imagen anterior tenemos que $(323)_{10}$ es igual a $(503)_8$.

3.4.3 Desde el sistema Hexadecimal

Al igual que en el caso inverso, es fácil realizar la conversión primero a binario y posteriormente a hexadecimal.

$$(1E1)_{16} = 0001\ 1110\ 0001$$

$$(1E1)_{16} = (111100001)_2$$

$$(111100001)_2 = 111\ 100\ 001$$

$$(111100001)_2 = 7\ 4\ 1$$

$$(111100001)_2 = (741)_8$$

4. COMPLEMENTOS DE LOS NÚMEROS BINARIOS

Con el fin de facilitar operaciones en el sistema binario, como la resta o la representación de números negativos, aparecen dos operaciones utilizadas a nivel computacional conocidas como el complemento a uno y el complemento a dos. (En ambos casos se mantiene la misma cantidad de bits)

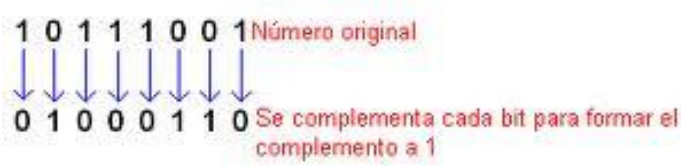
4.1 Complemento a Uno

El complemento a uno de un número binario es una operación matemática muy importante en el campo de la computación, ya que nos permite la representación binaria de números negativos. Se obtiene al cambiar cada uno de los dígitos del número binario N por su complementario, esto es, cambiar los unos por ceros y los ceros por unos[7].

Complemento a uno	Decimal
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	0
1110	−1
1101	-2
1100	−3
1011	−4
1010	−5
1001	−6
1000	−7

Complemento a uno con enteros de 4 bits

[7] http://es.wikipedia.org/wiki/Complemento_a_uno

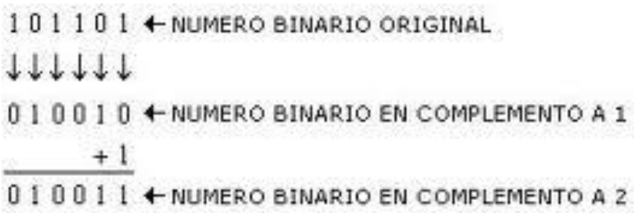


En el caso anterior $(10111001)_2 = (185)_{10}$ se convierte en el número $(01000110)_2 = (-185)_{10}$ al aplicar el complemento a uno. No obstante, el complemento a uno presenta un problema al momento de representar el 0, ya que se tienen 2 representaciones diferentes. (Imagen de la Derecha).

4.2 Complemento a Dos

Su utilidad principal se encuentra en las operaciones matemáticas con números binarios. En particular, la resta de números binarios se facilita enormemente utilizando el complemento a dos: la resta de dos números binarios puede obtenerse sumando al minuendo el complemento a dos del sustraendo. Se utiliza porque la unidad aritmético-lógica no resta números binarios, suma binarios negativos, por eso esta conversión al negativo[8].

Para obtener el complemento a 2 basta con realizar el complemento a uno y sumar uno al resultado:



Una forma de hallar el opuesto de un número binario positivo en complemento a dos es comenzar por la derecha (el dígito menos significativo), copiando el número original (de derecha a izquierda) hasta encontrar el primer 1, después de haber copiado el 1, se niegan (complementan) los dígitos restantes (es decir, copia un 0 si aparece un 1, o un 1 si aparece un 0). Este método es mucho más rápido para las personas, pues no utiliza el complemento a uno en su conversión.1

Por ejemplo, el complemento a dos de «0011 11010» es «1100 00110»

Complemento a dos	Decimal
0111	7
0110	6
0101	5
0100	4
0011	3
0010	2
0001	1
0000	0
1111	−1
1110	−2
1101	-3
1100	−4
1011	−5
1010	−6
1001	−7
1000	−8

Complemento a dos con enteros de 4 bits

[8] http://es.wikipedia.org/wiki/Complemento_a_dos

5. REFERENCIAS

- http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node111.html
- http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node112.html
- http://platea.pntic.mec.es/~lgonzale/tic/binarios/numeracion.html
- http://upel.forovenezuela.net/t14-sistema-decimal-teoria-y-ejercicios-planteados-para-los-equipos
- http://es.scribd.com/doc/87699147/ENSAYO-de-Sistemas-de-Numeracion-Perfect
- http://www.fismat.umich.mx/~elizalde/curso/node118.html
- http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema_binario#Decimal_a_binario
- http://es.wikipedia.org/wiki/Complemento_a_uno
- http://es.wikipedia.org/wiki/Complemento_a_dos