UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS

CONECTOR/COMPUERTA, ENTRADA(S), SALIDA CONNECTOR/GATE, INPUT(S), OUTPUT	**NOMBRE** NAME	**TABLA DE VERDAD** TRUTH TABLE
A, Z	**AMORTIGUADOR** BUFFER	A | Z 0 | 0 1 | 1
A, B, Z	**Y** AND	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1
A, B, Z	**O (O, en sentido inclusivo)** OR	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1
A, B, Z	**OE (O, en sentido exclusivo)** XOR (EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
A, Z	**N, NEG o INVERSOR** NOT or INVERTER	A | Z 0 | 1 1 | 0
A, B, Z	**NY (N Y)** NAND (NOT AND)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
A, B, Z	**NO (N O)** NOR (NOT OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 0
A, B, Z	**NOE (N OE)** NXOR (NOT EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1

Lógica Digital

2013
Transversal de Programación Básica
Proyecto Curricular de Ingeniería de Sistemas

La lógica es una disciplina que estudia la estructura, el fundamento y el uso de las expresiones del lenguaje humano. Se usa en el diario vivir y una de sus principales tareas es la de proporcionar las reglas por medio de las cuales se puede determinar cuando un razonamiento o argumento es válido. Otro ejemplo donde la lógica juega un papel fundamental es en el diseño de circuitos digitales. También es fundamental en matemáticas y en sus demostraciones

Proposiciones

Una proposición es un enunciado o una oración que puede ser falsa o verdadera pero no ambas a la vez. Una proposición es verificable, por ende, es un elemento fundamental de la lógica matemática y de la lógica digital.

A continuación se tienen algunos ejemplos de enunciados que son proposiciones y algunos que no lo son, se explica el porqué algunos de estos enunciados no son, como tal, proposiciones. Las proposiciones se indican por medio de una letra minúscula, dos puntos y la proposición propiamente dicha. Por ejemplo.

p: La tierra es plana.
q: -12 + 28 = 21
r: x > y + 1
s: El Cortulua será campeón en la presente temporada de Fútbol colombiano.
t: Hola ¿Qué tal?
v: Bogotá es la capital de Colombia
w: Lava el coche, por favor.

Los incisos **p** y **q** sabemos que pueden tomar un valor de falso o verdadero; por lo tanto son proposiciones validas. El inciso **r** también es una proposición valida, aunque el valor de falso o verdadero depende del valor asignado a las variables **x** y **y** en determinado momento y **v** es una proposición verdadera. La proposición del inciso **s** también esta perfectamente expresada aunque para decir si es falsa o verdadera se tendría que esperar a que terminara la temporada de fútbol. Sin embargo los enunciados **t** y **w** no son válidos, ya que no pueden tomar un valor de falso o verdadero, uno de ellos es un saludo y el otro es una orden

Oraciones que son proposiciones:

a. El semáforo está verde.
b. Los autos pueden avanzar.
c. Hoy es 17 de marzo.
d. Hoy es jueves.
e. 4 es un número par.

Oraciones que no son proposiciones:

a. Deténgase.

b. Quien viene?
c. Es divertido este curso?
d. Si $x^2 = 9$ entonces $x= 3$

Conectores Lógicos Y Proposiciones Compuestas

Las proposiciones anteriores son todas, proposiciones simples. Para obtener proposiciones compuestas se deben ligar o combinar más de una proposición simple. Existen conectores u operadores lógicos que permiten formar proposiciones compuestas (formadas por varias proposiciones simples).

Las proposiciones compuestas son de algunos de los tres tipos siguientes:

Definición 1
Una proposición compuesta es una ley lógica o tautológica si es verdadera independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que una ley lógica o tautología es una proposición que es verdadera en cualquier circunstancia.

Definición 2
Una proposición compuesta es una contradicción si es falsa independientemente de los valores de verdad que se asignen a las proposiciones simples que la componen. Es decir que es falsa en cualquier circunstancia.

Definición 3
Una proposición compuesta es contingencia si no es una tautología ni una contradicción.

Una tabla de verdad muestra los valores de verdad de una proposición compuesta para todos los posibles casos, de verdad o falsedad, de las proposiciones simples. En el lenguaje coloquial una misma expresión puede darse de distintas formas. En lógica dos proposiciones compuestas son lógicamente equivalentes si tienen igual valor de verdad, para el mismo juego de verdades de las proposiciones simples que la componen. Formalmente,

Definición 4
Dos proposiciones p y q son lógicamente equivalentes, lo denotamos $p \equiv q$; si tienen la misma tabla de verdad.

Definición 5
La negación de la proposición p, es la proposición ~ p (se lee no p) que es verdadera cuando p es falsa, y es falsa cuando p es verdadera

Los operadores o conectores básicos son: *y, o, no, no o, no* y, *o exclusiva, no o exclusiva.*

a. ***Operador and (y) - Operación Conjunción***

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir (ser verdaderas) para que se pueda obtener un resultado verdadero. Su símbolo es: {Ù , un punto (.), un paréntesis, o también, Ç }. Se le conoce como la multiplicación lógica (en la matemática booleana):

Algunos ejemplos son:

1. La proposición "El coche enciende cuando tiene gasolina en el tanque y tiene corriente la batería" está formada por dos proposiciones simples: *q* y *r*

q: Tiene gasolina el tanque.
r: Tiene corriente la batería.

Con p: El coche enciende.

De tal manera que la representación del enunciado anterior usando simbología lógica es como sigue:

p = q Ù r

Su tabla de verdad es como sigue:

q	**r**	**p = q Ù r**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Donde;
1 = verdadero 0 = falso

En la tabla anterior el valor de *q = 1* significa que el tanque tiene gasolina*, r = 1* significa que la batería tiene corriente y *p = q Ù r = 1* significa que el coche puede encender. Se puede notar que si *q* o *r* valen cero implica que el auto no tiene gasolina o no tiene corriente la batería y que, por lo tanto, el carro no puede encender.

2. *La ciudad* ***x*** *está en Francia y es su capital* es una proposición compuesta por las proposiciones simples:

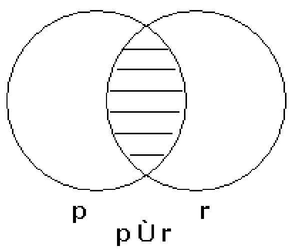
p: La ciudad x está en Francia. Qué es verdadera solo para todas las ciudades ***x*** que estén en Francia de lo contrario será falsa y,

r: La ciudad x es capital de Francia. Qué es verdadera solo si ***x*** es Paris de lo contrario será falsa

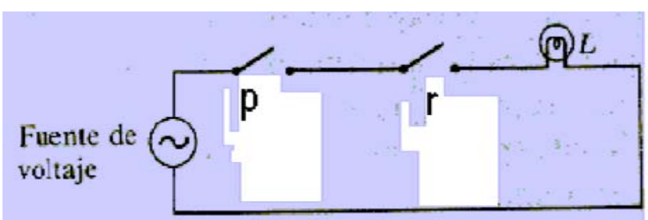
Con ello la proposición compuesta *q: p Ù r* será verdadera solo si ***x*** es Paris, de lo contrario será falsa, como lo muestra la tabal correspondiente.

p	**r**	**q = p Ù r**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

El operador *y* en la teoría de conjuntos equivale a la operación de intersección, por ello se le puede representar como lo muestra la figura siguiente:



También tiene representación circuital con interruptores, como aparece en la figura siguiente. Si los dos interruptores están cerrados (indicando verdadero o "1" lógico) la lámpara se enciende de lo contrario no.



Circuito con interruptores que representa la función lógica Conjunción (AND) p Ù r

b. Operador Or (o) – Operación Disyunción

Con este operador se obtiene un resultado verdadero cuando alguna de las proposiciones es verdadera. Se indica por medio de los siguientes símbolos: {Ú **,+,È** }. Se conoce como la suma lógica en el Álgebra Booleana. En términos literales se comporta como y/o. Por ejemplo:

1. Sea el siguiente enunciado "Una persona puede entrar al cine si compra su boleto u obtiene un pase". Donde.

p: Entra al cine.
q: Compra su boleto.
r: Obtiene un pase.

La proposición compuesta es *p: q v r* y la tabla de verdad representativa es:

.q	.r	.p: q Ú r
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

La única manera en la que no puede ingresar al cine (p = 0), es que no compre su boleto (q = 0) y que, además, no obtenga un pase (r = 0).

2. Con la proposición

m: Iré al estadio si juega Santa fé o me invitan
Compuesta por las proposiciones:
p: Juega Santa Fé
q: Me invitan al estadio

Se obtiene la proposición compuesta cuya notación es:
.m: p ***v*** *q*
La tabla de verdad correspondiente es:

.p	.q	.m: p Ú q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

En cualquier caso la operación OR o la disyunción se asimila a la operación Unión entre conjuntos, por ello en diagrama de Venn se representa, así

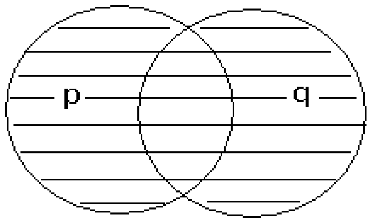
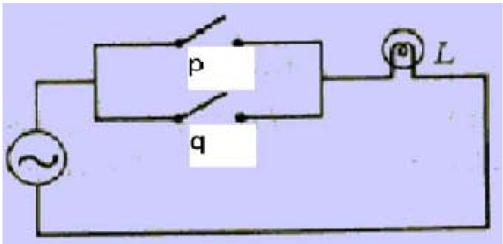


Diagrama de Venn de una Disyunción p n q

Y en circuito de conmutación, así:



Representación circuital de una disyunción (OR) p v q

De tal suerte que es suficiente con que uno de los dos interruptores este cerrado para obtener un "1" lógico, es decir, que la lámpara encienda.

c. ***Operador Not (no) – Operación negación***

Su función es negar la proposición. Esto significa que sí alguna proposición es verdadera y se le aplica el operador not se obtendrá su complemento o negación (falso). Este operador se indica por medio de los siguientes símbolos: {‘, Ø ,- }. Por Ejemplo.

1. Teniendo la proposición :

p: *La capital de Francia es Paris* (p = 1),
su negación será :
p’: *no es la capital de Francia Paris(*p’= 0)

2. Para

p: 2x4 = 6 (p = 0)
p’: 2x4 ≠ 6 (p’ = 1)

p	p’

1	0
0	1

Con 1 verdadero y 0 falso.

También, tiene expresión en la teoría de conjuntos y es el denominado complemento, cuyo diagrama de Venn es:

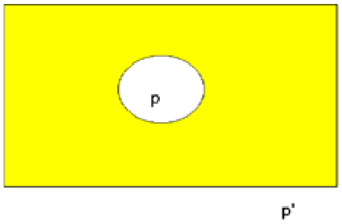
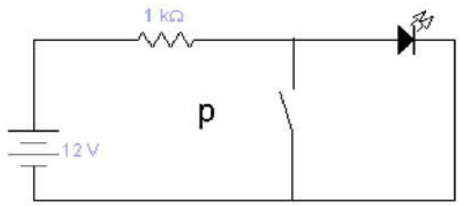


Diagrama de Venn Operador not - Negación

En términos de circuito su representación será, como aparece en la figura siguiente, Cuando se cierra *p* ("1" lógico) el led se apaga(falso o "0" lógico) y si *p* se abre("0" lógico) el led se enciende (verdadero o "1" lógico).



Representación circuital de una negación (NOT) p'

d. La O exclusiva (Disyunción exclusiva)

Es el operador que conecta dos proposiciones en el sentido estricto de la "o" literal, o es blanco o es negro; es o no es.

El operador se denomina XOR, cuyo funcionamiento es semejante al operador or con la diferencia en que su resultado es verdadero solamente si una de las proposiciones es cierta, cuando ambas son verdaderas el resultado es falso, igual si las dos son falsas. Se nota como Å. Algunos ejemplos son:

1. r: Antonio canta o silva

La proposición está compuesta por las proposiciones

p: Antonio Canta

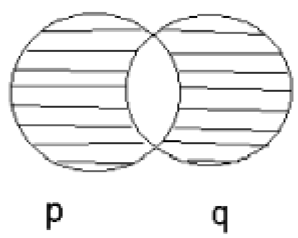
y q: Antonio silva

Su notación es: p: r Å q

Y su tabla de verdad será:

.p	.q	.r = p Å q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

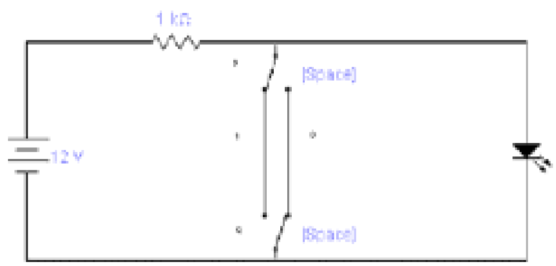
La XOR o disyunción exclusiva se asimila a la operación Unión exclusiva entre conjuntos, por ello en diagrama de Venn se representa, así



.p Å q

Diagrama de Venn de una Disyunción exclusiva (XOR)

Y en circuito de conmutación, así:



Representación circuital de una disyunción exclusiva XOR p Å q

El led será encendido si los interruptores están en posiciones contrarias de cualquier otra forma se conservara apagado ("o" lógico)

e. ***Combinaciones con negadora.***

Con ayuda de estos operadores básicos se pueden formar los operadores compuestos Nand (combinación de los operadores Not y And), Nor (combina operadores Not y Or) y Xnor (resultado de Xor y Not).

- ***Operador NAND – Conjunción negada***

Se utiliza para conectar dos proposiciones que se deben cumplir (ser verdaderas) para que se pueda obtener un resultado falso, en cualquier otro caso la proposición compuesta es verdadera. Su símbolo es: {(Ù)’, (.)’, (Ç)’}.

De tal manera que la representación de una proposición queda como sigue:

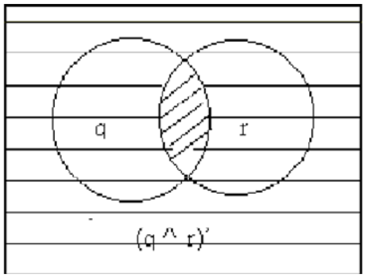
p = (q Ù r)’

Cuya tabla de verdad es complemente contraria a la conjunción

.q	**.r**	**p = (q Ù r)’**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

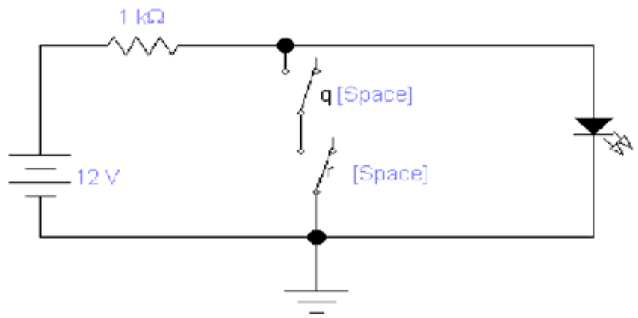
Donde: 1 = verdadero 0 = falso

El operador *y negado* en la teoría de conjuntos equivale a la operación de intersección complementada, por ello se le puede representar en diagrama de Venn como lo muestra la figura:



(q Ù r)’

El conector NAND también tiene representación circuital con interruptores, como aparece en la figura. Si los dos interruptores están cerrados (indicando verdadero o "1" lógico) el led se apaga ("0" lógico) de lo contrario está encendida ("1" lógico). Su comportamiento es completamente contrario a la conjunción.



Circuito con interruptores que representa
la función lógica Conjunción(NAND) (q Ù r)’

- ***Operador NOR – Disyunción negada***

Es el Inverso de la disyunción, por ello, se obtiene con este operador un resultado verdadero en el único caso que se obtenía falso en la disyunción, es decir, cuando las proposiciones son falsas. En cualquier otro caso da un resultado falso. Se le indica por medio de los siguientes símbolos: {(Ú **)’, (+)’, (È)’**}. Se conoce como la suma lógica inversa en el Álgebra Booleana.

La proposición compuesta es

r: (p Ú q)’

y la tabla de verdad representativa es:

.p	**.q**	**.r = (p Ú q)’**
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

En cualquier caso la operación NOR o la disyunción negada se asimila a la operación Unión entre conjuntos, pero, complementada; por ello en diagrama de Venn se representa como en la figura siguiente, donde se considera como resultado todo lo que en la disyunción no lo era, así

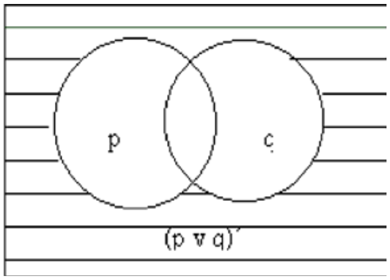
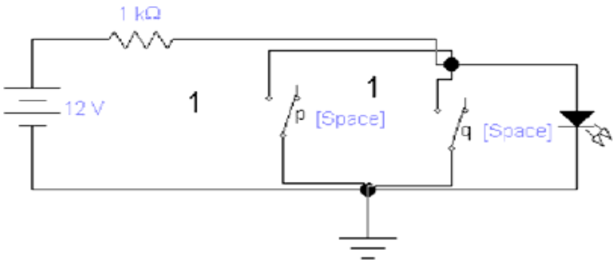


Diagrama de Venn de una Disyunción negada

El circuito de conmutación queda como en la figura siguiente.

La única forma en que se ACTIVE el led("1" lógico), es que ninguno de los interruptores se cierre("1" lógico) el led se conservará APAGADO("0" lógico.



Representación circuital de una disyunción negada (NOR) (p v q)'

- ***Operador XNOR – Disyunción exclusiva negada***

Es el operador que niega al conector *O exclusivo*, así , que tan solo es verdadera la proposición compuesta sí, o, bien, las dos son verdaderas o las dos son falsas(más adelante veremos que también se denomina *equivalencia*).

El operador se denomina XNOR, Se nota como, algunos también lo notan como (Å*)'*.

La tabla de verdad será:

p	**q**	**r = p⊙q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

La XNOR o disyunción exclusiva se asimila a la operación Unión exclusiva pero complementada, por ello el diagrama de Venn se representa, así

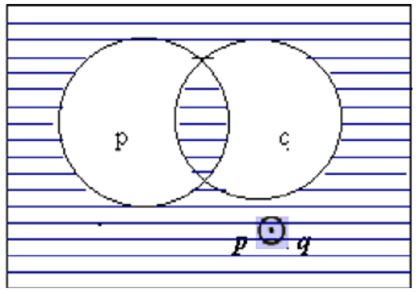
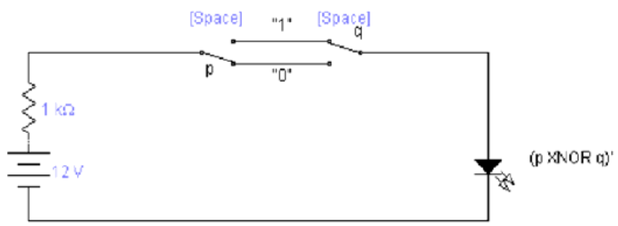


Diagrama de Venn de una Disyunción exclusiva (XNOR)

Y en circuito de conmutación, así:



Representación circuital de una disyunción exclusiva XNOR p⊙q

De manera que los dos interruptores en "1", o, los dos en "0" originan un estado encendido "1" en el led; de lo contrario se conservara apagado "0".

Otros Conectores y operaciones lógicas

a. Proposiciones condicionales.

Una proposición condicional, es aquella que está formada por dos proposiciones simples (o compuesta) *p* y *q*. La cual se indica de la siguiente manera:

p => q Se lee "Si *p*, entonces, *q*"

Ejemplo.

El candidato administrativo dice "Si salgo electo Representante al CSU recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año". Una declaración como esta se conoce como condicional. Su tabla de verdad es la siguiente:

Sean

p: Salgo electo Representante al CSU.
q: Recibirán un 50% de aumento en su sueldo el próximo año.

De tal manera que el enunciado se puede expresar de la siguiente manera:

p => q

Su tabla de verdad queda de la siguiente manera:

.p	**.q**	**.p** => **q**
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

La interpretación de los resultados de la tabla es la siguiente:

Considere que se desea analizar si el candidato al CSU mintió con la afirmación del enunciado anterior.

Cuando:
p = 1; significa que salió electo,
q = 1 recibieron un aumento del 50% en su sueldo,

Por lo tanto p => q = 1; significa que el candidato dijo la verdad en su campaña.

Cuando
p = 1 y q = 0 significa que p => q = 0; el candidato mintió, ya que salió electo y no se incrementaron los salarios.

Cuando
p = 0 y q = 1 significa que aunque no salió electo hubo un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato al CSU y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que la proposición p => q = 1.

Cuando
p = 0 y q = 0 significa que aunque no salió electo, tampoco se dio un aumento del 50% en su salario, que posiblemente fue ajeno al candidato al CSU y por lo tanto; tampoco mintió de tal forma que la proposición p => q = 1.

b. Proposición bicondicional.

Sean p y q dos proposiciones entonces se puede indicar la proposición bicondicional de la siguiente manera:

p <=> q Se lee "*p*, si solo si, *q*"

Esto significa que p es verdadera si y solo si q es también verdadera. O bien p es falsa si y solo si q también lo es. Por Ejemplo; el enunciado siguiente es una proposición bicondicional

"Es buen estudiante, si y solo si; tiene promedio de cinco"

Donde:

p: Es buen estudiante.
q: Tiene promedio de cinco.
Por lo tanto su tabla de verdad es.

p	**.q**	**p <=> q**
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

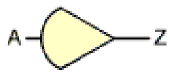
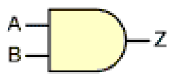
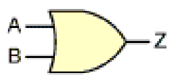
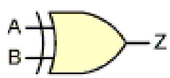
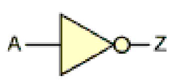
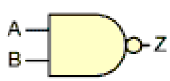
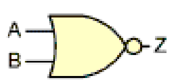
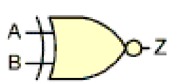
La proposición condicional solamente es verdadera si tanto p como q son falsas o bien ambas verdaderas. Es la misma Disyunción exclusiva inversa o negada (XNOR).

Tablas de Verdad

Estas tablas pueden construirse haciendo una interpretación de los operadores lógicos respectivamente. La interpretación corresponde al sentido que estas operaciones tienen dentro del razonamiento.

Puede establecerse una correspondencia entre los resultados de estas tablas y la deducción lógico matemática. En consecuencia, las tablas de verdad constituyen un *método de decisión* para chequear si una proposición es o no un teorema.

Para la construcción de la tabla se asignará el valor 1(uno) a una proposición cierta y 0 (cero) a una proposición falsa.

CONECTOR/COMPUERTA, ENTRADA(S), SALIDA CONNECTOR/GATE, INPUT(S), OUTPUT	**NOMBRE** NAME	**TABLA DE VERDAD** TRUTH TABLE
	**AMORTIGUADOR** BUFFER	A | Z 0 | 0 1 | 1
	**Y** AND	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1
	**O (O, en sentido inclusivo)** OR	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 1
	**OE (O, en sentido exclusivo)** XOR (EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 0 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
	**N, NEG o INVERSOR** NOT or INVERTER	A | Z 0 | 1 1 | 0
	**NY (N Y)** NAND (NOT AND)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 1 0 | 1 | 1 1 | 1 | 0
	**NO (N O)** NOR (NOT OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 0
	**NOE (N OE)** NXOR (NOT EXCLUSIVE-OR)	A | B | Z 0 | 0 | 1 1 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 1 | 1

En la siguiente tabla mostramos las leyes lógicas o tautologías más usadas en el cálculo proposicional:

	Nombre	Proposición	Proposición lógicamente equivalente	Tautología
1	Involución	$\backsim(\backsim p)$	p	$\backsim(\backsim p) \Leftrightarrow p$
2	Idempotencia	$p \wedge p$ $p \vee p$	p p	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$
3	Conmutatividad	$p \wedge q$ $p \vee q$	$q \wedge p$ $q \vee p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
4	Asociatividad	$(p \wedge q) \wedge r$ $(p \vee q) \vee r$	$p \wedge (q \wedge r)$ $p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
5	Distributividad	$(p \wedge q) \vee r$ $(p \vee q) \wedge r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $(p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$ $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
6	Ley de De Morgan	$\backsim(p \vee q)$ $\backsim(p \wedge q)$	$\backsim p \wedge \backsim q$ $\backsim p \vee \backsim q$	$\backsim(p \vee q) \Leftrightarrow (\backsim p \wedge \backsim q)$ $\backsim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\backsim p \vee \backsim q)$
7	Contrarecíproco	$p \Rightarrow q$	$\backsim q \Rightarrow \backsim p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\backsim q \Rightarrow \backsim p)$
8	Implicación	$p \Rightarrow q$	$\backsim p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\backsim p \vee q)$
9	Ley de Absorción	$[(p \wedge q) \vee p]$ $[(p \vee q) \wedge p]$	p	$[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$ $[(p \vee q) \wedge p] \Leftrightarrow p$

Lectura de Profundización:

- http://logica-digital.blogspot.com/
- http://www.itchetumal.edu.mx/paginasvar/Maestros/mduran/Archivos/Unidad%202%20Logica.pdf

Imágenes

Las imágenes fueron tomadas de www.google.com

Fuentes:

- http://algebra.materia.unsl.edu.ar/Teorias/Logica2011.pdf
- http://200.69.103.48/comunidad/profesores/jruiz/jairocd/texto/capitulodos.htm
- http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/contenido/tablas_verdad.html
- http://algebra.materia.unsl.edu.ar/Teorias/Logica2011.pdf
- http://es.wikipedia.org/wiki/Tabla_de_verdad