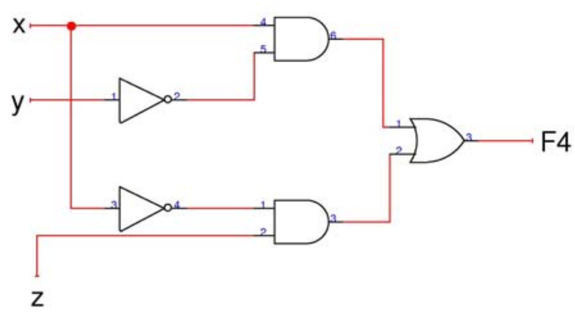
UNIVERSIDAD DISTRITAL
FRANCISCO JOSE DE CALDAS




George Boole

Algebra Booleana

2013
Transversal de Programación Básica
Proyecto Curricular de Ingeniería de Sistemas

Introducción

La herramienta fundamental para el *análisis* y *diseño* de circuitos digitales es el Álgebra Booleana. Esta álgebra es un conjunto de reglas matemáticas (similares en algunos aspectos al álgebra convencional), pero que tienen la virtud de corresponder al comportamiento de circuitos basados en *dispositivos de conmutación* (interruptores, relevadores, transistores, etc).

El *Algebra Booleana*, es considerada una herramienta que permite en análisis y el diseño de circuitos de forma digital. Aunque similar en muchos aspectos al algebra que conocemos, es el conjunto de unas reglas matemáticas que están sumamente ligadas al comportamiento, uso y funcionamiento de circuitos basados en dispositivos de toda clase.

En esta guía se presentan los postulados que definen el álgebra booleana, expresando en forma de teoremas los resultados más importantes. De igual forma se presentan también los tres ejemplos clásicos de álgebras boolenas (lógica proposicional, álgebra de conjuntos, álgebra de switches) y herramientas básicas como tablas de verdad y diagramas de Venn.

1. Postulados Del Álgebra Booleana

El Álgebra de Boole, fue presentada originalmente por el inglés George Boole, en el año de 1854 en su artículo "An Investigation of the Laws of Thoght ... ", sin embargo, las primeras aplicaciones a circuitos de conmutación fueron desarrolladas por Claude Shannon en su tesis doctoral "Análisis simbólico de los circuitos de conmutación y relés" hasta 1938.

A continuación se presentan los postulados fundamentales del álgebra de Boole

Postulado 1. Definición. El álgebra booleana es un sistema algebraico definido en un conjunto **B**, el cual contiene dos o más elementos y entre los cuales se definen dos operaciones denominadas "suma u operación OR" (+) y "producto o multiplicación u operación AND" ( ), las cuales cumplen con las siguientes propiedades:

a. a = a --- a + a = a

Postulado 2. Existencia de Neutros. Existen en **B** el elemento neutro de la suma, denominado O y el neutro de la multiplicación, denominado 1, tales que para cualquier elemento x de s:

x + O = x (b) x. 1 = x

Postulado 3. Conmutatividad (la conmutatividad menciona que el orden de los elementos no afecta el resultado). Para cada x*,* y en **B**:

$$x+y = y+x \quad (b)\ x\ y = y\ x$$

Postulado 4. Asociatividad. Para cada x, y, z en **B**:

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (b)\ x\ (y\ z) = (x\ y)\ z$$

Postulado 5. Distributividad. Para cada x, y, z en **B**:

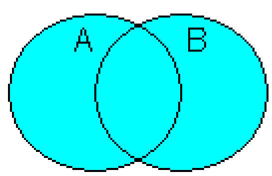
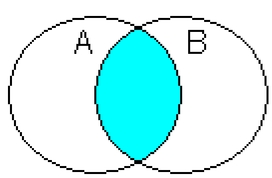
$$x+(y\ z)=(x+y)\ \ (x+z) \quad (b)\ x\ (y+z)=(x\ y)+(x\ z)$$

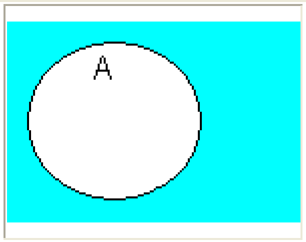
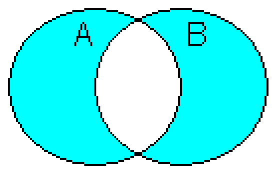
Postulado 6. Existencia de Complementos. Para cada x en **B** existe un elemento único denotado *x* (también denotado x'), llamado complemento de x tal que:

$$x+ x' = 1 \quad (b)\ x\ \ x' = O$$

2. Operadores de Uso General

En álgebra de Boole, hay cuatro operadores de uso general: ⋀ (y), ⋁ (o), ⊕ (exclusiva o), y ¬ (negada , no, o complemento). El cuadro a continuación, resume a los operadores boleanos.

Operador	Nombre	Tabla de verdad	Diagrama de Venn	Descripción
∧	y	**A** | **B** | **A ∧ B** 0 | 0 | 0 0 | 1 | 0 1 | 0 | 0 1 | 1 | 1		el ⋀ vuelve (1) verdadero si ambos operandos son (1) verdadero, si no vuelve falso (0). En la mayoría de los lenguajes de programación, y se representa por "y" o "&&". El operador "^" representa la exponenciación en la mayoría de los lenguajes de programación.
V	o	**A** | **B** | **A V B** 0 | 0 | 0 0 | 1 | 1 1 | 0 | 1 1 | 1 | 1		El ⋁ vuelve (1) verdadero si un o ambos operandos son (1) verdadero, si no vuelve falso (0). En la mayoría de los lenguajes de programación, o se representa por "|" o "||".

<table>
<tr><td>¬</td><td>no</td><td><table><tr><th>A</th><th>¬A</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>
</td><td>el ¬ vuelve (1) verdadero si el operando es falso (0), y falso (0) si el operando es (1) verdadero. En la mayoría de los lenguajes de programación niegue o no es representado por la marca de exclamación “!”.</td></tr>
<tr><td>⊕</td><td>exclusiva o</td><td><table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A ⊕ B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table></td><td>
</td><td>El ⊕ vuelve (1) verdadero si uno pero no ambos operandos es (1) verdadero, si no vuelve falso (0). En la mayoría de los lenguajes de programación, la exclusiva o se ejecuta como llamada de función.</td></tr>
</table>

3. Clases De Álgebras De Boole

En un principio algunos de los postulados anteriores pueden parecer extraños, especialmente aquellos que son diferentes al álgebra con número, y puede ser difícil encontrar situaciones de interés que cumplan al pie de la letra con cada uno de ellos, sin embargo, existen varios ejemplos, de los cuales se presentan los siguientes tres clásicos, en los cuales se verifica que se trata de álgebras de Boole, es decir, que se cumple postulado por postulado.

3.1 ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Se encarga de definir las operaciones, reglas y propiedades que podemos aplicar a los conjuntos. Un conjunto es una agrupación, variedad, clase o colección de objetos que se denominan elementos del conjunto. Por ejemplo, el símbolo S representa un conjunto, un elemento “a” pertenece o está contenido en el conjunto S, o lo que es igual, el conjunto S contendrá al elemento a. Un conjunto S se define si dado un objeto a, se sabe con seguridad que o a ε S o a ε/ S (esto significa que, a no pertenece a S). Un conjunto se representa habitualmente mediante llaves que contienen sus elementos, ya sea escribiendo todos y cada uno de los elementos, o dando una fórmula, regla o proposición que los describa.

Los diferentes **tipos de conjuntos** (nombrados con letras mayúsculas) que se pueden encontrar son los siguientes:

- El **Conjunto universal** es aquel que contiene a todos los conjuntos de los que estemos relacionando.
- El **elemento de un conjunto**, es un objeto Individual que forma parte de ese conjunto. α∈A.
- Dos **conjuntos** son **iguales** si están formados por los mismos elementos.

- El **conjunto vacío** es aquel que no tiene ningún elemento, y se identifica con el siguiente símbolo ø . Se tiene en cuenta que si no contiene ningún elemento, no se tiene un conjunto, sin embargo la definición de conjunto vacío o nulo como tal es sumamente útil.
- Dado un conjunto A, se llama **complementario del mismo**, y se representa por Ac, al conjunto que se forma por los elementos del universo que no son de A.
- Se dice que B es **subconjunto** de A, y se representa B ⊂ A, si todos los elementos de B pertenecen a A. Se dice entonces también que B se incluye en A.
- Dados dos conjuntos A y B, se llama **unión** de ambos, y se representa A ∪ B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.
- Se llama **intersección** y se representa A ∩ B, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.
- Si dos conjuntos no tienen elementos comunes, se llaman d**isjuntos** y su intersección es el conjunto vacío.

3.1.1 Propiedades de los Conjuntos

Para especificar estas propiedades, se considera que el conjunto **B** es el conjunto de todos los ***conjuntos*** a tratar

1.- La suma es la *unión* de conjuntos (U) y la multiplicación es la *intersección* (∩) de conjuntos.

2.- Existencia de neutros. El neutro de la unión es el conjunto vacío *F,* mientras que el neutro de la intersección es el conjunto universo *U,* ya que para cualquier conjunto arbitrario A, A U *F* = A y A ∩ *U* = A.

3.- Conmutatividad. La unión y la intersección son conmutativas, ya que para cualquier par de conjuntos A, B: A U B = B U A y A ∩B = B ∩A

4.- Asociatividad. La unión y la intersección de conjuntos son asociativas, ya que para cualesquiera tres conjuntos A, B, C: A U (B U C) = (A U B) U C y A ∩ (B ∩ C) = (A ∩ B) ∩ C

5.- Distributividad. La unión de conjuntos es distributiva sobre la intersección, y viceversa, la intersección es distributiva sobre la unión, ya que para cualesquiera tres conjuntos A, B, C: A U (B ∩ C) = (A U B) ∩ (A U C) y A ∩ (B U C) = (A ∩ B) U (A ∩ C)

6.- Existencia de complementos. El conjunto complemento A^c cumple con las propiedades deseadas:
A U A^c = U y A ∩ A^c = F

A continuación se detallan algunas propiedades de la lógica de conjuntos:

$A \cup B = B \cup A$ **(conmutatividad de $\cup$)**

$A \cap B = B \cap A$ **(conmutatividad de $\cap$)**

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **(asociatividad de $\cup$), lo que autoriza la escritura $A \cup B \cup C$.**

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ **(asociatividad de $\cap$),lo que autoriza la escritura $A \cap B \cap C$.**

$A \cup \emptyset =$ **A ($\emptyset$ es elemento neutro para $\cup$)**

$A \cap \emptyset = \emptyset$ **(($\emptyset$ es elemento absorbente para $\cap$)**

$A \cup E = E$ **(E es elemento absorbente para $\cup$)**

$A \cap E = A$ **(E es elemento neutro para $\cap$)**

$A \cup (B \cap C) =$ **$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributividad de $\cup$ sobre $\cap$)**

$A \cap (B \cup C) =$ **$(A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributividad de $\cap$ sobre $\cup$)**

$A \cup A' = \mathbf{E}$

$A \cap A' = \emptyset$

$(A \cup B)' = \mathbf{A' \cap B'}$

$(A \cap B)' = \mathbf{A' \cup B'}$

$A \cup A = \mathbf{A \cap A = A}$

$(A')' = \mathbf{A}$

$A - B = \mathbf{A \cap B'}$

$(A - B) - C = \mathbf{A - (B \cup C)}$

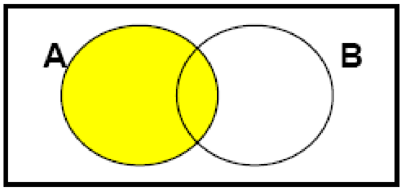
Si $A \cap B = \emptyset$**, entonces $(A \cup B) - B = A$**

$A - (B \cup C) = \mathbf{(A - B) \cap (A - C)}$

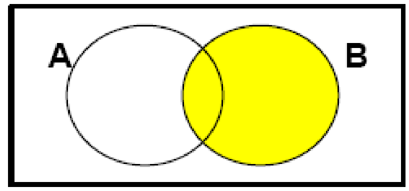
Algunos de los enunciados anteriores pueden ser difíciles de obtener, o recordar, especialmente la distributividad, por ello, es conveniente tener en cuenta una herramienta gráfica en la cual estos enunciados se vuelven evidentes casi a simple vista:

3.1.2 Diagramas De Venn

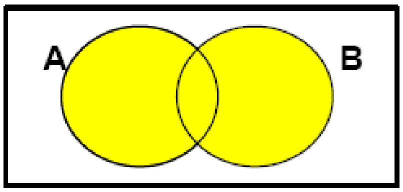
En la siguiente figura se muestran diagramas de Venn para los conjuntos A, B, A U B y A $\cap$ B



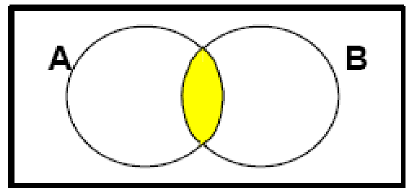
Conjunto A



Conjunto B

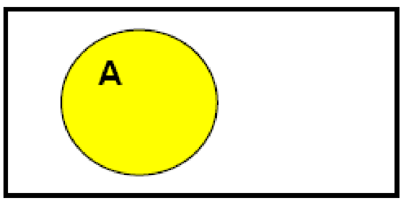


Conjunto A U B

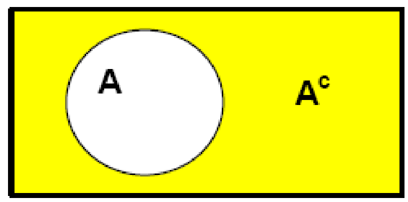


Conjunto A $\cap$ B

A continuación se muestra el conjunto A y su complemento A^c.

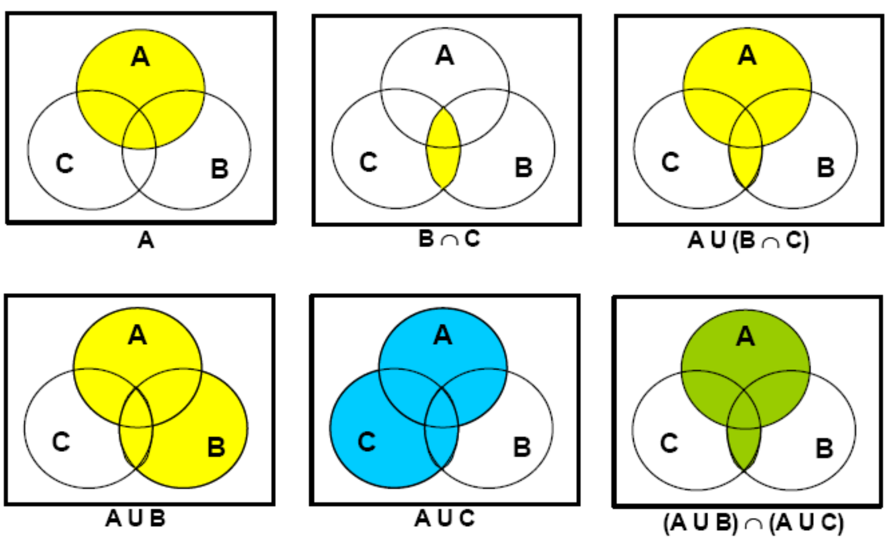


Conjunto A



Conjunto A^c

Ejemplo.- En el siguiente ejemplo se ilustra la manera como pueden usarse los diagramas de Venn para ilustrar cada uno de los postulados y propiedades del álgebra de conjuntos. En este caso se usan para ilustrar la propiedad de ***distributividad de la unión sobre la intersección***



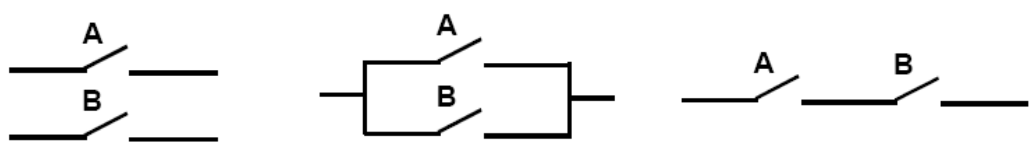
Distributividad de la Unión sobre la Intersección

3.2 CIRCUITOS DE CONMUTACIÓN

Una aplicación importante del álgebra booleana es el álgebra de circuitos de conmutación. Un conmutador es un dispositivo con dos estados que son cerrado y abierto y que se denotarán respectivamente 1 y 0. En esta forma, un álgebra de circuitos de conmutación no es más que un álgebra booleana con dos elementos a saber: 0 y 1.

Para la descripción de este apartado, el conjunto **B** es el conjunto de todos los ***switches*** o interruptores

1.- La operación **suma de switches** es la conexión en paralelo y la **multiplicación de switches** es la conexión en serie, como se muestra en la siguiente figura. Los valores que pueden tomar los switches son sólo dos: {ON, OFF} o bien, {1,0}.



Switches A, B　　Suma (A+B)　　Producto (A B)

Si dos conmutadores operan en tal forma que se abren y se cierran simultáneamente, se designarán con la misma letra. Si operan en tal forma que cuando uno está abierto el otro está cerrado, y viceversa entonces se designará uno de ellos con una letra y el otro por su complemento.

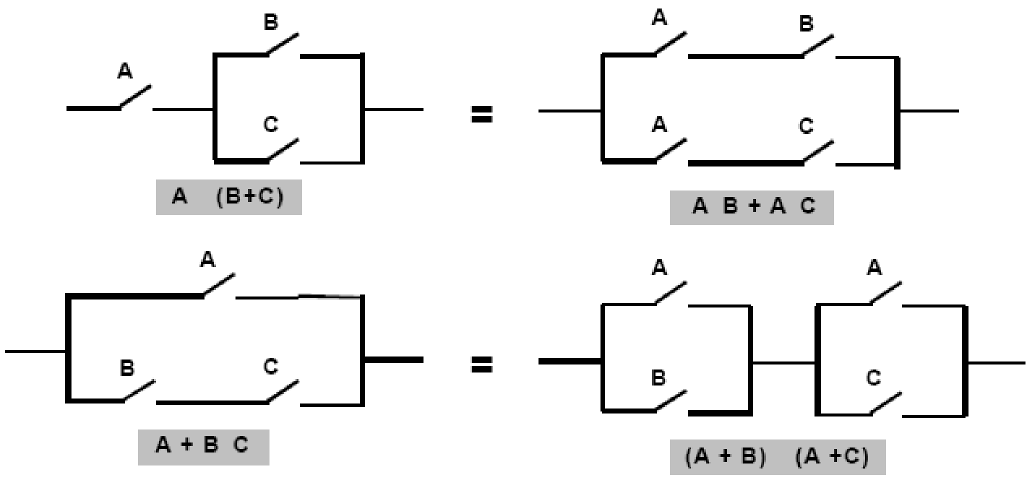
Un circuito consistente de los conmutadores x e y conectados en paralelo, se designará por x + y, si los conmutadores están conectados en serie se designarán por xy. Para cada circuito serie paralelo corresponderá una expresión algebraica y viceversa, tales expresiones involucran las operaciones (+), (.), (´).

2.- **Existencia de neutros**. El neutro de la suma, es un circuito abierto (un switch que siempre está abierto), mientras que el neutro del producto es un corto circuito (un switch que siempre está cerrado)

3.- **Conmutatividad**. Evidentemente las conexiones en serie y en paralelo funcionan de la misma manera independientemente del orden de colocación de los switches que interconectan.

4.- **Asociatividad**. Las conexiones en serie y en paralelo son asociativas, es decir, al conectar tres switches en paralelo, no importa cual par se conecte primero. En forma similar pasa con la conexión de tres switches en serie.

5.- **Distributividad**. La conexión serie es distributiva sobre la conexión en paralelo y la conexión paralelo es distributiva sobre la conexión en serie, en el sentido que se ilustra en la figura siguiente



Observación 1: Nótese que en la figura anterior se está suponiendo que el switch A se puede usar en dos lugares diferentes, esto es posible físicamente simplemente construyendo dos switches acoplados mecánicamente de manera que cuando uno esté abierto el otro también lo esté y cuando uno esté cerrado, el otro también se cierre.

Observación 2: **Jerarquía de operaciones**.- En adelante, se utilizará la notación algebraica utilizada en la figura anterior, en la cual se supone que cuando en una misma expresión aparecen sumas y productos sin usar paréntesis **se realiza primero el producto** y luego la suma. Cuando se quiere alterar este orden de *jerarquía de operaciones* se usan paréntesis para indicar que la operación que está entre paréntesis se debe realizar primero.

6.- **Existencia de complementos**. Se puede fabricar un switch A complemento de otro switch A simplemente acoplando mecánicamente ambos, para que cuando uno se abra el otro se cierre y viceversa.

3.3 LÓGICA PROPOSICIONAL

Las proposiciones construyen conectividades, las cuales son capaces o tienen la capacidad de crear mayores conectividades y de forma más compleja.

Para este ejemplo de álgebra de Boole el conjunto **B** es el conjunto de todos los ***enunciados gramaticales***.

1.- La operación suma (+) es la conjunción gramatical “o” (OR), la multiplicación es la conjunción gramatical “y” (AND) y los valores que puede tomar un enunciado gramatical son {falso,verdadero} = {F,V}.

En la siguiente figura se muestra un ejemplo en donde se aclara de manera precisa, el sentido de las operaciones OR y AND (ya que puede ser diferente de la interpretación gramatical cotidiana), para ello se introduce el concepto de ***tabla de verdad***, la cual es simplemente una tabulación de los enunciados y todas las posibles combinaciones de sus correspondientes valores de verdad o falsedad

Ejemplo. Consideremos los siguientes los enunciados:
x = "Todo ingeniero electricista domina la Transformada de Fourier"
y = "Todo ingeniero electricista conoce las normas ISO-9000"

Suma lógica:
x+y = x **o** y = “Todo ingeniero electricista domina la Transformada de Fourier **o** conoce las normas IS0-9000"

Producto lógico:
x.y = x **y** y = "Todo ingeniero electricista domina la transformada de Fourier **y** conoce las normas ISO-9000"

Complemento:
X’ = **no** x = "**no** todo ingeniero electricista domina la transformada de Fourier" =”existe **al menos un** ingeniero electricista **que no** domina la transformada de Fourier” [1] “**ningún** ingeniero electricista domina la transformada de Fourier”

Tablas de verdad:

x	y	x+y
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

x	y	x y
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

x	y
F	V
V	F

Ejemplo de un Neutro de la suma:
F = "Todo ingeniero electricista es premio novel de literatura'

Ejemplo de un Neutro de la multiplicación:
V = "Todo ingeniero electricista es mayor de edad "

2.- **Existencia de neutros**. El neutro de la suma, es un enunciado que evidentemente siempre es falso, (ver ejemplo). En forma similar, el neutro de la multiplicación es un enunciado que evidentemente siempre es verdadero.

3.- **Conmutatividad**. Evidentemente las conjunciones "y", "o" no alteran el sentido del enunciado total, independientemente del orden en que son tomados.

4.- **Asociatividad**. Las conjunciones "y", "o" son asociativas, es decir, al conectar tres enunciados gramaticales con "y" o con "o" no importa cual par de enunciados evaluemos primero para determinar si el enunciado total es verdadero o falso.

5.- **Distributividad**. La conjunción "y" es distributiva sobre la conjunción "o" y viceversa, esto es fácil de probar mediante tablas de verdad, como se muestra a continuación:

x	y	z
F	F	F
F	F	V
F	V	F
F	V	V
V	F	F
V	F	V
V	V	F
V	V	V

x y	x z
F	F
F	F
F	F
F	F
F	F
F	V
V	F
V	V

x y + x z
F
F
F
F
F
V
V
V

y+z
F
V
V
V
F
V
V
V

x (y+z)
F
F
F
F
F
V
V
V

6.- **Existencia de complementos**. El complemento de un enunciado dado x es simplemente el enunciado negado gramaticalmente: "no x" y se denota *x'* .

Observación: Es importante tener claro que cuando x es verdadero *x'* es falso, y viceversa, así, por ejemplo el complemento de "todo" no es "ninguno", sino "al menos uno no"

4. Teoremas Del Algebra Booleana

A continuación se presenta un conjunto de resultados fundamentales; pero basados en los postulados del 1 al 6 presentados anteriormente y que por lo tanto son válidos para cualquier álgebra de Boole. Estos resultados son presentados a manera de Teoremas y junto con los seis postulados representan *las reglas del juego* para cualquiera que desee trabajar con el álgebra booleana.

La manera de demostrar los teoremas siguientes se puede basar en ideas intuitivas producto de la familiaridad con algún álgebra booleana en particular, (en diagramas de Venn, o bien, en circuitos con switches o en tablas de verdad) con la única condición de que se respete al pie de la letra los 6 postulados fundamentales. En estas notas sólo se usan razonamientos basados en los seis postulados.

Antes de presentar los teoremas es conveniente mencionar el siguiente principio que se deriva directamente de la manera en que fueron presentados los seis postulados fundamentales, es decir, del hecho de que cada postulado tiene dos incisos los cuales son ***duales*** uno del otro, o **Principio de Dualidad**. Si una expresión booleana es verdadera, su ***expresión dual*** también lo es.

Expresiones duales. Dos expresiones se dicen duales una de la otra, si una se puede obtener de la otra cambiando las operaciones (+) por (.) y viceversa y cambiando los O's por 1 's y viceversa.

Ejemplo.
La expresión A + B = 1 es dual de la expresión A B = O, Todas las expresiones de los incisos (a) de los postulados del álgebra booleana son duales de las expresiones de los incisos (b) correspondientes.

De aquí en adelante, de acuerdo al principio de dualidad demostrar sólo un inciso de los siguientes teoremas y automáticamente el inciso dual quedará demostrado

Teorema 1. Multiplicación por cero

a) A.0 = 0
b) A+1 = 1

Demostración del inciso (a)	**Explicación**:
A.0 = A.0 + 0	*0 es el neutro de la suma*
= A.0 + A.	*A el producto de una variable por su complemento da 0*
= A.(0 + *A*)	*distributividad*
= A.(*A*)	*una variable más el neutro no se altera*
= 0	*una variable por su complemento da 0*

Notación. De aquí en adelante, el símbolo de multiplicación (.) se omitirá en ocaciones por comodidad, así por ejemplo A.B se escribirá AB, o bien, (A+B).(C+D) se escribirá (A+B)(C+D) siendo diferente de A+B.C+D, lo cual se escribirá A+BC+D.

Teorema 2. Absorción

a) A + AB = A
b) A(A + B) = A

Demostrando el inciso (a)	**Explicación:**
A + AB = A.1 + AB	*1 es el neutro del producto*
= A(1 + B)	*distributividad*
= A(1)	*Teorema 1*
= A	*es el neutro del producto*

Este teorema se puede usar en diversos casos de simplificación, basta con usar identificar en una suma, una expresión que se repite primero en forma aislada y luego multiplicando a otra expresión

Ejemplos.

- La expresión XY + XYZ por absorción es igual a XY
- La expresión A'+ A'B por absorción es igual con A'
- Etc

Teorema 3. **Cancelación**

a) A + AB = A' + B

b) A(A' + B) = A B

Demostración del inciso (a)	**Explicación:**
A + A'B = (A+ A')(A+B)	*distributividad*
= 1.(A+B)	*la suma de una variable con su complemento es 1*
= A+B	*1 es el neutro del Producto*

Este teorema se puede usar en la simplificación de expresiones cuando encontramos una expresión sumada Con su complemento multiplicado por otra expresión (o el dual).

Ejemplos:

- La expresión A + A'BC por cancelación es igual a A + BC
- La expresión A' + AB por cancelación es igual a A' + B
- La expresión XY + XY Z por cancelación es igual a XY + Z

Teorema 4. Cancelación

a) AB + A'B = B

b) (A+B)(A'+B)=B

Demostración del inciso (a)	**Explicación:**
AB + A'B = (A+ A')B	*distributividad*
= 1.B	*la suma de una variable con su complemento es 1*
= B	*1 es el neutro del producto*

Para usar este resultado hay que identificar dos términos que tienen un factor común y el término que no es común en una de ellas es el complemento del de la otra.

Ejemplos:

- La expresión A'BC+ABC, por cancelación es igual a BC
- La expresión XYZ+ $(XY)'$ Z, por cancelación es igual a Z

Teorema 5. Idempotencia

a) A.A = A

b) A+A= A

La demostración del inciso (b) de este teorema es inmediata del teorema de absorción, ya que A + A = A+ A.1

Este teorema implica que cuando existen ***términos semejantes*** en una expresión, basta con escribir uno de ellos, o bien, que un término puede "desdoblarse" tantas veces como se quiera. Obsérvese que también esto implica que $A^n = A$ para cualquier número n entero positivo.

Ejemplos:

- La expresión (X+Y)(X+Y) por idempotencia es igual a X+Y
- La expresión XYZXYX por idempotencia es igual a XYZ
- La expresión XY+Z+ XY por idempotencia es igual a XY+Z

Teorema 6. Consenso

a) AB + *A'*C + BC = AB + *A'*C

b) (A+B)(*A'*+C)(B+C) = (A+B)(*A'*+C)

Demostración del inciso (a)	**Explicación:**
AB + *A*C + BC = AB + *A*C + BC(A + *A*)	*A+ A es el neutro de la multiplicación*
= AB + *A*C +ABC + *A*BC	*distributividad*
= (AB +ABC) + *A*C + *A*BC)	*conmutatividad y asociatividad*
= AB + *A*C	*absorción*

La clave para usar este teorema es encontrar dos términos que contengan una expresión en uno afirmada y en otro negada, anotar los términos con los que están multiplicando uno y otro y buscar otro elemento que sea la multiplicación de estos últimos dos, éste último elemento es el que se puede eliminar.

Ejemplos:

- La expresión *A'*B + AC + BC por consenso es igual a *A'*B + AC
- La expresión XYZ + (*XY)'* W + ZW por consenso es igual a XYZ + (*XY)'* W

Teorema 7. Teorema de De Morgan

a) (*AB)'* = (*A*)'+ (*B)'*

b) (*A+B)'* = *A' B'*

Demostración del inciso (a): Para demostrar este teorema hay que recordar las dos propiedades que cumple el complemento *X'* de una expresión X, es decir:

i) *X'*+ X = 1 (sumados nos da uno)

ii) *X'* X = 0 (multiplicados nos da cero)

Así, para demostrar el inciso (a) se demostrará que *A*+ *B* es el complemento de A.B, para ello se hará en dos partes:

i) sumando:

	Explicación:
AB + (*A'*+ *B'*) = AB + *B'* + *A'*	*por conmutatividad*

= A + *B′* + *A′* — *por cancelación*
= 1 + *B′* — *propiedad del complemento*
= 1 — *por Teorema 1*

ii) multiplicando

Explicación:

A B (*A′*+ *B′*) = AB *A′* + AB *B′* — *Por distributividad*
= 0 + 0 — *propiedad del complemento*
= 0 — *idempotencia*

El teorema de De Morgan se puede generalizar al caso de más de dos variables booleanas, por ejemplo, para 3 variables, tenemos que *(A+B+C)′* = (*A+B′*) *C′* = *A′B′C′*, en forma similar, (*A.B.C)′* = (*A.B′*)+ *C′* = *A′*+ *B′*+ *C′* , y así sucesivamente para más de tres variables.

Otros teoremas: A continuación se presentan dos teoremas más sin demostración, es un buen ejercicio el intentar dicha demostración.

Teorema 8. Involución

a) *A′′*=A

Teorema 9. Complementos de los neutros

a) *0′* = 1
b) *1′* = 0

El siguiente cuadro resume los diferentes teoremas

Equivalencia Lógica	
X º Ø*X*	Doble negación
X • *X* º *X*	Idempotencia
X + *X* º *X*	Idempotencia
X + (Y + Z) º (X + *Y*) + *Z*	Ley asociativa
X • (Y • Z) º (X • *Y*) • *Z*	Ley asociativa
(*X* + *Y*) º (Y + *X*)	Ley conmutativa
(*X* • *Y*) º (Y • *X*)	Ley conmutativa
X + (Y • Z) º (X + *Y*) • (X + Z)	Ley distributiva
X • (Y + Z) º (X • *Y*) + (X • *Z*)	Ley distributiva
Ø (*X* + *Y*) º Ø*X* • Ø*Y*	Ley de De Morgan
Ø (*X* • *Y*) º Ø*X* + Ø*Y*	Ley de De Morgan
X + 0 º *X*	Ley de identidad
X • 1 º *X*	Ley de identidad
X + 1 º 1	Ley de dominación
X • 0 º 0	Ley de dominación

X + (X • Y) º X	Ley de cobertura
X • (X + *Y*) º *X*	Ley de cobertura
Ø X • X º 0	Ley de contradicción
Ø*X* + *X* º 1	Ley de contradicción

5. Ejemplos de simplificación de expresiones booleanas

Los 6 postulados fundamentales, junto con los teoremas anteriores conforman las herramientas básicas de simplificación y manipulación de expresiones booleanas, a continuación se ilustra su uso con algunos ejemplos.

Ejemplo. Simplificar las siguientes expresiones

1.- A(BC + AC) + BC Distribuyendo el factor A en el paréntesis:
= ABC + AAC + BC, conmutando y aplicando idempotencia:
= ABC + BC + AC, usando absorción:
= BC +AC

2.- ((*XY)'Z)'+XZ* Usando el Teorema de De Morgan:
= ((*XY)'Z)' (XZ)'* , por De Morgan nuevamente e involución:
= (XY+ *Z'*)(*X'*+ *Z'*), distribuyendo:
=XY *X'* +XY *Z'* + *X' Z'* + *Z' Z'* , como X *X'* es cero, y por idempotencia:
= 0+ XY *Z'* + *X' Z'* + *Z'* , por absorción:
= *Z'*

3.- ((X+Y)'+YZW)'(XY)' Por el teorema de De Morgan:
= ((X+Y).(YZW')').(XY)' , nuevamente:
= (X+Y).(Y'+Z'+W').(X'+Y') , distribuyendo el primero con el tercer factor:
= (XY'+X'Y).(Y'+Z'+W') , distribuyendo nuevamente
= (XY'+XY'Z'+XYW'+X'YZ+X'YW , por absorción:
= (XY'+X'YZ+X'YW).

6. Funciones Booleanas

En forma similar a como se define en los cursos de álgebra de números reales, es posible definir una relación de dependencia de una ***variable booleana o variable lógica*** con otras variables booleanas independientes. Es decir, es posible definir ***funciones booleanas o funciones lógicas***.

Definición.
Sean X1,X2,...,Xn, variables booleanas, es decir, variables que pueden tomar el valor de 0 o de 1, entonces la expresión

Y = f(X1,X2,...,Xn)

denota una dependencia funcional de la variable dependiente Y respecto a las variables independientes X1,X2,...,Xn, es decir, el valor (0 o 1) que toma la variable Y depende de la combinación de n valores (1's y 0's) que tomen las n variables X1,X2,...,Xn.

Ejemplo: La siguiente es una función booleana

Y= f(A,B,C) = AB + A'C + A C'

Esta función se puede evaluar para diversos valores de sus variables independientes A, B, C:

Si A = 1, B = 0, C = 0 entonces Y= f(1,0,0) = 1.0 + 0.0 + 1.1 = 1,
Si A = 1, B = 1, C = 0 entonces Y= f(1,1,0) = 1.1 + 0.0 + 1.1 = 1,
Si A = 0, B = 1, C = 0 entonces Y= f(0,1,0) = 0.1 + 1.0 + 0.1 = 0, etc.

A diferencia de las funciones de variable real, las cuales no pueden representarse completamente usando una tabla de valores, **las funciones booleanas sí quedan totalmente especificadas por una tabla** que incluya todas las posibles combinaciones de valores que pueden tomar las variables independientes, dicha tabla se denomina ***tabla de verdad*** y es completamente equivalente a la expresión booleana, ya que incluye todas sus posibilidades.

Ejemplo. La siguiente es la tabla de verdad para la función del ejemplo anterior

A B C	f(A,B,C)
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	0
1 1 0	1
1 1 1	1

En general para una función de **n** variables, puesto que hay **n** variables y cada variable tiene dos posibles valores, hay $\mathbf{2^n}$ maneras de asignar estos valores a las **n** variables, así la tabla de verdad tendrá $\mathbf{2^n}$ renglones.

Por ejemplo en el ejemplo anterior f(A,B,C) es una función de 3 variables, por lo que tenemos 2^3 = 8 diferentes combinaciones de las entradas y por lo tanto 8 renglones de la tabla de verdad

6.1 Funciones Booleanas De Una Y Dos Variables

En el caso de funciones de variable real sería imposible tratar de mencionar todas las posibles funciones de una o más variables, sin embargo, en el caso de funciones booleanas se puede hacer un listado completo de todas y cada una de las funciones para cierto número de variables. a continuación se hace una lista de éstas para los casos de 0, 1 y 2 variables independientes:

Funciones de cero variables. Estas son las funciones constantes y sólo hay dos:

f0 = 0 Función constante cero
f1 = 1 Función constante uno

Funciones de una variable. Además de las funciones constantes ahora se pueden definir otras dos:

f0(A) = 0 Función constante cero
f1(A) = A Función identidad
f2(A) = A Función complemento, negación
f3(A) = 1 Función constante uno

Funciones de dos variables. En este caso se pueden definir 16 funciones diferentes, las cuales incluyen las cuatro anteriores y otras doce más. En la siguiente tabla se muestra un resumen de las dieciséis funciones de dos variables, incluyendo su nombre, su tabla de verdad, y su expresión lógica (booleana).

		Const. CERO	AND		Identidad		Identidad	EXOR	OR
A	B	0	$A B$	$A \overline{B}$	A	$\overline{A} B$	B	$A \oplus B$	$A + B$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

		NOR	EQUIVALENCIA	NOT		NOT		NAND	Const. UNO
A	B	$\overline{A+B}$	$A \odot B$	$\overline{B}$	$A+\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{A}+B$	$\overline{A\ B}$	1
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

OBSERVACIÓN. Ciertamente, las expresiones lógicas que aparecen en la tabla anterior no son únicas, ya que una misma función lógica puede tener diferentes representaciones algebraicas.

Ejemplo: Es fácil ver que

$$A\ /B = A'B + AB' = (A' + B')(A + B)$$

o bien, también por ejemplo

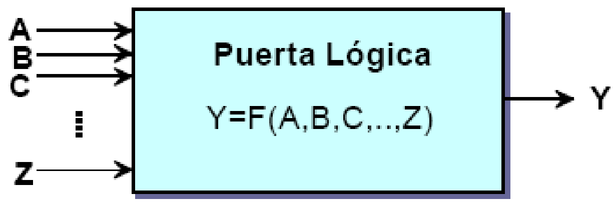
$$A \odot B = (AB)' = A'\,B' + A\,B = (\,A' + B\,)\,(\,A + B'\,)$$

... etc.

A continuación se presenta una alternativa gráfica para trabajar en el análisis y diseño de funciones booleanas a partir de bloques funcionales que se representan mediante símbolos lógicos.

6.2. Símbolos De Puertas Lógicas

Una manera generalizada de representar las funciones lógicas es el uso de símbolos o bloques lógicos denominados ***puertas o compuertas lógicas***. Estas puertas en general representan bloques funcionales que reciben un conjunto de entradas (variables independientes) y producen una salida (variable dependiente) como se muestra en la figura siguiente



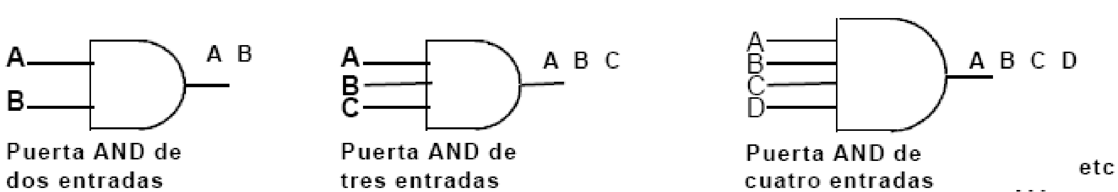
Una de las ventaja de usar éstos símbolos es que por ser una representación entrada / salida permiten la "interconexión" de puertas (la salida de una con la entrada de otra) para representar funciones más complejas a partir de funciones sencillas.

Otra ventaja es el hecho de que los bloques sencillos (puertas con pocas entradas) se encuentran disponibles en circuitos integrados comerciales, de aquí que un diagrama de puertas lógicas corresponde directamente a un ***diagrama de alambrado*** de circuito lógico.

A continuación se presentan los símbolos para las funciones lógicas más sencillas, especialmente para las presentadas en la sección anterior.

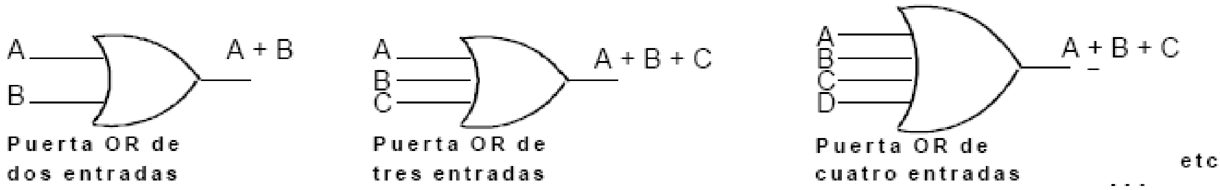
PUERTA AND

La salida de una compuerta AND es 1 solamente si todas sus entradas son simultáneamente 1, de lo contrario es 0.



PUERTA OR

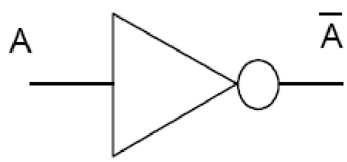
La salida de una compuerta OR es 1 solamente si todas sus entradas son simultáneamente 0, de lo contrario es 1.



INVERSOR O PUERTA NOT

Un inversor es una puerta de solamente una entrada y su salida es el complemento lógico de la entrada.

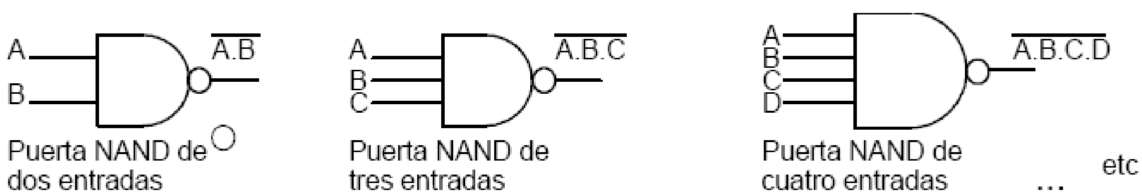
Es decir, cuando a la entrada de una puerta NOT hay un 1 su salida será 0, y de lo contrario cuando su entrada es 0, su salida será 1



Inversor o puerta NOT

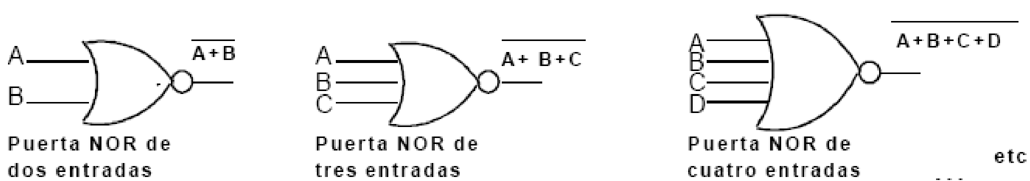
NAND

Esta es una función lógica compuesta. Se puede visualizar como una compuerta AND seguida por una compuerta NOT y su salida es 0 sólo cuando todas sus entradas son simultáneamente 1.

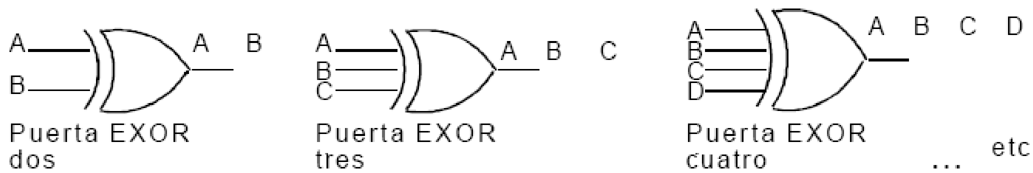


PUERTA NOR

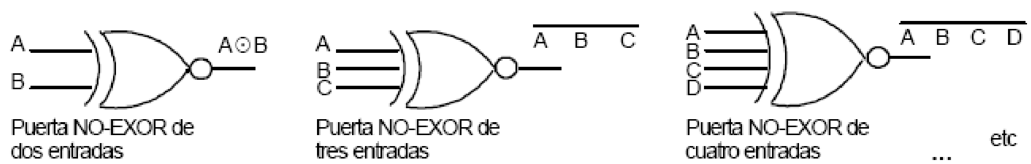
Esta Compuerta es una combinación de las funciones de un operador OR seguido por un INVERSOR. La salida de una puerta NOR sólo será 1 cuando ambas entradas valgan 0



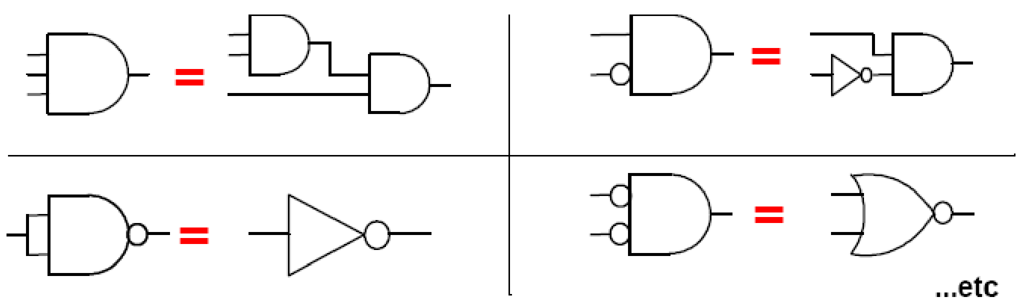
PUERTA EXOR (OR EXCLUSIVO)
La operación EXOR se denota por el símbolo ⊕, es decir, A EXOR B = A ⊕ B. Además, como se vio antes, A ⊕ B = A B + A B. La salida de una puerta EXOR será 1 si sus entradas son diferentes y será 0 si son iguales.



PUERTA NO-EXOR O EQUIVALENCIA (EQU)
La operación EQU se denota por el símbolo ⊙, es decir, A EQU B = A ⊙ B. Además, como se vió antes, A ⊙ B = *A* /*B* = *AB* + *AB* La salida de una puerta EQU será 1 si sus entradas son iguales y será 0 si son diferentes.

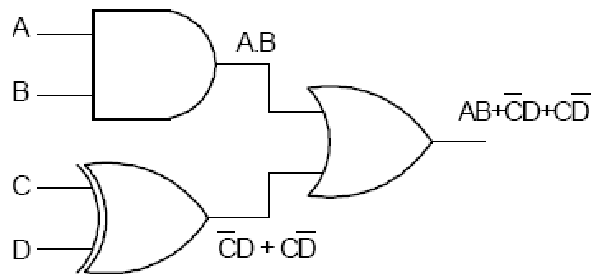


6.3 Equivalencia Entre Puertas Lógicas
Usando álgebra de Boole es posible obtener una gran variedad de equivalencias entre símbolos de puertas lógicas y diagramas de alambrado de circuitos lógicos. a continuación se muestran sólo algunas equivalencias sencillas:



En forma similar, dado un circuito lógico, empleando álgebra de Boole es posible obtener la expresión lógica de la función que realiza, simplemente escribiendo a la salida de cada puerta lógica la expresión correspondiente en términos de las entradas

Ejemplo:



Lectura de Profundización:

- http://ocw.usal.es/eduCommons/ensenanzas-tecnicas/electronica/contenido/electronica/Tema6_AlgebraBOOLE.pdf
- http://eisc.univalle.edu.co/materias/Matematicas_Discretas_1/notes/unidad2/capitulo3/introbool.html

Ejercicios de Algebra de Boole

- http://www.matematicasypoesia.com.es/ProbBoolePropo/ProbAlgByPPreg.htm
- http://www.matematica1.com/2012/03/algebra-de-boole-problemas-resueltos-y.html
- http://algebradegeorgeboole.blogspot.com/2011/08/ejercicios-algebra-boole.html
- http://www.sepi.escom.ipn.mx/wps/wcm/connect/E0D84F804A556C5F8F1E8FBC91D80B4/PROBLEMARIODIGITAL3BCD.PDF?MOD=AJPERES

Imágenes

Las imágenes fueron tomadas de www.google.com

Fuentes:

- *Álgebra de Boole*. 2009-04-03. Enciclopedia de Todas las Palabras de la Matemáticas. Life is a Story Problem.org. http://www.allmathwords.org/es/b/booleanalgebra.html.
- http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ingenieria/2000477/docs_curso/contenido.html
- http://www.fismat.umich.mx/~fhernandez/Cursos/Calculo07a/sets_cap3.pdf
- http://www2.elo.utfsm.cl/~lsb/elo211/clases/ap4.pdf
- http://www.fismat.umich.mx/~fhernandez/Cursos/Calculo07a/sets_cap3.pdf
- http://profesores.elo.utfsm.cl/~tarredondo/info/digital-systems/2-Funciones%20Booleanas.pdf