2 MOVIMIENTO EN LÍNEA RECTA

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo describir el movimiento en línea recta en términos de velocidad media, velocidad instantánea, aceleración media y aceleración instantánea.
- Cómo interpretar gráficas de posición contra tiempo, velocidad contra tiempo y aceleración contra tiempo para el movimiento en línea recta.
- Cómo resolver problemas que impliquen movimiento en línea recta con aceleración constante, incluyendo problemas de caída libre.
- Cómo analizar el movimiento en línea recta cuando la aceleración no es constante.

? Un velocista común acelera durante el primer tercio de la carrera y desacelera gradualmente en el resto de la competencia. ¿Es correcto decir que un corredor está *acelerando* conforme desacelera durante los dos tercios finales de la carrera?

¿Qué distancia debe recorrer un avión comercial antes de alcanzar la rapidez de despeje? Cuando lanzamos una pelota de béisbol verticalmente, ¿qué tanto sube? Cuando se nos resbala un vaso de la mano, ¿cuánto tiempo tenemos para atraparlo antes de que choque contra el piso? Éste es el tipo de preguntas que usted aprenderá a contestar en este capítulo. Iniciamos nuestro estudio de física con la *mecánica*, que es el estudio de las relaciones entre fuerza, materia y movimiento. En este capítulo y el siguiente estudiaremos la *cinemática*, es decir, la parte de la mecánica que describe el movimiento. Después veremos la *dinámica*: la relación entre el movimiento y sus causas.

En este capítulo nos concentramos en el tipo de movimiento más simple: un cuerpo que viaja en línea recta. Para describir este movimiento, introducimos las cantidades físicas *velocidad* y *aceleración*, las cuales en física tienen definiciones sencillas; aunque son más precisas y algo distintas de las empleadas en el lenguaje cotidiano. Un aspecto importante de las definiciones de velocidad y aceleración en física es que tales cantidades son *vectores*. Como vimos en el capítulo 1, esto significa que tienen tanto magnitud como dirección. Aquí nos interesa sólo el movimiento rectilíneo, por lo que no necesitaremos aún toda el álgebra vectorial; no obstante, el uso de vectores será esencial en el capítulo 3, al considerar el movimiento en dos o tres dimensiones.

Desarrollaremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento rectilíneo en el importante caso en que la aceleración es constante. Un ejemplo es el movimiento de un objeto en caída libre. También consideraremos situaciones en las que la aceleración varía durante el movimiento. En estos casos habrá que integrar para describir el movimiento. (Si no ha estudiado integración aún, la sección 2.6 es opcional.)

2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

Suponga que una piloto de autos de arrancones conduce su vehículo por una pista recta (figura 2.1). Para estudiar su movimiento, necesitamos un sistema de coordenadas. Elegimos que el eje x vaya a lo largo de la trayectoria recta del auto, con el origen O en la línea de salida. También elegimos un punto en el auto, digamos su extremo delantero, y representamos todo el vehículo con ese punto y lo tratamos como una **partícula**.

Una forma útil de describir el movimiento de la partícula —es decir, el punto que representa el automóvil— es en términos del cambio en su coordenada x durante un intervalo de tiempo. Suponga que 1.0 s después del arranque el frente del vehículo está en el punto P_1, a 19 m del origen, y que 4.0 s después del arranque está en el punto P_2, a 277 m del origen. El *desplazamiento* de la partícula es un vector que apunta de P_1 a P_2 (véase la sección 1.7). La figura 2.1 muestra que este vector apunta a lo largo del eje x. La componente x del desplazamiento es simplemente el cambio en el valor de x, (277 m − 19 m) = 258 m, que hubo en un lapso de (4.0 s − 1.0 s) = 3.0 s. Definimos la **velocidad media** del auto durante este intervalo de tiempo como una cantidad *vectorial*, cuya componente x es el cambio en x dividido entre el intervalo de tiempo: (258 m)/(3.0 s) = 86 m/s.

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo elegido. Durante un lapso de 3.0 s *antes* del arranque, la velocidad media fue cero, porque el auto estaba en reposo en la línea de salida y tuvo un desplazamiento cero.

Generalicemos el concepto de velocidad media. En el tiempo t_1 el auto está en el punto P_1, con la coordenada x_1, y en el tiempo t_2 está en el punto P_2 con la coordenada x_2. El desplazamiento del auto en el intervalo de t_1 a t_2 es el vector de P_1 a P_2. La componente x del desplazamiento, denotada con Δx, es el cambio en la coordenada x:

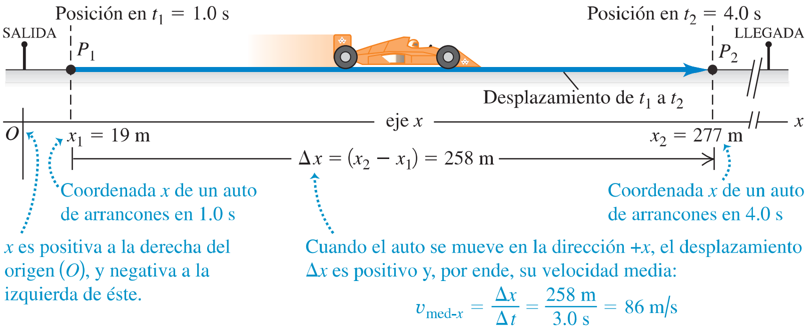
$$\Delta x = x_2 - x_1 \tag{2.1}$$

El auto de arrancones se mueve sólo a lo largo del eje x, de manera que las componentes y y z del desplazamiento son iguales a cero.

CIUDADO **El significado de Δx** Note que Δx *no* es el producto de Δ y x; es sólo un símbolo que significa "el cambio en la cantidad x". Siempre usaremos la letra griega mayúscula Δ (delta) para representar un *cambio* en cierta cantidad, calculada restando el valor *inicial* del valor *final*, y nunca a la inversa. Asimismo, el intervalo de tiempo de t_1 a t_2 es Δt, el cambio en la cantidad t: $\Delta t = t_2 - t_1$ (tiempo final menos tiempo inicial).

La componente x de la velocidad promedio, o **velocidad media**, es la componente x del desplazamiento, Δx, dividida entre el intervalo de tiempo Δt en el que ocurre el desplazamiento. Usamos el símbolo $v_{\text{med-}x}$ para representar velocidad media (el

2.1 Posiciones de un auto de arrancones en dos instantes durante su recorrido.



subíndice "med" indica que se trata de un valor promedio y el subíndice x indica que ésta es la componente x):

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(velocidad media, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.2)$$

En el ejemplo del auto de arrancones teníamos $x_1 = 19$ m, $x_2 = 277$ m, $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 4.0$ s, así que la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{277\text{ m} - 19\text{ m}}{4.0\text{ s} - 1.0\text{ s}} = \frac{258\text{ m}}{3.0\text{ s}} = 86\text{ m/s}$$

La velocidad media del auto es positiva. Esto significa que, durante el intervalo, la coordenada x aumentó y el auto se movió en la dirección $+x$ (a la derecha en la figura 2.1).

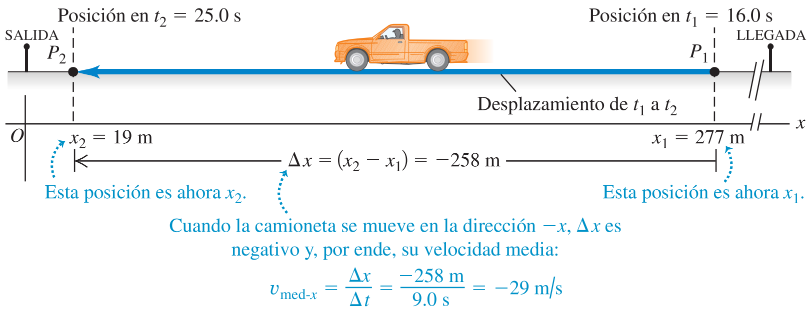
Si una partícula se mueve en la dirección x *negativa* durante un intervalo de tiempo, su velocidad media en ese lapso es negativa. Por ejemplo, suponga que la camioneta de un juez se mueve hacia la izquierda sobre la pista (figura 2.2). La camioneta está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. Entonces, $\Delta x = (19\text{ m} - 277\text{ m}) = -258$ m y $\Delta t = (25.0\text{ s} - 16.0\text{ s}) = 9.0$ s. La componente x de la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t = (-258\text{ m})/(9.0\text{ s}) = -29$ m/s.

Hay algunas reglas sencillas para la velocidad media. **Siempre que x sea positiva y aumente o sea negativa y se vuelva menos negativa, la partícula se mueve en la dirección $+x$ y $v_{\text{med-}x}$ es positiva** (figura 2.1). **Siempre que x sea positiva y disminuya, o sea negativa y se vuelva más negativa, la partícula se mueve en la dirección $-x$ y $v_{\text{med-}x}$ es negativa** (figura 2.2).

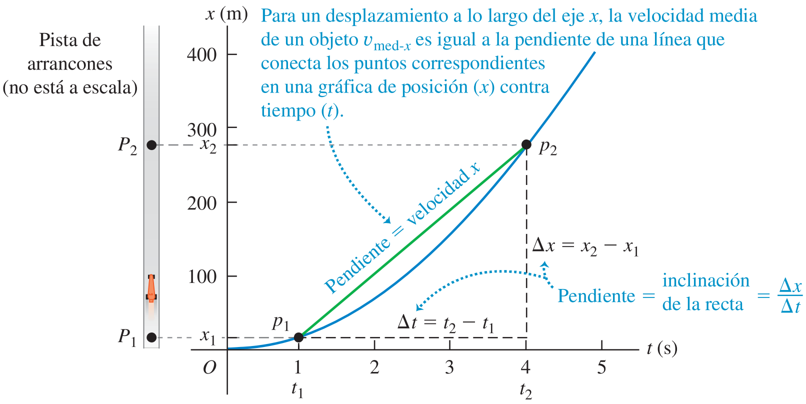
CUIDADO **Elección de la dirección x positiva** No sucumba a la tentación de pensar que una velocidad media positiva implica necesariamente movimiento a la derecha, como en la figura 2.1, y una velocidad media negativa implica movimiento a la izquierda, como en la figura 2.2. Tales conclusiones son correctas *sólo* si la dirección $+x$ es hacia la derecha, como elegimos en las figuras 2.1 y 2.2. Igualmente podríamos haber decidido que la dirección $+x$ fuera hacia la izquierda, con el origen en la llegada. Entonces, el auto habría tenido velocidad media negativa; y la camioneta del juez, positiva. En casi todos los problemas, podremos elegir la dirección del eje de coordenadas. Una vez tomada la decisión, ¡*deberá* tomarse en cuenta al interpretar los signos de $v_{\text{med-}x}$ y otras cantidades que describen el movimiento!

En el movimiento rectilíneo por lo general llamaremos a Δx el desplazamiento y a $v_{\text{med-}x}$ la velocidad media. Sin embargo, no olvide que éstas son realmente las componentes x de cantidades vectoriales que, en este caso especial, *sólo* tienen componentes x. En el capítulo 3, los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración tendrán dos o tres componentes distintas de cero.

La figura 2.3 es una gráfica de la posición del auto de arrancones en función del tiempo, es decir, una **gráfica x-t**. La curva de la figura *no* representa la trayectoria del auto; ésta es una línea recta, como se observa en la figura 2.1. Más bien, la gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del auto con el



2.2 Posiciones de la camioneta de un juez en dos instantes durante su movimiento. Los puntos P_1 y P_2 ahora se refieren a las posiciones de la camioneta, por lo que son diferentes de las de la figura 2.1.



2.3 La posición de un auto de arrancones en función del tiempo.

tiempo. Los puntos p_1 y p_2 en la gráfica corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del auto. La línea p_1p_2 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con cateto vertical $\Delta x = x_2 - x_1$ y cateto horizontal $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, la velocidad media del auto $v_{med\text{-}x} = \Delta x/\Delta t$ es igual a la *pendiente* de la línea p_1p_2, es decir, el cociente del cateto vertical Δx y el cateto horizontal Δt.

La velocidad media depende sólo del desplazamiento total $\Delta x = x_2 - x_1$ que se da durante el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$, no en los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo. En el tiempo t_1 una motocicleta podría haber rebasado al auto de arrancones en el punto P_1 de la figura 2.1, para después reventar el motor y bajar la velocidad, pasando por P_2 en el mismo instante t_2 que el auto. Ambos vehículos tienen el mismo desplazamiento en el mismo lapso, así que tienen la misma velocidad media.

Si expresamos la distancia en metros y el tiempo en segundos, la velocidad media se mide en metros por segundo (m/s). Otras unidades de velocidad comunes son kilómetros por hora (km/h), pies por segundo (ft/s), millas por hora (mi/h) y nudos (1 nudo = 1 milla náutica/h = 6080 ft/h). La tabla 2.1 muestra algunas magnitudes típicas de velocidad.

Tabla 2.1 Magnitudes típicas de velocidad

Reptar de caracol	10^{-3} m/s
Andar rápido	2 m/s
Hombre más rápido	11 m/s
Guepardo en carrera	35 m/s
Automóvil más rápido	341 m/s
Movimiento aleatorio de moléculas de aire	500 m/s
Avión más rápido	1000 m/s
Satélite de comunicación en órbita	3000 m/s
Electrón en un átomo de hidrógeno	2×10^6 m/s
Luz que viaja en el vacío	3×10^8 m/s

Evalúe su comprensión de la sección 2.1 Cada uno de los siguientes viajes en automóvil dura una hora. La dirección *x* positiva es hacia el este. i) El automóvil *A* viaja 50 km al este. ii) El automóvil *B* viaja 50 km al oeste. iii) El automóvil *C* viaja 60 km al este, luego da vuelta y viaja 10 km al oeste. iv) El automóvil *D* viaja 70 km al este. v) El automóvil *E* viaja 20 km al oeste, luego da vuelta y viaja 20 km al este. *a*) Clasifique los cinco viajes en orden de velocidad media de más positivo a más negativo. *b*) ¿Cuáles viajes, si hay, tienen la misma velocidad media? *c*) ¿Para cuál viaje, si hay, la velocidad media es igual a cero?

2.2 Velocidad instantánea

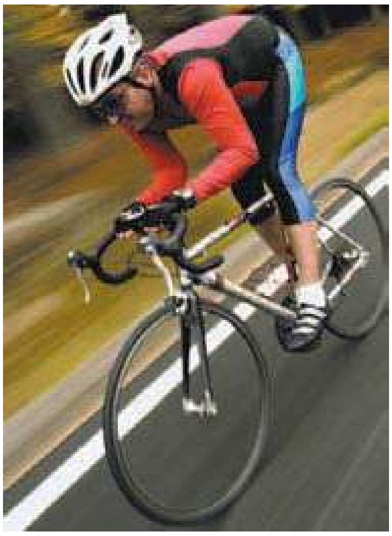
Hay ocasiones en que la velocidad media es lo único que necesitamos saber acerca del movimiento de una partícula. Por ejemplo, una carrera en pista recta es en realidad una competencia para determinar quién tuvo la mayor velocidad media, $v_{med\text{-}x}$. Se entrega el premio al competidor que haya recorrido el desplazamiento Δx de la línea de salida a la de meta en el intervalo de tiempo más corto, Δt (figura 2.4).

Sin embargo, la velocidad media de una partícula durante un intervalo de tiempo no nos indica con qué rapidez, o en qué dirección, la partícula se estaba moviendo en un instante dado del intervalo. Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la velocidad en cualquier instante específico o punto específico del camino. Ésta es la **velocidad instantánea**, y debe definirse con cuidado.

CUIDADO **¿Cuánto tiempo dura un instante?** Note que la palabra "instante" tiene un significado un poco distinto en física que en el lenguaje cotidiano. Podemos utilizar la frase "duró sólo un instante" para referirnos a algo que duró un intervalo de tiempo muy corto. Sin embargo, en física un instante no tiene duración; es un solo valor de tiempo.

2.4 El ganador de una carrera de natación de 50 m es el nadador cuya velocidad media tenga la mayor magnitud, es decir, quien cubra el desplazamiento Δx de 50 m en el tiempo transcurrido Δt más corto.

2.5 Incluso al avanzar, la velocidad instantánea de este ciclista puede ser negativa: si está viajando en la dirección x negativa. En cualquier problema, nosotros decidimos cuál dirección es positiva y cuál es negativa.



Para obtener la velocidad instantánea del auto de la figura 2.1 en el punto P_1, movemos el segundo punto P_2 cada vez más cerca del primer punto P_1 y calculamos la velocidad media $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$ para estos desplazamientos y lapsos cada vez más cortos. Tanto Δx y Δt se hacen muy pequeños; pero su cociente no necesariamente lo hace. En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero es la **derivada** de x con respecto a t y se escribe dx/dt. *La velocidad instantánea es el límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero; es igual a la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo.* Usamos el símbolo v_x, sin "med" en el subíndice, para la **velocidad instantánea** en el eje x:

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(velocidad instantánea, movimiento rectilíneo)} \qquad (2.3)$$

Siempre suponemos que Δt es positivo, así que v_x tiene el mismo signo algebraico que Δx. Un valor positivo de v_x indica que x aumenta y el movimiento es en la dirección x positiva; un valor negativo de v_x indica que x disminuye y el movimiento es en la dirección x negativa. Un cuerpo puede tener x positivo y v_x negativa, o al revés; x nos dice dónde está el cuerpo, en tanto que v_x nos indica cómo se mueve (figura 2.5).

La velocidad instantánea, igual que la velocidad media, es una cantidad vectorial. La ecuación (2.3) define su componente x. En el movimiento rectilíneo, las demás componentes de la velocidad instantánea son cero y, en este caso, llamaremos a v_x simplemente velocidad instantánea. (En el capítulo 3 veremos el caso general en el que la velocidad instantánea puede tener componentes x, y y z distintas de cero.) Al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos a la velocidad instantánea, no a la media.

Los términos "velocidad" y "rapidez" se usan indistintamente en el lenguaje cotidiano; no obstante, en física tienen diferente significado. **Rapidez** denota distancia recorrida dividida entre tiempo, con un régimen medio o instantáneo. Usaremos el símbolo v (*sin* subíndice) para denotar la rapidez instantánea, que mide qué tan rápido se mueve una partícula; la *velocidad* instantánea mide con qué rapidez *y* en qué dirección se mueve. Por ejemplo, una partícula con velocidad instantánea $v_x = 25$ m/s y otra con $v_x = -25$ m/s se mueven en direcciones opuestas con la misma rapidez instantánea de 25 m/s. La rapidez instantánea es la magnitud de la velocidad instantánea, así que no puede ser negativa.

CUIDADO **Rapidez media y velocidad media** La rapidez media, sin embargo, no es la magnitud de la velocidad media. Cuando Alexander Popov estableció un récord mundial en 1994 nadando 100.0 m en 46.74 s, su rapidez media fue de (100.0 m)/(46.74 s) = 2.139 m/s. No obstante, como nadó dos veces la longitud de una alberca de 50 m, terminó en el punto de donde partió, con un desplazamiento total de cero ¡y una *velocidad* media de cero! Tanto la rapidez media como la rapidez instantánea son escalares, no vectores, porque no contienen información de dirección.

Ejemplo 2.1 Velocidades media e instantánea

Un guepardo acecha 20 m al este del escondite de un observador (figura 2.6a). En el tiempo $t = 0$, el guepardo ataca a un antílope y empieza a correr en línea recta. Durante los primeros 2.0 s del ataque, la coordenada x del guepardo varía con el tiempo según la ecuación $x = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)t^2$. *a*) Obtenga el desplazamiento del guepardo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 2.0$ s. *b*) Calcule la velocidad media en dicho intervalo. *c*) Calcule la velocidad instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando $\Delta t = 0.1$ s, luego $\Delta t = 0.01$ s, luego $\Delta t = 0.001$ s. *d*) Deduzca una expresión general para la velocidad instantánea en función del tiempo, y con ella calcule v_x en $t = 1.0$ s y $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema requiere usar las definiciones de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea. El uso de las dos primeras implica álgebra; la última requiere cálculo para derivar.

PLANTEAR: La figura 2.6b muestra el movimiento del guepardo. Para analizar este problema, usamos la ecuación (2.1) del desplazamiento, la ecuación (2.2) de la velocidad media y la ecuación (2.3) de la velocidad instantánea.

EJECUTAR: *a*) En $t_1 = 1.0$ s, la posición x_1 del guepardo es

$$x_1 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(1.0\text{ s})^2 = 25\text{ m}$$

En $t_2 = 2.0$ s, su posición x_2 es

$$x_2 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 40\text{ m}$$

El desplazamiento en este intervalo es

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 40\text{ m} - 25\text{ m} = 15\text{ m}$$

b) La velocidad media durante este intervalo es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{40\text{ m} - 25\text{ m}}{2.0\text{ s} - 1.0\text{ s}} = \frac{15\text{ m}}{1.0\text{ s}} = 15\text{ m/s}$$

c) Con $\Delta t = 0.1$ s, el intervalo es de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 1.1$ s. En t_2, la posición es

$$x_2 = 20\text{ m} + (5.0\text{ m/s}^2)(1.1\text{ s})^2 = 26.05\text{ m}$$

La velocidad media durante estos intervalos es

$$v_{\text{med-}x} = \frac{26.05\text{ m} - 25\text{ m}}{1.1\text{ s} - 1.0\text{ s}} = 10.5\text{ m/s}$$

Siga este método para calcular las velocidades medias de los intervalos de 0.01 s y 0.001 s. Los resultados son 10.05 m/s y 10.005 m/s. Al disminuir Δt, la velocidad media se acerca a 10.0 m/s, por lo que concluimos que la velocidad instantánea en $t = 1.0$ s es de 10.0 m/s.

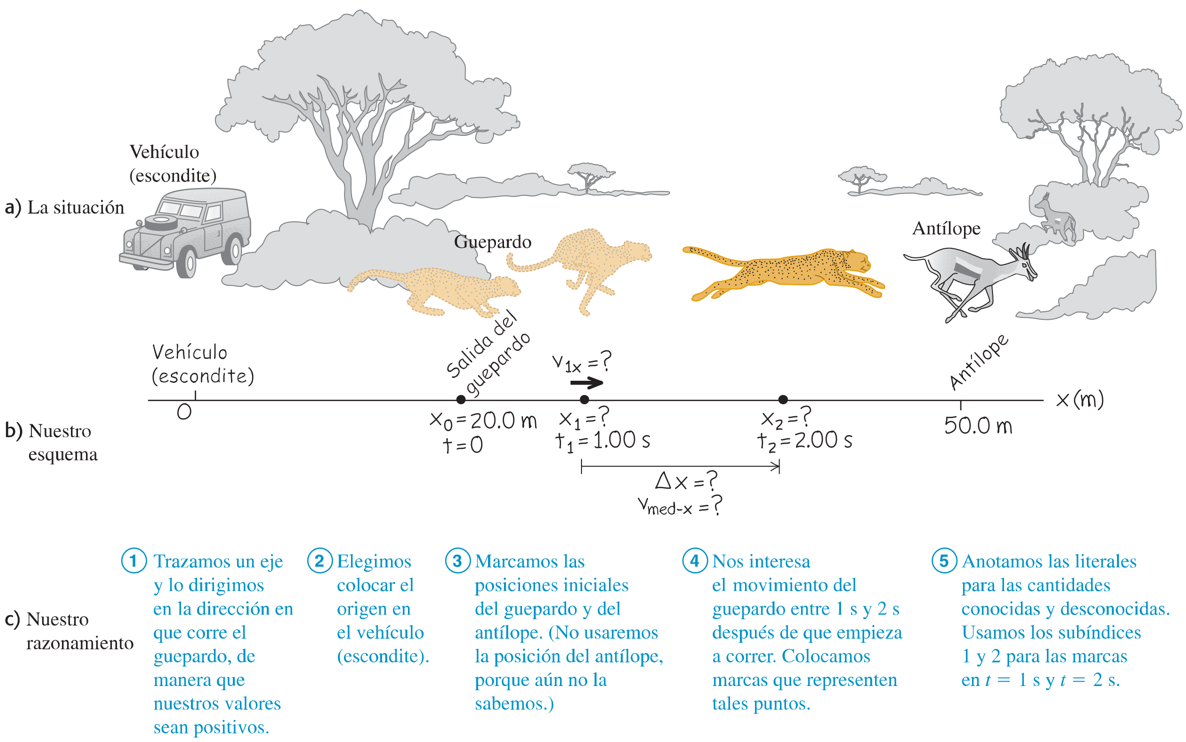
d) Al calcular la velocidad instantánea en función del tiempo, derive la expresión de x con respecto a t. La derivada de una constante es cero, y para cualquier n la derivada de t^n es nt^{n-1}, así que la derivada de t^2 es $2t$. Por lo tanto,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (5.0\text{ m/s}^2)(2t) = (10\text{ m/s}^2)t$$

En $t = 1.0$ s, $v_x = 10$ m/s, como vimos en el inciso *c*). En $t = 2.0$ s, $v_x = 20$ m/s.

EVALUAR: Nuestros resultados muestran que el guepardo aumentó su rapidez de $t = 0$ (cuando estaba en reposo) a $t = 1.0$ s ($v_x = 10$ m/s) a $t = 2.0$ s ($v_x = 20$ m/s), lo cual es razonable: el guepardo recorrió sólo 5 m durante el intervalo $t = 0$ a $t = 1.0$ s; sin embargo, recorrió 15 m en el intervalo $t = 1.0$ s a $t = 2.0$ s.

2.6 Un guepardo agazapado en un arbusto ataca a un antílope. Los animales no están a la misma escala que el eje.



ActivPhysics Online

1.1 Análisis del movimiento usando diagramas

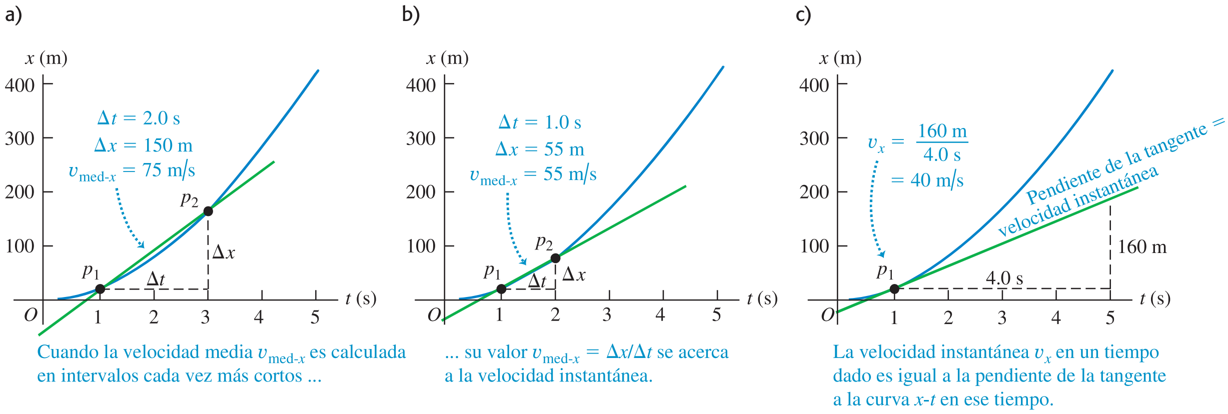
Obtención de la velocidad en una gráfica *x-t*

La velocidad de una partícula también puede obtenerse de la gráfica de la posición de la partícula en función del tiempo. Suponga que queremos conocer la velocidad del auto de la figura 2.1 en P_1. En la figura 2.1, conforme P_2 se acerca a P_1, el punto p_2 en la gráfica *x-t* de las figuras 2.7a y 2.7b se acerca al punto p_1 y la velocidad media se calcula en intervalos Δt cada vez más cortos. En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, ilustrado en la figura 2.7c, la pendiente de la línea p_1p_2 es igual a la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto p_1. *Así, en una gráfica de posición en función del tiempo para movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.*

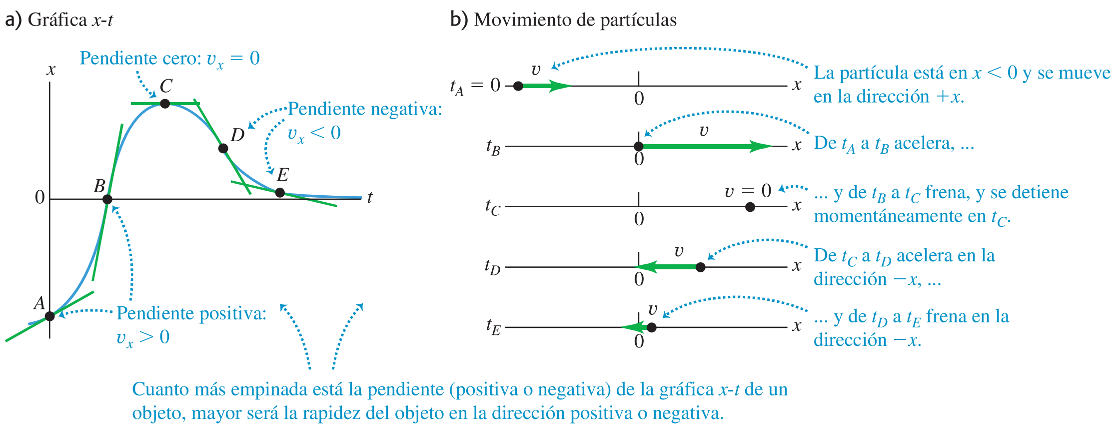
Si la tangente a la curva *x-t* sube hacia la derecha, como en la figura 2.7c, entonces su pendiente es positiva, la velocidad es positiva y el movimiento es en la dirección $+x$. Si la tangente baja hacia la derecha, la pendiente de la gráfica *x-t* y la velocidad son negativas, y el movimiento es en la dirección $-x$. Cuando la tangente es horizontal, la pendiente y la velocidad son cero. La figura 2.8 ilustra las tres posibilidades.

La figura 2.8 muestra el movimiento de una partícula en dos formas: como *a*) una gráfica *x-t* y como *b*) un **diagrama de movimiento** que muestra la posición de la partícula en diversos instantes, como cuadros de un filme o video del movimiento de la

2.7 Uso de una gráfica *x-t* al ir de **a)**, **b)** velocidad media a **c)** velocidad instantánea v_x. En **c)** obtenemos la pendiente de la tangente a la curva *x-t* dividiendo cualquier intervalo vertical (con unidades de distancia) a lo largo de la tangente entre el intervalo horizontal correspondiente (con unidades de tiempo).



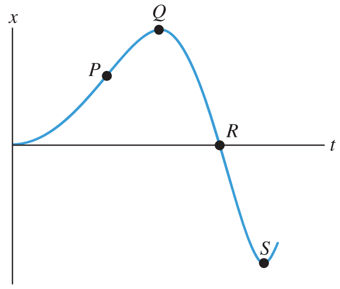
2.8 **a)** Gráfica *x-t* del movimiento de una partícula dada. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la velocidad en ese punto. **b)** Diagrama de movimiento que muestra la posición y velocidad de la partícula en los cinco instantes rotulados en el diagrama *x-t*.



partícula, junto con flechas que representan la velocidad de la partícula en cada instante. En este capítulo, usaremos tanto las gráficas *x-t* como los diagramas de movimiento para ayudarle a entender el movimiento. Le recomendamos *dibujar* una gráfica *x-t* y un diagrama de movimiento como parte de la resolución de cualquier problema que implique movimiento.

Evalúe su comprensión de la sección 2.2 La figura 2.9 es una gráfica *x-t* del movimiento de una partícula. *a*) Ordene los valores de la velocidad v_x de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más positivo al más negativo. *b*) ¿En qué puntos v_x es positiva? *c*) ¿En cuáles puntos v_x es negativa? *d*) ¿En cuáles es cero? *e*) Ordene los valores de la *rapidez* de la partícula en los puntos *P*, *Q*, *R* y *S* del más rápido al más lento.

2.9 Una gráfica *x-t* para una partícula.



2.3 Aceleración media e instantánea

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la *aceleración* describe la tasa de cambio de velocidad con el tiempo. Al igual que la velocidad, la aceleración es una cantidad vectorial. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como a disminuirla.

Aceleración media

Consideremos otra vez el movimiento de una partícula en el eje *x*. Suponga que, en el tiempo t_1, la partícula está en el punto P_1 y tiene una componente *x* de velocidad (instantánea) v_{1x}, y en un instante posterior t_2 está en P_2 y tiene una componente *x* de velocidad v_{2x}. Así, la componente *x* de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una cantidad vectorial cuya componente *x* es $a_{\text{med-}x}$ igual a Δv_x, el cambio en la componente *x* de la velocidad, dividido entre el intervalo de tiempo Δt:

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \text{(aceleración media, movimiento rectilíneo)} \tag{2.4}$$

En el movimiento rectilíneo a lo largo del eje *x*, por lo general llamaremos $v_{\text{med-}x}$ a la aceleración media. (Veremos otras componentes del vector de aceleración media en el capítulo 3.)

Si expresamos la velocidad en metros por segundo y el tiempo en segundos, la aceleración media está en metros por segundo por segundo, o bien (m/s)/s. Esto suele escribirse como m/s^2 y se lee “metros por segundo al cuadrado”.

CUIDADO **Aceleración contra velocidad** ¡No confunda aceleración con velocidad! La velocidad describe el cambio de la posición de un objeto con el tiempo; nos indica con qué rapidez y en qué dirección se mueve el objeto. La aceleración describe cómo cambia la velocidad con el tiempo; es decir, nos dice cómo cambian la rapidez y la dirección del movimiento. Podría ser útil recordar la frase “aceleración es a velocidad lo que velocidad es a posición”. También ayudaría imaginarse a usted mismo yendo en un automóvil con el cuerpo en movimiento. Si el auto acelera hacia delante y aumenta su rapidez, usted se sentiría empujado hacia atrás hacia su asiento; si acelera hacia atrás y disminuye su rapidez, se sentiría empujado hacia delante. Si la velocidad es constante y no hay aceleración, no sentiría sensación alguna. (Analizaremos la causa de estas sensaciones en el capítulo 4.)

Ejemplo 2.2 Aceleración media

Una astronauta sale de una nave espacial en órbita para probar una unidad personal de maniobras. Mientras se mueve en línea recta, su compañera a bordo mide su velocidad cada 2.0 s a partir del instante $t = 1.0$ s:

t	v_x	t	v_x
1.0 s	0.8 m/s	9.0 s	−0.4 m/s
3.0 s	1.2 m/s	11.0 s	−1.0 m/s
5.0 s	1.6 m/s	13.0 s	−1.6 m/s
7.0 s	1.2 m/s	15.0 s	−0.8 m/s

Calcule la aceleración media y diga si la rapidez de la astronauta aumenta o disminuye para cada uno de estos intervalos: *a*) $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s; *b*) $t_1 = 5.0$ s a $t_2 = 7.0$ s; *c*) $t_1 = 9.0$ s a $t_2 = 11.0$ s; *d*) $t_1 = 13.0$ s a $t_2 = 15.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Necesitaremos la definición de aceleración media $a_{\text{med-}x}$. Para calcular los cambios en la rapidez, usaremos la idea de que la rapidez v es la magnitud de la velocidad instantánea v_x.

PLANTEAR: La figura 2.10 muestra nuestras gráficas. Usamos la ecuación (2.4) para determinar el valor de $a_{\text{med-}x}$ a partir del cambio de *velocidad* en cada intervalo de tiempo.

EJECUTAR: En la parte superior de la figura 2.10, graficamos la velocidad x en función del tiempo. En esta gráfica v_x-t, la pendiente de la línea que conecta los puntos inicial y final de cada intervalo es la aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ para ese intervalo. En la parte inferior de la figura 2.10, graficamos los valores de $a_{\text{med-}x}$. Obtenemos:

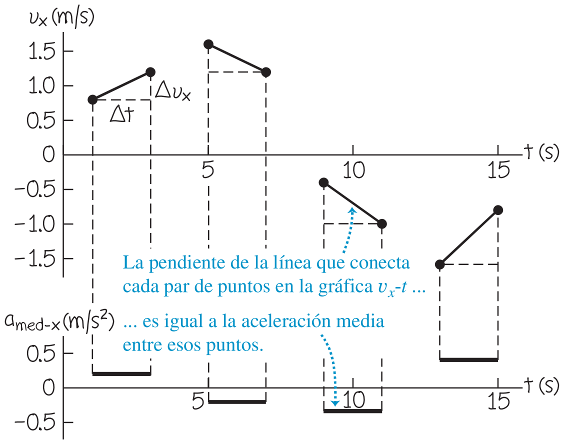
a) $a_{\text{med-}x} = (1.2 \text{ m/s} - 0.8 \text{ m/s})/(3.0 \text{ s} - 1.0 \text{ s}) = 0.2 \text{ m/s}^2$. La rapidez (magnitud de la velocidad instantánea) aumenta de 0.8 m/s a 1.2 m/s.

b) $a_{\text{med-}x} = (1.2 \text{ m/s} - 1.6 \text{ m/s})/(7.0 \text{ s} - 5.0 \text{ s}) = -0.2 \text{ m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 1.2 m/s.

c) $a_{\text{med-}x} = [-1.0 \text{ m/s} - (-0.4 \text{ m/s})]/(11.0 \text{ s} - 9.0 \text{ s}) = -0.3 \text{ m/s}^2$. La rapidez aumenta de 0.4 m/s a 1.0 m/s.

d) $a_{\text{med-}x} = [-0.8 \text{ m/s} - (-1.6 \text{ m/s})]/(15.0 \text{ s} - 13.0 \text{ s}) = 0.4 \text{ m/s}^2$. La rapidez disminuye de 1.6 m/s a 0.8 m/s.

2.10 Nuestra gráfica de velocidad contra tiempo (arriba) y aceleración media contra tiempo (abajo) para la astronauta.



EVALUAR: Nuestro resultado indica que cuando la aceleración tiene la *misma* dirección (el mismo signo algebraico) que la velocidad inicial, como en los intervalos *a*) y *c*), la astronauta se mueve más rápidamente; cuando tiene la dirección *opuesta* (el signo opuesto) como en los intervalos *b*) y *d*), se frena. De manera que la aceleración positiva significa ir más rápido si la velocidad x es positiva [intervalo *a*)], pero frenar si la velocidad x es negativa [intervalo *d*)]. Asimismo, aceleración negativa implica ir más rápido si la velocidad x es negativa [intervalo *c*)], pero frenar si la velocidad x es positiva [intervalo *b*)].

Aceleración instantánea

Ya podemos definir la **aceleración instantánea** con el mismo procedimiento que seguimos para la velocidad instantánea. Como ejemplo, suponga que un piloto de carreras acaba de entrar en una recta como se muestra en la figura 2.11. Para definir la aceleración instantánea en P_1, tomamos el segundo punto P_2 en la figura 2.11 cada vez más cerca de P_1, de modo que la aceleración media se calcule en intervalos cada vez más cortos. *La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero*. En el lenguaje del cálculo, *la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo*. Así,

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{(aceleración instantánea, movimiento rectilíneo)} \tag{2.5}$$

2.11 Vehículo de Grand Prix en dos puntos de la recta.

Observe que la ecuación (2.5) es realmente la definición de la componente x del vector de aceleración o la **aceleración instantánea**; en el movimiento rectilíneo, las demás componentes de este vector son cero. A partir de aquí, al hablar de "aceleración" nos referiremos siempre a la aceleración instantánea, no a la aceleración media.

Ejemplo 2.3 Aceleraciones media e instantánea

Suponga que la velocidad v_x del auto en la figura 2.11 en el tiempo t está dada por

$$v_x = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2$$

a) Calcule el cambio de velocidad del auto en el intervalo entre $t_1 = 1.0$ s y $t_2 = 3.0$ s. *b*) Calcule la aceleración media en este intervalo. *c*) Obtenga la aceleración instantánea en $t_1 = 1.0$ s tomando Δt primero como 0.1 s, después como 0.01 s y luego como 0.001 s. *d*) Deduzca una expresión para la aceleración instantánea en cualquier instante y úsela para obtener la aceleración en $t = 1.0$ s y $t = 3.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es similar al ejemplo 2.1 de la sección 2.2. (Recomendamos repasar ahora ese ejemplo.) Ahí, calculamos la velocidad media en intervalos cada vez más cortos considerando el cambio en el desplazamiento, y obtuvimos la velocidad instantánea diferenciando la posición en función del tiempo. En este ejemplo, determinaremos la aceleración *media* considerando cambios de velocidad en un intervalo de tiempo. Asimismo, obtendremos la aceleración *instantánea* diferenciando la velocidad en función del tiempo.

PLANTEAR: Usaremos la ecuación (2.4) de la aceleración media y la ecuación (2.5) de la aceleración instantánea.

EJECUTAR: a) Primero obtenemos la velocidad en cada instante sustituyendo cada valor de t en la ecuación. En el instante $t_1 = 1.0$ s,

$$v_{1x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s})^2 = 60.5\ \text{m/s}$$

En el instante $t_2 = 3.0$ s,

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s})^2 = 64.5\ \text{m/s}$$

El cambio en la velocidad Δv_x es

$$\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x} = 64.5\ \text{m/s} - 60.5\ \text{m/s} = 4.0\ \text{m/s}$$

El intervalo de tiempo es $\Delta t = 3.0\ \text{s} - 1.0\ \text{s} = 2.0$ s.

b) La aceleración media durante este intervalo es

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{4.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s}} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

Durante el intervalo de $t_1 = 1.0$ s a $t_2 = 3.0$ s, la velocidad y la aceleración media tienen el mismo signo (positivo en este caso) y el auto acelera.

c) Cuando $\Delta t = 0.1$ s, $t_2 = 1.1$ s y obtenemos

$$v_{2x} = 60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)(1.1\ \text{s})^2 = 60.605\ \text{m/s}$$
$$\Delta v_x = 0.105\ \text{m/s}$$
$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{0.105\ \text{m/s}}{0.1\ \text{s}} = 1.05\ \text{m/s}^2$$

Repita este modelo con $\Delta t = 0.01$ s y $\Delta t = 0.001$ s; los resultados son $a_{\text{med-}x} = 1.005\ \text{m/s}^2$ y $a_{\text{med-}x} = 1.0005\ \text{m/s}^2$, respectivamente. Al reducirse Δt, la aceleración media se acerca a $1.0\ \text{m/s}^2$, por lo que concluimos que la aceleración instantánea en $t = 1.0$ s es $1.0\ \text{m/s}^2$.

d) La aceleración instantánea es $a_x = dv_x/dt$. La derivada de una constante es cero y la derivada de t^2 es $2t$. Con esto, obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}[60\ \text{m/s} + (0.50\ \text{m/s}^3)t^2]$$
$$= (0.50\ \text{m/s}^3)(2t) = (1.0\ \text{m/s}^3)t$$

Cuando $t = 1.0$ s,

$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(1.0\ \text{s}) = 1.0\ \text{m/s}^2$$

Cuando $t = 3.0$ s,

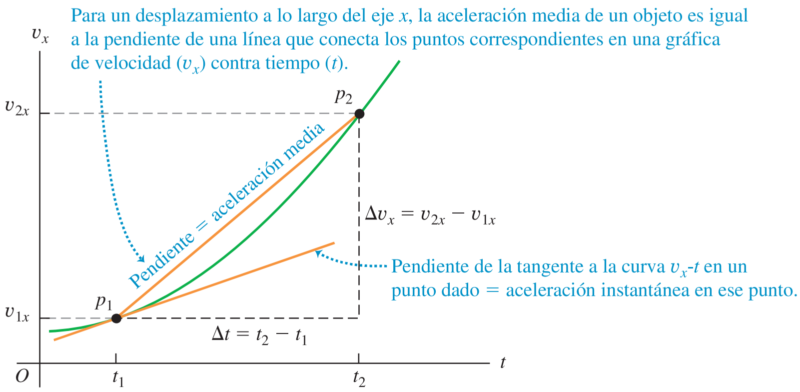
$$a_x = (1.0\ \text{m/s}^3)(3.0\ \text{s}) = 3.0\ \text{m/s}^2$$

EVALUAR: Observe que ninguno de los valores que obtuvimos en el inciso *d*) es igual a la aceleración media obtenida en *b*). La aceleración instantánea del auto varía con el tiempo. La tasa de cambio de la aceleración con el tiempo se suele denominar el "tirón".

Obtención de la aceleración en una gráfica v_x-t o una gráfica x-t

En la sección 2.2 interpretamos las velocidades media e instantánea en términos de la pendiente de una gráfica de posición contra tiempo. Igualmente, podemos entender mejor las aceleraciones media e instantánea graficando la velocidad instantánea v_x en el eje vertical y el tiempo t en el eje horizontal, es decir, usando una **gráfica v_x-t** (figura 2.12). Los puntos rotulados p_1 y p_2 corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la figura 2.11. La aceleración media $a_{\text{med-}x} = \Delta v_x/\Delta t$ durante este intervalo es la pendiente de la línea p_1p_2. Al acercarse P_2 a P_1 en la figura 2.11, p_2 se acerca a p_1 en la gráfica v_x-t de la figura 2.12, y la pendiente de la línea p_1p_2 se acerca a la pendiente de la tangente a la curva en el punto p_1. Así, *en una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto.* En la figura 2.12, las tangentes trazadas en

2.12 Gráfica v_x-t del movimiento de la figura 2.11.



diferentes puntos en la curva tienen pendientes diferentes, de manera que la aceleración instantánea varía con el tiempo.

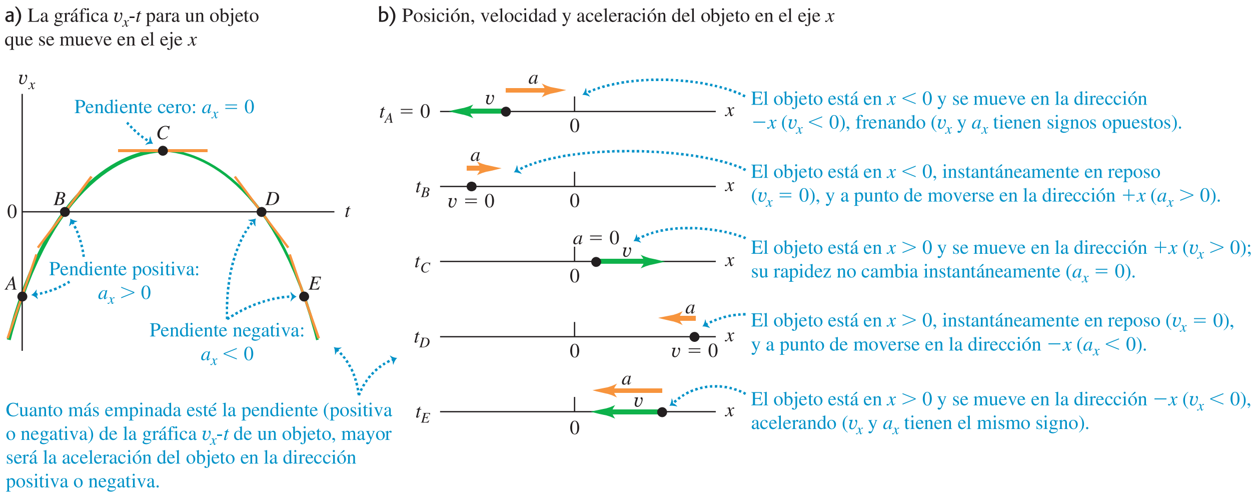
CUIDADO **Los signos de aceleración y velocidad** En sí mismo, el signo algebraico de la aceleración *no* nos indica si el cuerpo está acelerando o frenando; hay que comparar los signos de la velocidad y la aceleración. Si v_x y a_x tienen el *mismo* signo, el cuerpo está acelerando; si ambas son positivas, el cuerpo se mueve en la dirección positiva con rapidez creciente. Si ambas son negativas, el cuerpo se mueve en la dirección negativa con velocidad cada vez más negativa, y la rapidez aumenta nuevamente. Si v_x y a_x tienen signos *opuestos*, el cuerpo está frenando. Si v_x es positiva y a_x negativa, el cuerpo se mueve en dirección positiva con rapidez decreciente; si v_x es negativa y a_x positiva, el cuerpo se mueve en dirección negativa con una velocidad cada vez menos negativa, y nuevamente está frenando. La figura 2.13 ilustra algunas de tales posibilidades.

Frecuentemente llamamos "desaceleración" a una reducción de rapidez. Dado que esto puede implicar a_x positiva o negativa, dependiendo del signo de v_x, evitaremos este término.

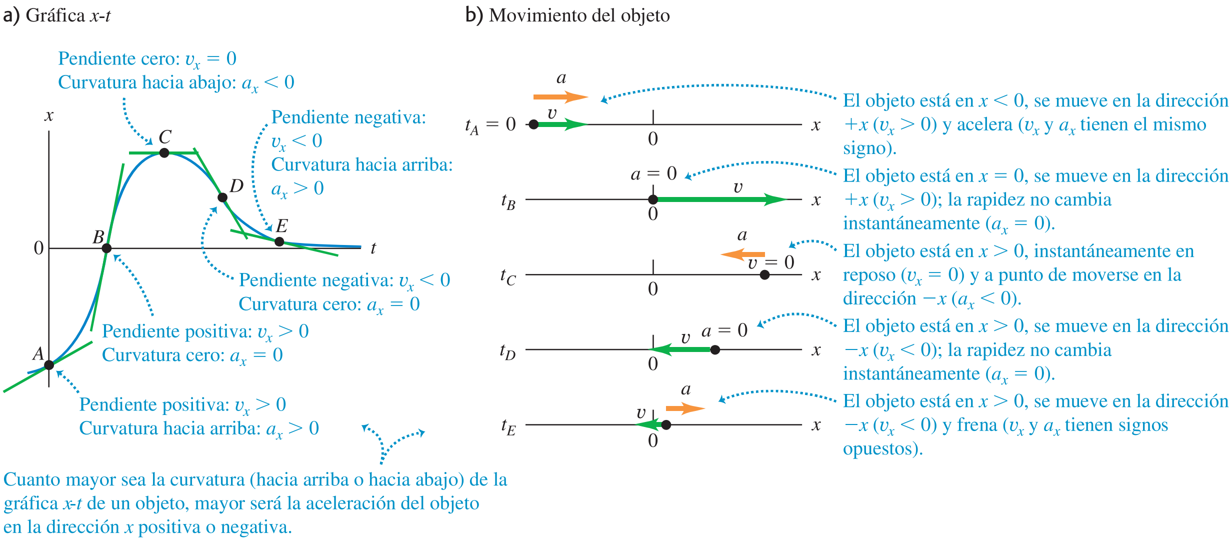
También podemos conocer la aceleración de un cuerpo a partir de una gráfica de su *posición* contra tiempo. Dado que $a_x = dv_x/dt$ y $v_x = dx/dt$, escribimos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.6}$$

2.13 a) Gráfica v_x-t del movimiento de una partícula diferente de la que se muestra en la figura 2.8. La pendiente de la tangente en cualquier punto es igual a la aceleración en ese punto. b) Diagrama de movimiento que indica la posición, velocidad y aceleración de la partícula en los instantes rotulados en la gráfica v_x-t. Las posiciones son congruentes con la gráfica v_x-t; por ejemplo, de t_A a t_B la velocidad es negativa, así que en t_B la partícula está en un valor más negativo de x que en t_A.



2.14 a) La misma gráfica x-t de la figura 2.8a. La velocidad es igual a la *pendiente* de la gráfica, y la aceleración está dada por *su concavidad* o *curvatura*. b) Diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de la partícula en cada uno de los instantes rotulados en la gráfica x-t.



Es decir, a_x es la segunda derivada de x con respecto a t. La segunda derivada de cualquier función se relaciona directamente con la *concavidad* o *curvatura* de la gráfica de la función. En un punto donde la curva x-t sea cóncava hacia arriba (curvada hacia arriba), la aceleración es positiva y v_x aumenta; donde la curva x-t sea cóncava hacia abajo, la aceleración es negativa y v_x disminuye. Donde la gráfica x-t no tenga curvatura, como en un punto de inflexión, la aceleración es cero y la velocidad es constante. Estas tres posibilidades se ilustran en la figura 2.14.

Examinar la curvatura de una gráfica x-t es una manera sencilla de decidir qué *signo* tiene la aceleración. Esta técnica es menos útil para determinar valores numéricos de la aceleración, ya que es difícil medir con exactitud la curvatura de una gráfica.

Evalúe su comprensión de la sección 2.3 Observe otra vez la gráfica x-t de la figura 2.9 al final de la sección 2.2. *a)* ¿En cuál de los puntos P, Q, R y S la aceleración a_x es positiva? *b)* ¿En cuáles es negativa? *c)* ¿En cuáles parece ser cero? *d)* En cada punto decida si la rapidez aumenta, disminuye o se mantiene constante.

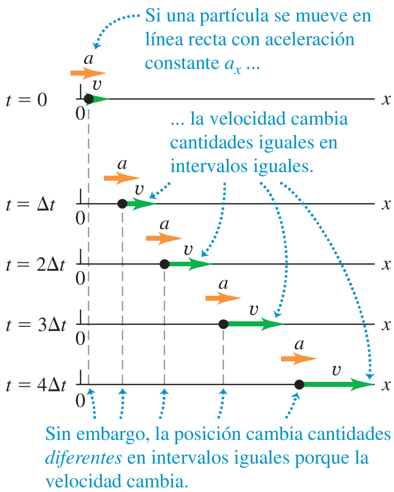
MP

2.4 Movimiento con aceleración constante

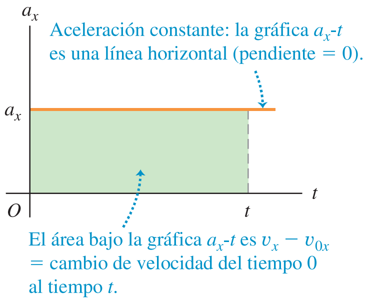
El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración *constante*. En este caso, la velocidad cambia al mismo ritmo todo el tiempo. Se trata de una situación muy especial, aun cuando ocurre a menudo en la naturaleza; un cuerpo que cae tiene aceleración constante si los efectos del aire no son importantes. Lo mismo sucede con un cuerpo que se desliza por una pendiente o sobre una superficie horizontal áspera. El movimiento rectilíneo con aceleración casi constante se da también en la tecnología, como cuando un jet de combate es lanzado con catapulta desde la cubierta de un portaviones.

La figura 2.15 es un diagrama de movimiento que muestra la posición, velocidad y aceleración de una partícula que se mueve con aceleración constante. Las figuras 2.16 y 2.17 representan este movimiento con gráficas. Puesto que la aceleración a_x es constante, la **gráfica a_x-t** (aceleración contra tiempo) de la figura 2.16 es una línea horizontal. La gráfica de velocidad contra tiempo, v_x-t, tiene *pendiente* constante porque la aceleración es constante; por lo tanto, es una línea recta (figura 2.17).

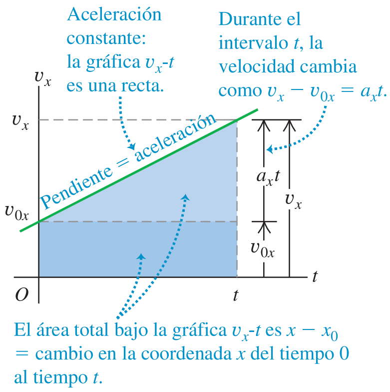
2.15 Diagrama de movimiento para una partícula que se mueve en línea recta en la dirección $+x$ con aceleración positiva constante a_x. Se muestran la posición, velocidad y aceleración en cinco instantes equiespaciados.



2.16 Gráfica aceleración-tiempo (a_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x.



2.17 Gráfica velocidad-tiempo (v_x-t) para movimiento rectilíneo con aceleración positiva constante a_x. La velocidad inicial v_{0x} también es positiva en este caso.



Cuando la aceleración a_x es constante, la aceleración media $a_{\text{med-}x}$ para cualquier intervalo es a_x. Esto vuelve sencillo derivar las ecuaciones para la posición x y la velocidad v_x como funciones del tiempo. Para encontrar una expresión para v_x primero sustituimos $a_{\text{med-}x}$ por a_x en la ecuación (2.4):

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \tag{2.7}$$

Sean ahora $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante posterior t. Simbolizamos con v_{0x} la componente x de la velocidad en el instante inicial $t = 0$; la componente x de la velocidad en el instante posterior t es v_x. Entonces, la ecuación (2.7) se convierte en

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \text{o}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.8}$$

Podemos interpretar la ecuación como sigue. La aceleración a_x es la tasa constante de cambio de velocidad, es decir, el cambio en la velocidad por unidad de tiempo. El término $a_x t$ es el producto del cambio en la velocidad por unidad de tiempo, a_x, y el intervalo de tiempo t; por lo tanto, es el cambio *total* de la velocidad desde el instante inicial $t = 0$ hasta un instante posterior t. La velocidad v_x en cualquier instante t es entonces la velocidad inicial v_{0x} (en $t = 0$) más el cambio en la velocidad $a_x t$ (véase la figura 2.17).

Otra interpretación de la ecuación (2.8) es que el cambio de velocidad $v_x - v_{0x}$ de la partícula entre $t = 0$ y un tiempo posterior t es igual al *área* bajo la gráfica a_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.16, el área bajo la gráfica a_x-t es el rectángulo verde con lado vertical a_x y lado horizontal t. El área del rectángulo es $a_x t$, que por la ecuación (2.8) es igual al cambio en velocidad $v_x - v_{0x}$. En la sección 2.6 veremos que aun cuando la aceleración no sea constante, el cambio de velocidad durante un intervalo es igual al área bajo la curva a_x-t, aunque en tal caso la ecuación (2.8) no es válida.

Ahora deduciremos una ecuación para la posición x en función del tiempo cuando la aceleración es constante. Para ello, usamos dos expresiones distintas para la velocidad media $a_{\text{med-}x}$ en el intervalo de $t = 0$ a cualquier t posterior. La primera proviene de la definición de $v_{\text{med-}x}$, ecuación (2.2), que se cumple sea constante o no la aceleración. La *posición inicial* es la posición en $t = 0$, denotada con x_0. La posición en el t posterior es simplemente x. Así, para el intervalo $\Delta t = t - 0$ y el desplazamiento $\Delta x = x - x_0$, la ecuación (2.2) da

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x - x_0}{t} \tag{2.9}$$

También podemos obtener otra expresión para $v_{\text{med-}x}$ que sea válida sólo si la aceleración es constante, de modo que la gráfica v_x-t sea una línea recta (como en la figura 2.17) y la velocidad cambie a ritmo constante. En este caso, la velocidad media en cualquier intervalo es sólo el promedio de las velocidades al principio y al final del intervalo. Para el intervalo de 0 a t,

$$v_{\text{med-}x} = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \tag{2.10}$$

(Esto *no* se cumple si la aceleración varía y la gráfica v_x-t es una curva, como en la figura 2.13.) También sabemos que, con aceleración constante, la velocidad v_x en un instante t está dada por la ecuación (2.8). Sustituyendo esa expresión por v_x en la ecuación (2.10),

$$\begin{aligned} v_{\text{med-}x} &= \frac{1}{2}(v_{0x} + v_{0x} + a_x t) \\ &= v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \end{aligned} \tag{2.11}$$

ActivPhysics ONLINE

1.1 Análisis del movimiento con diagramas
1.2 Análisis del movimiento con gráficas
1.3 Predicción de un movimiento con base en gráficas
1.4 Predicción de un movimiento con base en ecuaciones
1.5 Estrategias para resolver problemas de cinemática
1.6 Esquiador en competencia de descenso

Por último, igualamos las ecuaciones (2.9) y (2.11) y simplificamos el resultado:

$$v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{x - x_0}{t} \qquad \text{o}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.12)$$

Esta ecuación (2.12) indica que si, en el instante $t = 0$, una partícula está en x_0 y tiene velocidad v_{0x}, su nueva posición x en un t posterior es la suma de tres términos: su posición inicial x_0, más la distancia $v_{0x}t$ que recorrería si su velocidad fuera constante, y una distancia adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ causada por el cambio de velocidad.

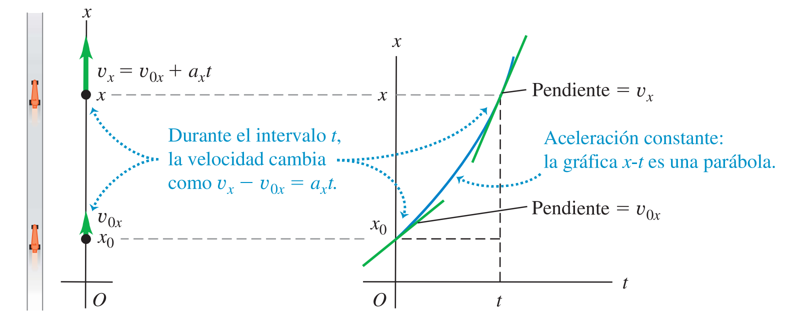
Una gráfica de la ecuación (2.12), es decir, una gráfica x-t para movimiento con aceleración constante (figura 2.18a), siempre es una *parábola*. La figura 2.18b muestra tal gráfica. La curva interseca el eje vertical (x) en x_0, la posición en $t = 0$. La pendiente de la tangente en $t = 0$ es v_{0x}, la velocidad inicial, y la pendiente de la tangente en cualquier t es la velocidad v_x en ese instante. La pendiente y la velocidad aumentan continuamente, así que la aceleración a_x es positiva. Usted puede también ver esto porque la gráfica de la figura 2.18b es cóncava hacia arriba (se curva hacia arriba). Si a_x es negativa, la gráfica x-t es una parábola cóncava hacia abajo (tiene curvatura hacia abajo).

Si hay aceleración cero, la gráfica x-t es una recta; si hay una aceleración constante, el término adicional $\frac{1}{2}a_x t^2$ en la ecuación (2.12) para x en función de t curva la gráfica en una parábola (figura 2.19*a*). Podemos analizar la gráfica v_x-t de la misma forma. Si hay aceleración cero, esta gráfica es una línea horizontal (la velocidad es constante); sumar una aceleración constante da una pendiente para la gráfica v_x-t (figura 2.19b).

Activ Physics ONLINE

a) Un auto de carreras se mueve en la dirección x con aceleración constante

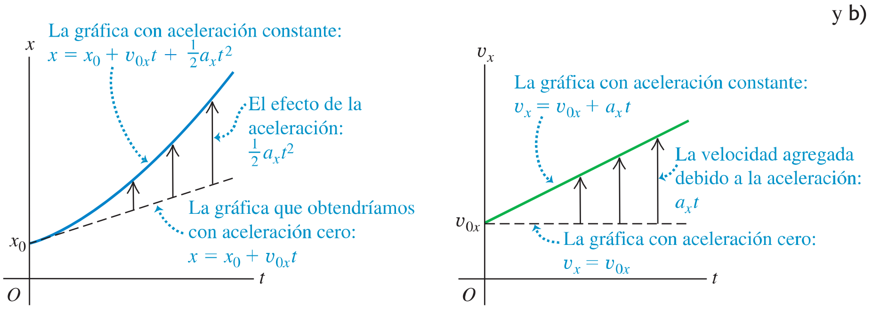
b) La gráfica x-t



2.18 a) Movimiento rectilíneo con aceleración constante. b) Una gráfica de posición contra tiempo (x-t) para este movimiento (el mismo movimiento que se muestra en las figuras 2.15, 2.16 y 2.17). En este caso, la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} y la aceleración a_x son todas positivas.

a) Una gráfica x-t para un objeto que se mueve con aceleración constante positiva

b) La gráfica v_x-t para el mismo objeto



2.19 a) Cómo una aceleración constante influye en a) la gráfica x-t y b) la gráfica v_x-t de un cuerpo.

MP

Así como el cambio de velocidad de la partícula es igual al área bajo la gráfica a_x-t, el desplazamiento (es decir, el cambio de posición) es igual al área bajo la gráfica v_x-t. Específicamente, el desplazamiento $x - x_0$ de la partícula entre $t = 0$ y cualquier instante t posterior es igual al área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. En la figura 2.17 el área bajo la gráfica se dividió en un rectángulo oscuro con lado vertical v_{0x}, lado horizontal t y un triángulo rectángulo claro con lado vertical $a_x t$ y lado horizontal t. El área del rectángulo es $v_{0x}t$, y la del triángulo, $\frac{1}{2}(a_x t)(t) = \frac{1}{2}a_x t^2$, así que el área total bajo la curva v_x-t es

$$x - x_0 = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

lo que concuerda con la ecuación (2.12).

El desplazamiento durante un intervalo siempre puede obtenerse del área bajo la curva v_x-t, incluso si la aceleración *no* es constante, aunque en tal caso la ecuación (2.12) no sería válida. (Demostraremos esto en la sección 2.6.)

Podemos comprobar si las ecuaciones (2.8) y (2.12) son congruentes con el supuesto de aceleración constante derivando la ecuación (2.12). Obtenemos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_{0x} + a_x t$$

que es la ecuación (2.8). Diferenciando otra vez, tenemos simplemente

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x$$

que concuerda con la definición de aceleración instantánea.

Con frecuencia es útil tener una relación entre posición, velocidad y aceleración (constante) que no incluya el tiempo. Para obtenerla, despejamos t en la ecuación (2.8), sustituimos la expresión resultante en la ecuación (2.12) y simplificamos:

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

$$x = x_0 + v_{0x}\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right) + \tfrac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x}\right)^2$$

Transferimos el término x_0 al miembro izquierdo y multiplicamos la ecuación por $2a_x$:

$$2a_x(x - x_0) = 2v_{0x}v_x - 2v_{0x}^{\,2} + v_x^{\,2} - 2v_{0x}v_x + v_{0x}^{\,2}$$

Por último, al simplificar obtenemos

$$v_x^{\,2} = v_{0x}^{\,2} + 2a_x(x - x_0) \qquad \text{(sólo con aceleración constante)} \qquad (2.13)$$

Podemos obtener una relación más útil igualando dos expresiones para $v_{\text{med-}x}$, ecuaciones (2.9) y (2.10), y multiplicando por t. Al hacerlo, obtenemos

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right)t \qquad \text{(sólo aceleración constante)} \qquad (2.14)$$

Observe que la ecuación (2.14) no contiene la aceleración a_x. Esta ecuación es útil cuando a_x es constante pero se desconoce su valor.

Las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) son las *ecuaciones del movimiento con aceleración constante*. Con ellas, podemos resolver *cualquier* problema que implique movimiento rectilíneo de una partícula con aceleración constante.

En el caso específico de movimiento con aceleración constante ilustrado en la figura 2.15 y graficado en las figuras 2.16, 2.17 y 2.18, los valores de x_0, v_{0x} y a_x son positivos. Vuelva a dibujar las figuras para los casos en que una, dos o las tres cantidades sean negativas.

Un caso especial de movimiento con aceleración constante se da cuando la aceleración es *cero*. La velocidad es entonces constante, y las ecuaciones del movimiento se convierten sencillamente en

$$v_x = v_{0x} = \text{constante}$$
$$x = x_0 + v_x t$$

Estrategia para resolver problemas 2.1 Movimiento con aceleración constante

IDENTIFICAR *los conceptos pertinentes*: En casi todos los problemas de movimiento rectilíneo, usted podrá usar las ecuaciones de aceleración constante, aunque a veces se topará con situaciones en que la aceleración *no es* constante. En tales casos, necesitará otra estrategia (véase la sección 2.6).

PLANTEAR *el problema* siguiendo estos pasos:

1. Primero decida dónde está el origen de las coordenadas y cuál dirección es positiva. A menudo lo más sencillo es colocar la partícula en el origen en $t = 0$; así, $x_0 = 0$. Siempre es útil un diagrama de movimiento que muestre las coordenadas y algunas posiciones posteriores de la partícula.
2. Recuerde que elegir la dirección positiva del eje determina automáticamente las direcciones positivas de la velocidad y la aceleración. Si x es positiva a la derecha del origen, v_x y a_x también serán positivas hacia la derecha.
3. Replantee el problema con palabras y luego traduzca su descripción a símbolos y ecuaciones. ¿*Cuándo* llega la partícula a cierto punto (es decir, cuánto vale t)? ¿*Dónde* está la partícula cuando tiene cierta velocidad (esto es, cuánto vale x cuando v_x tiene ese valor)? El ejemplo 2.4 pregunta "¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?" En símbolos, esto indica "¿Cuánto vale x cuando $v_x = 25$ m/s?"
4. Haga una lista de las cantidades como x, x_0, v_x, v_{0x}, a_x y t. En general, algunas serán conocidas y otras no. Escriba los valores de las conocidas y decida cuáles de las variables son las incógnitas. No pase por alto información implícita. Por ejemplo, "un automóvil está parado ante un semáforo" implica $v_{0x} = 0$.

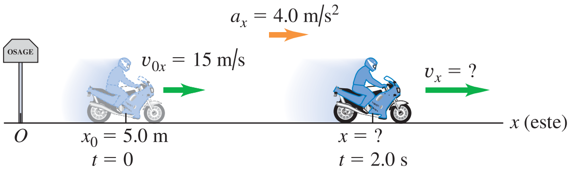
EJECUTAR *la solución:* Elija una de las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) que contenga sólo una de las incógnitas. Despeje la incógnita usando sólo símbolos, sustituya los valores conocidos y calcule el valor de la incógnita. A veces tendrá que resolver dos ecuaciones simultáneas con dos incógnitas.

EVALUAR *la respuesta:* Examine sus resultados para ver si son lógicos. ¿Están dentro del intervalo general de valores esperado?

Ejemplo 2.4 Cálculos de aceleración constante

Un motociclista que viaja al este cruza una pequeña ciudad de Iowa y acelera apenas pasa el letrero que marca el límite de la ciudad (figura 2.20). Su aceleración constante es de 4.0 m/s². En $t = 0$, está a 5.0 m al este del letrero, moviéndose al este a 15 m/s. *a*) Calcule su posición y velocidad en $t = 2.0$ s. *b*) ¿Dónde está el motociclista cuando su velocidad es de 25 m/s?

2.20 Un motociclista que viaja con aceleración constante.



SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El enunciado del problema nos dice que la aceleración es constante, así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante.

PLANTEAR: Tomamos el letrero como origen de coordenadas ($x = 0$) y decidimos que el eje $+x$ apunta al este (figura 2.20, que también es un diagrama de movimiento). En $t = 0$, la posición inicial es $x_0 = 5.0$ m y la velocidad inicial es $v_{0x} = 15$ m/s. La aceleración constante es $a_x = 4.0$ m/s². Las variables desconocidas en el inciso *a*) son los valores de la posición x y la velocidad v_x en el instante posterior $t = 2.0$ s; la incógnita en el inciso *b*) es el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s.

continúa

EJECUTAR: *a*) Podemos hallar la posición x en $t = 2.0$ s usando la ecuación (2.12) que da la posición x en función del tiempo t:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2$$
$$= 43\text{ m}$$

Podemos hallar la velocidad v_x en ese instante con la ecuación (2.8), que da la velocidad v_x en función del tiempo t:

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$
$$= 15\text{ m/s} + (4.0\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = 23\text{ m/s}$$

b) Queremos encontrar el valor de x cuando $v_x = 25$ m/s, pero no sabemos el momento en que el motociclista lleva tal velocidad. Por lo tanto, utilizamos la ecuación (2.13), que incluye x, v_x y a_x pero no incluye t:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$$

Despejando x y sustituyendo los valores conocidos, obtenemos

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$
$$= 5.0\text{ m} + \frac{(25\text{ m/s})^2 - (15\text{ m/s})^2}{2(4.0\text{ m/s}^2)}$$
$$= 55\text{ m}$$

Un método alterno aunque más largo para la mima respuesta sería usar la ecuación (2.8) para averiguar primero en qué instante $v_x = 25$ m/s:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \text{así que}$$
$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} = \frac{25\text{ m/s} - 15\text{ m/s}}{4.0\text{ m/s}^2} = 2.5\text{ s}$$

Dado el tiempo t, podemos calcular x usando la ecuación (2.12):

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$= 5.0\text{ m} + (15\text{ m/s})(2.5\text{ s}) + \frac{1}{2}(4.0\text{ m/s}^2)(2.5\text{ s})^2$$
$$= 55\text{ m}$$

EVALUAR: ¿Son lógicos los resultados? Según lo que calculamos en el inciso *a*), el motociclista acelera de 15 m/s (unas 34 mi/h o 54 km/h) a 23 m/s (unas 51 mi/h o 83 km/h) en 2.0 s, mientras recorre una distancia de 38 m (unos 125 ft). Ésta es una aceleración considerable, pero una motocicleta de alto rendimiento bien puede alcanzarla.

Al comparar nuestros resultados del inciso *b*) con los del inciso *a*), notamos que el motociclista alcanza una velocidad $v_x = 25$ m/s en un instante posterior y después de recorrer una distancia mayor, que cuando el motociclista tenía $v_x = 23$ m/s. Esto suena lógico porque el motociclista tiene una aceleración positiva y, por ende, se incrementa su velocidad.

Ejemplo 2.5 Dos cuerpos con diferente aceleración

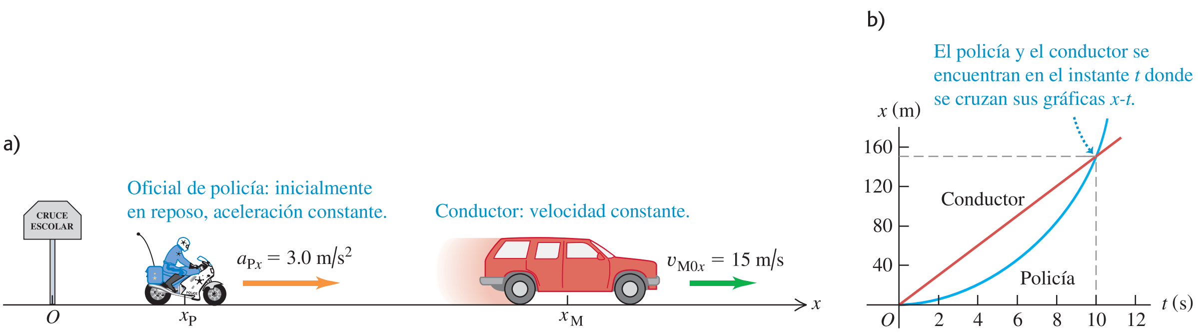
Un conductor que viaja a rapidez constante de 15 m/s (unas 34 mi/h) pasa por un cruce escolar, cuyo límite de velocidad es de 10 m/s (unas 22 mi/h). En ese preciso momento, un oficial de policía en su motocicleta, que está parado en el cruce, arranca para perseguir al infractor, con aceleración constante de 3.0 m/s^2 (figura 2.21a). *a*) ¿Cuánto tiempo pasa antes de que el oficial de policía alcance al infractor? *b*) ¿A qué rapidez va el policía en ese instante? *c*) ¿Qué distancia total habrá recorrido cada vehículo hasta ahí?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El oficial de policía y el conductor se mueven con aceleración constante (cero en el caso del conductor), así que podemos usar las fórmulas que ya dedujimos.

PLANTEAR: Tomamos como origen el cruce, así que $x_0 = 0$ para ambos, y tomamos como dirección positiva a la derecha. Sea x_P la posición del policía y x_M la del conductor en cualquier instante. Las velocidades iniciales son $v_{P0x} = 0$ para el policía y $v_{M0x} = 15$ m/s para el conductor; las respectivas aceleraciones constantes son $a_{Px} = 3.0$ m/s^2 y $a_{Mx} = 0$. Nuestra incógnita en el inciso *a*) es el tiempo tras el cual el policía alcanza al conductor, es decir, cuando los dos vehículos están en la misma posición. En el inciso *b*) nos interesa la rapidez v del policía (la magnitud de su velocidad) en el tiempo obtenido en el inciso *a*). En el inciso *c*) nos interesa la posición de cualesquiera de los vehículos en ese tiempo. Por lo tanto, usaremos la ecuación (2.12) (que relaciona posición y tiempo) en los

2.21 a) Movimiento con aceleración constante que alcanza a movimiento con velocidad constante. b) Gráfica de x contra t para cada vehículo.



incisos *a*) y *c*), y la ecuación (2.8) (que relaciona velocidad y tiempo) en el inciso *b*).

EJECUTAR: *a*) Buscamos el valor del tiempo t cuando el conductor y el policía están en la misma posición. Aplicando la ecuación (2.12), $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$, a cada vehículo, tenemos:

$$x_M = 0 + v_{M0x}t + \frac{1}{2}(0)t^2 = v_{M0x}t$$

$$x_P = 0 + (0)t + \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

Puesto que $x_M = x_P$ en el tiempo t, igualamos las dos expresiones y despejamos t:

$$v_{M0x}t = \frac{1}{2}a_{Px}t^2$$

$$t = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \frac{2v_{M0x}}{a_{Px}} = \frac{2(15\text{ m/s})}{3.0\text{ m/s}^2} = 10\text{ s}$$

Hay *dos* instantes en que los vehículos tienen la misma coordenada x. El primero, $t = 0$, es cuando el conductor pasa por el cruce donde está estacionada la motocicleta. El segundo, $t = 10$ s, es cuando el policía alcanza al conductor.

b) Queremos la magnitud de la velocidad del policía v_{Px} en el instante t obtenido en *a*). Su velocidad en cualquier momento está dada por la ecuación (2.8):

$$v_{Px} = v_{P0x} + a_{Px}t = 0 + (3.0\text{ m/s}^2)t$$

Usando $t = 10$ s, hallamos $v_{Px} = 30$ m/s. Cuando el policía alcanza al conductor, va al doble de su rapidez.

c) En 10 s, la distancia recorrida por el conductor es

$$x_M = v_{M0x}t = (15\text{ m/s})(10\text{ s}) = 150\text{ m}$$

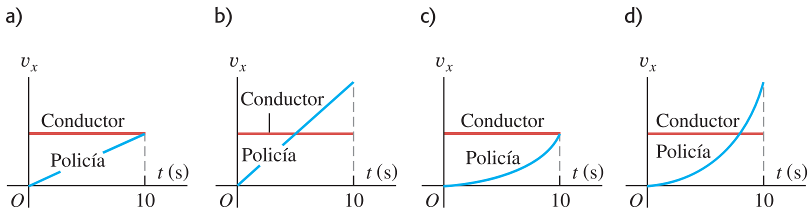
y la distancia que el policía recorre es

$$x_P = \frac{1}{2}a_{Px}t^2 = \frac{1}{2}(3.0\text{ m/s}^2)(10\text{ s})^2 = 150\text{ m}$$

Esto comprueba que cuando el policía alcanza al conductor, ambos han recorrido la misma distancia.

EVALUAR: La figura 2.21b muestra las gráficas de x contra t para ambos vehículos. Aquí vemos también que hay dos instantes en que la posición es la misma (donde se cruzan las gráficas). En ninguno de ellos los dos vehículos tienen la misma velocidad (es decir, las gráficas se cruzan con distinta pendiente). En $t = 0$, el policía está en reposo; en $t = 10$ s, la rapidez del policía es del doble que la del conductor.

Evalúe su comprensión de la sección 2.4 Se muestran cuatro posibles gráficas v_x-t para los dos vehículos del ejemplo 2.5. ¿Cuál es la gráfica correcta?



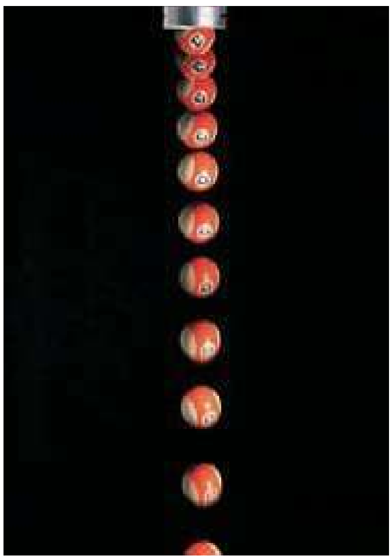
2.5 Cuerpos en caída libre

El ejemplo más conocido de movimiento con aceleración (casi) constante es la caída de un cuerpo bajo la influencia de la atracción gravitacional de la Tierra. Dicho movimiento ha interesado a filósofos y científicos desde la Antigüedad. En el siglo IV a.C., Aristóteles pensaba (erróneamente) que los objetos pesados caían con mayor rapidez que los ligeros, en proporción a su peso. Diecinueve siglos después, Galileo (véase la sección 1.1) afirmó que los cuerpos caían con una aceleración constante e independiente de su peso.

Los experimentos muestran que si puede omitirse el efecto del aire, Galileo está en lo cierto: todos los cuerpos en un lugar específico caen con la misma aceleración hacia abajo, sea cual fuere su tamaño o peso. Si además la distancia de caída es pequeña en comparación con el radio terrestre, y si ignoramos los pequeños efectos debidos a la rotación de la Tierra, la aceleración es constante. El modelo idealizado que surge de tales supuestos se denomina **caída libre**, aunque también incluye el movimiento ascendente. (En el capítulo 3 extenderemos el estudio de la caída libre para incluir el movimiento de proyectiles, que se mueven tanto horizontal como verticalmente.)

La figura 2.22 es una fotografía de una pelota que cae tomada con una lámpara estroboscópica que produce una serie de destellos intensos a intervalos iguales. En cada destello, la película registra la posición de la pelota. Como los intervalos entre

2.22 Fotografía con múltiples destellos de una pelota en caída libre.



ActivPhysics ONLINE

1.7 Se deja caer limonada desde un globo aerostático

1.10 Caída de un saltador con garrocha

destellos son iguales, la velocidad media de la pelota entre dos destellos es proporcional a la distancia entre las imágenes correspondientes en la fotografía. El aumento en las distancias muestra que la velocidad cambia continuamente: la pelota acelera hacia abajo. Al medir cuidadosamente constatamos que el cambio de velocidad es el mismo en cada intervalo, así que la aceleración de la pelota en caída libre es constante.

La aceleración constante de un cuerpo en caída libre se llama **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g. Por lo regular, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2$$
$$= 32 \text{ ft/s}^2 \qquad \text{(valor aproximado cerca de la superficie terrestre)}$$

El valor exacto varía según el lugar, así que normalmente sólo lo daremos con dos cifras significativas. Dado que g es la magnitud de una cantidad vectorial, siempre es *positiva*. En la superficie de la Luna, la aceleración debida a la gravedad se debe a la fuerza de atracción de la Luna, no de la Tierra, y $g = 1.6 \text{ m/s}^2$. Cerca de la superficie del Sol, $g = 270 \text{ m/s}^2$.

En los ejemplos que siguen usamos las ecuaciones para aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4. Sugerimos al lector que repase las estrategias de resolución de problemas de esa sección antes de estudiar estos ejemplos.

Ejemplo 2.6 Moneda en caída libre

Se deja caer una moneda de un euro desde la Torre Inclinada de Pisa; parte del reposo y cae libremente. Calcule su posición y su velocidad después de 1.0, 2.0 y 3.0 s.

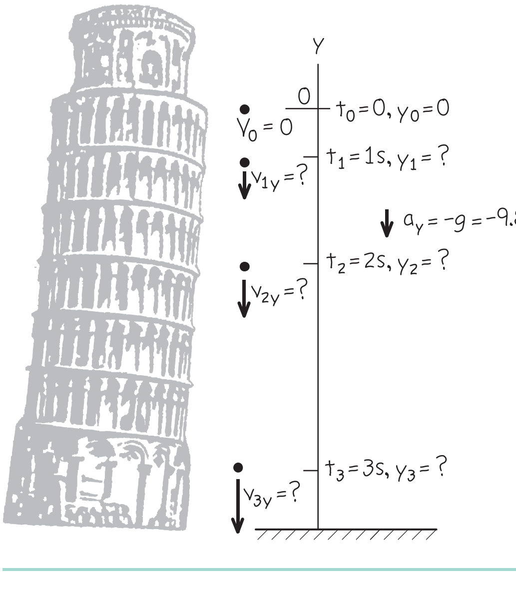
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: "Cae libremente" significa "tiene una aceleración constante debida a la gravedad", así que podemos usar las ecuaciones para aceleración constante en la determinación de nuestras incógnitas.

2.23 Una moneda en caída libre desde reposo.

La Torre Inclinada

Nuestra gráfica del problema



PLANTEAR: El lado derecho de la figura 2.23 muestra nuestro diagrama de movimiento para la moneda. El movimiento es vertical, de manera que usamos un eje de coordenadas vertical y llamaremos a la coordenada y en vez de x. Sustituiremos todas las x de las ecuaciones para aceleración constante por y. Tomaremos el origen O como el punto de partida y la dirección hacia arriba como positiva. La coordenada inicial y_0 y la velocidad inicial v_{0y} son ambas cero. La aceleración es hacia abajo, en la dirección y negativa, así que $ay = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$. (Recuerde que por definición g *siempre* es positiva.) Por lo tanto, nuestras incógnitas son los valores de y y v_y en los tres instantes especificados. Para obtenerlos usamos las ecuaciones (2.12) y (2.8), sustituyendo x por y.

EJECUTAR: En un instante t después de que se suelta la moneda, su posición y su velocidad son

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2}(-g)t^2 = (-4.9 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t = 0 + (-g)t = (-9.8 \text{ m/s}^2)t$$

Cuando $t = 1.0$ s, $y = (-4.9 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})^2 = -4.9$ m y $v_y = (-9.8 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s}) = -9.8$ m/s; después de 1 s, la moneda está 4.9 m debajo del origen (y es negativa) y tiene una velocidad hacia abajo (v_y es negativa) con magnitud de 9.8 m/s.

La posición y la velocidad a los 2.0 s y 3.0 s se obtienen de la misma forma. ¿Puede usted demostrar que $y = -19.6$ m y $v_y = -19.6$ m/s en $t = 2.0$ s, y que $y = -44.1$ m y $v_y = -29.4$ m/s en $t = 3.0$ s?

EVALUAR: Todos los valores que obtuvimos para v_y son negativos porque decidimos que el eje $+y$ apuntaría hacia arriba; pero bien podríamos haber decidido que apuntara hacia abajo. En tal caso, la aceleración habría sido $a_y = +g$ y habríamos obtenido valores positivos para v_y. No importa qué eje elija; sólo asegúrese de decirlo claramente en su solución y confirme que la aceleración tenga el signo correcto.

Ejemplo 2.7 Movimiento ascendente y descendente en caída libre

Imagine que usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba desde la azotea de un edificio. La pelota sale de la mano, en un punto a la altura del barandal de la azotea, con rapidez ascendente de 15.0 m/s, quedando luego en caída libre. Al bajar, la pelota libra apenas el barandal. En este lugar, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$. Obtenga *a*) la posición y velocidad de la pelota 1.00 s y 4.00 s después de soltarla; *b*) la velocidad cuando la pelota está 5.00 m sobre el barandal; *c*) la altura máxima alcanzada y el instante en que se alcanza; y *d*) la aceleración de la pelota en su altura máxima.

SOLUCIÓN

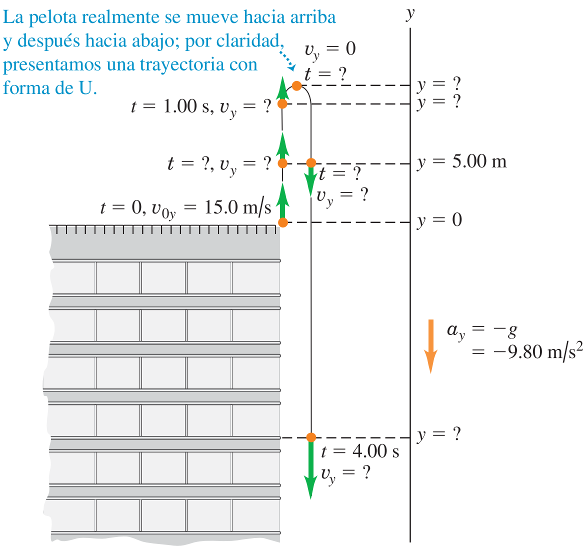
IDENTIFICAR: Las palabras "caída libre" en el enunciado del problema implican que la aceleración es constante y debida a la gravedad. Las incógnitas son la posición [en los incisos *a*) y *c*)], la velocidad [en los incisos *a*) y *b*)] y la aceleración [en el inciso *d*)].

PLANTEAR: En la figura 2.24 (que también es un diagrama de movimiento para la pelota), la trayectoria descendente se muestra desplazada un poco a la derecha de su posición real por claridad. Sea el origen el barandal, donde la pelota sale de la mano, y sea la dirección positiva hacia arriba. La posición inicial y_0 es cero, la velocidad inicial v_{0y} es $+15.0 \text{ m/s}$ y la aceleración es $a_Y = -g = -9.80 \text{ m/s}^2$. Usaremos otra vez las ecuaciones (2.12) y (2.8) para calcular la posición y la velocidad, respectivamente, en función del tiempo. En el inciso *b*), nos piden hallar la velocidad en cierta *posición,* no en cierto *tiempo,* así que nos convendrá usar la ecuación (2.13) en esa parte.

EJECUTAR: *a*) La posición y y la velocidad v_y, en cualquier instante t una vez que se suelta la pelota están dadas por las ecuaciones (2.12) y (2.8), cambiando las x por y:

$$y = y_0 = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$
$$= (0) + (15.0 \text{ m/s})t + \frac{1}{2}(-9.80 \text{ m/s}^2)t^2$$
$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_{0y} + (-g)t$$
$$= 15.0 \text{ m/s} + (-9.80 \text{ m/s}^2)t$$

2.24 Posición y velocidad de una pelota que se lanza verticalmente hacia arriba.



Cuando $t = 1.00$ s, estas ecuaciones dan

$$y = +10.1 \text{ m} \qquad v_y = +5.2 \text{ m/s}$$

La pelota está 10.1 m sobre el origen (y es positiva) y se mueve hacia arriba (v_y es positiva) con rapidez de 5.2 m/s, menor que la rapidez inicial porque la pelota frena mientras asciende.

Cuando $t = 4.00$ s, las ecuaciones para y y v_y en función del tiempo t dan

$$y = -18.4 \text{ m} \qquad v_y = -24.2 \text{ m/s}$$

La pelota pasó su punto más alto y está 18.4 m *debajo* del origen (y es negativa); tiene velocidad *hacia abajo* (v_y es negativa) de magnitud 24.2 m/s. Conforme sube, la pelota pierde rapidez, luego la gana al descender; se mueve a la rapidez inicial de 15.0 m/s cuando pasa hacia abajo por su punto de lanzamiento (el origen) y continúa ganando rapidez conforme desciende por debajo de este punto.

b) La velocidad v_y en cualquier posición y está dada por la ecuación (2.13) cambiando las x por y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 + 2(-g)(y - 0)$$
$$= (15.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)y$$

Con la pelota a 5.00 m sobre el origen, $y = +5.00$ m, así que

$$v_y^2 = (15.0 \text{ m/s})^2 + 2(-9.80 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ m}) = 127 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_y = \pm 11.3 \text{ m/s}$$

Obtenemos *dos* valores de v_y, pues la pelota pasa dos veces por el punto $y = +5.00$ m (véase la figura 2.24), una subiendo con v_y positiva y otra bajando con v_y negativa.

c) En el instante en que la pelota llega al punto más alto, está momentáneamente en reposo y $v_y = 0$. La altura máxima y_1 puede obtenerse de dos formas. La primera es usar la ecuación (2.13) y sustituir $v_y = 0$, $y_0 = 0$ y $a_y = -g$:

$$0 = v_{0y}^2 + 2(-g)(y_1 - 0)$$
$$y_1 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(15.0 \text{ m/s})^2}{2(9.80 \text{ m/s}^2)} = +11.5 \text{ m}$$

La segunda consiste en calcular el instante en que $v_y = 0$ usando la ecuación (2.8), $v_y = v_{0y} + a_y t$, y sustituir este valor de t en la ecuación (2.12), para obtener la posición en ese instante. Por la ecuación (2.8), el instante t_1 en que la pelota llega al punto más alto es

$$v_y = 0 = v_{0y} + (-g)t_1$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15.0 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 1.53 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor de t en la ecuación (2.12) obtenemos

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (0) + (15 \text{ m/s})(1.53 \text{ s})$$
$$+ \frac{1}{2}(-9.8 \text{ m/s}^2)(1.53 \text{ s})^2 = +11.5 \text{ m}$$

Observe que la primera forma de hallar la altura máxima es más sencilla, ya que no es necesario calcular primero el tiempo.

continúa

d) **CUIDADO** **Un error acerca de la caída libre** Es un error común pensar que en el punto más alto del movimiento en caída libre la velocidad es cero y la aceleración es cero. Si fuera así, ¡la pelota quedaría suspendida en el punto más alto en el aire para siempre! Recuerde que la aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si la aceleración fuera cero en el punto más alto, la velocidad de la pelota ya no cambiaría y, al estar instantáneamente en reposo, permanecería en reposo eternamente.

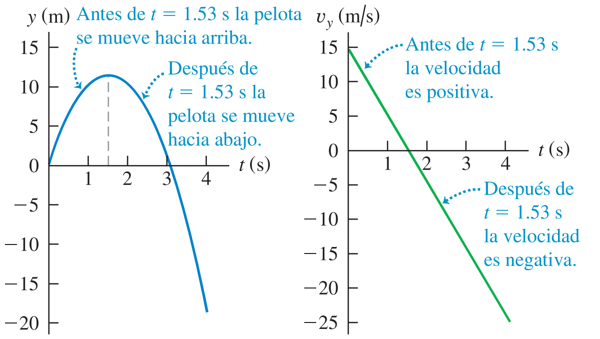
De hecho, en el punto más alto la aceleración sigue siendo $a_y = -g = -9.80\ \text{m/s}^2$, la misma que cuando está subiendo y cuando está bajando. Por ello, la velocidad de la pelota está cambiando continuamente, de valores positivos a valores negativos, pasando por cero.

EVALUAR: Una forma útil de verificar cualquier problema de movimiento consiste en dibujar las gráficas de posición y de velocidad en función del tiempo. La figura 2.25 muestra estas gráficas para este problema. Como la aceleración es constante y negativa, la gráfica *y*-*t* es una parábola con curvatura hacia abajo, y la gráfica v_y-t es una recta con pendiente negativa.

2.25 a) Posición y b) velocidad en función del tiempo para una pelota lanzada hacia arriba con una rapidez inicial de 15 m/s.

a) Gráfica *y*-*t* (la curvatura es hacia abajo porque $a_y = -g$ es negativa)

b) Gráfica v_y-t (recta con pendiente negativa porque $a_y = -g$ es constante y negativa)



Ejemplo 2.8 ¿Dos soluciones o una?

Determine el instante en que la pelota del ejemplo 2.7 está 5.00 m por debajo del barandal.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de nuevo de un problema de aceleración constante. La incógnita es el tiempo en que la pelota está en cierta posición.

PLANTEAR: Otra vez elegimos el eje *y* como en la figura 2.24, así que y_0, v_{0y} y $a_y = -g$ tienen los mismos valores que en el ejemplo 2.7. De nuevo, la posición *y* en función del tiempo *t* está dada por la ecuación (2.12):

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Queremos despejar *t* con $y = -5.00$ m. Puesto que la ecuación incluye t^2, es una ecuación *cuadrática* en *t*.

EJECUTAR: Primero replanteamos la ecuación en la forma cuadrática estándar para una *x* desconocida, $Ax^2 + Bx + C = 0$:

$$\left(\frac{1}{2}g\right)t^2 + (-v_{0y})t + (y - y_0) = At^2 + Bt + C = 0$$

entonces, $A = g/2$, $B = -v_{0y}$ y $C = y - y_0$. Usando la fórmula cuadrática (véase el Apéndice B), vemos que esta ecuación tiene *dos* soluciones:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ &= \frac{-(-v_{0y}) \pm \sqrt{(-v_{0y})^2 - 4(g/2)(y - y_0)}}{2(g/2)} \\ &= \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)}}{g} \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores $y_0 = 0$, $v_{0y} = +15.0$ m/s, $g = 9.80\ \text{m/s}^2$ y $y = -5.00$ m, obtenemos

$$t = \frac{(15.0\ \text{m/s}) \pm \sqrt{(15.0\ \text{m/s})^2 - 2(9.80\ \text{m/s}^2)(-5.00\ \text{m} - 0)}}{9.80\ \text{m/s}^2}$$

$t = +3.36$ s o $t = -0.30$ s

Para decidir cuál de éstas es la respuesta correcta, la pregunta clave es: "¿son lógicas estas respuestas?" La segunda, $t = -0.30$ s, simplemente es absurda; ¡se refiere a un instante 0.30 s *antes* de soltar la pelota! Lo correcto es $t = +3.36$ s. La pelota está 5.00 m debajo del barandal 3.36 s *después* de que sale de la mano.

EVALUAR: ¿De dónde salió la "solución" errónea $t = -0.30$ s? Recuerde que la ecuación $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}(-g)t^2$ se basa en el supuesto de que la aceleración es constante para *todos* los valores de *t*, positivos, negativos o cero. Tal cual, esta ecuación nos diría que la pelota se ha estado moviendo hacia arriba en caída libre desde los albores del tiempo, y pasó por la mano en $y = 0$ en el instante especial que decidimos llamar $t = 0$, y después continuó su caída libre. Sin embargo, todo lo que esta ecuación describa como sucedido antes de $t = 0$ es ficción pura, ya que la pelota entró en caída libre sólo después de salir de la mano en $t = 0$; la "solución" $t = -0.30$ s es parte de tal ficción.

Repita estos cálculos para determinar cuándo la pelota está 5.00 m *sobre* el origen ($y = +5.00$ m). Las dos respuestas son $t = +0.38$ s y $t = +2.68$ s; ambos son valores positivos de *t* y se refieren al movimiento real de la pelota una vez soltada. El primer instante es cuando la pelota pasa por $y = +5.00$ m de subida, y el segundo, cuando pasa por ahí de bajada. (Compare esto con el inciso *b*) del ejemplo 2.7.)

Determine también los instantes en que $y = +15.0$ m. En este caso, ambas soluciones requieren obtener la raíz cuadrada de un número negativo, así que *no hay* soluciones reales. Esto es lógico; en el inciso *c*) del ejemplo 2.7 vimos que la altura máxima de la pelota es $y = +11.5$ m, así que *nunca* llega a $y = +15.0$ m. Aunque una ecuación cuadrática como la (2.12) siempre tiene dos soluciones, a veces una o ambas soluciones no tienen sentido físico.

Evalúe su comprensión de la sección 2.5 Si usted lanza una pelota hacia arriba con cierta rapidez inicial, ésta cae libremente y alcanza una altura máxima h un instante t después de que sale de su mano. *a*) Si usted arroja la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿qué nueva altura máxima alcanzará la pelota? $h\sqrt{2}$; *b*) Si usted lanza la pelota hacia arriba con el doble de la rapidez inicial, ¿cuánto tiempo le tomará alcanzar su nueva altura máxima? i) $t/2$; ii) $t/\sqrt{2}$; iii) t; iv) $t\sqrt{2}$; v) $2t$.

2.6 *Velocidad y posición por integración

Esta sección opcional es para estudiantes que ya aprendieron algo de cálculo integral. En la sección 2.4 analizamos el caso especial de movimiento rectilíneo con aceleración constante. Si a_x no es constante, como es común, no podremos aplicar las ecuaciones que deducimos en esa sección (figura 2.26). Pero aun si a_x varía con el tiempo, podemos usar la relación $v_x = dx/dt$ para obtener la velocidad v_x en función del tiempo si la posición x es una función conocida de t, y podemos usar $a_x = dv_x/dt$ para obtener la aceleración a_x en función del tiempo si v_x es una función conocida de t.

En muchas situaciones, sin embargo, no se conocen la posición ni la velocidad en función del tiempo, pero sí la aceleración. ¿Cómo obtenemos la posición y la velocidad a partir de la función de aceleración $a_x(t)$? Este problema surge al volar un avión de Norteamérica a Europa (figura 2.27). La tripulación del avión debe conocer su posición precisa en todo momento. Sin embargo, un avión sobre el océano suele estar fuera del alcance de los radiofaros terrestres y del radar de los controladores de tráfico aéreo. Para determinar su posición, los aviones cuentan con un sistema de navegación inercial (INS) que mide la aceleración del avión. Esto se hace de forma análoga a como sentimos cambios en la velocidad de un automóvil en el que viajamos, aun con los ojos cerrados. (En el capítulo 4 veremos cómo el cuerpo detecta la aceleración.) Dada esta información y la posición inicial del avión (digamos, cierto embarcadero en el Aeropuerto Internacional de Miami) y su velocidad inicial (cero cuando está estacionado en ese embarcadero), el INS calcula y muestra la velocidad y posición actuales del avión en todo momento durante el vuelo. (Los aviones también utilizan el sistema de posición global, o GPS, para la navegación; no obstante, este sistema complementa el INS, en vez de remplazarlo.) Nuestro objetivo en el resto de esta sección es mostrar cómo se efectúan estos cálculos en el caso más sencillo de movimiento rectilíneo, con aceleración variable en el tiempo.

Primero consideraremos un enfoque gráfico. La figura 2.28 es una gráfica de aceleración contra tiempo para un cuerpo cuya aceleración no es constante. Podemos dividir el intervalo entre los tiempos t_1 y t_2 en muchos intervalos más pequeños, llamando Δt a uno representativo. Sea $a_{\text{med-}x}$ la aceleración media durante Δt. Por la ecuación (2.4), el cambio de velocidad Δv_x durante Δt es

$$\Delta v_x = a_{\text{med-}x}\,\Delta t$$

Gráficamente, Δv_x es igual al área de la tira sombreada con altura $a_{\text{med-}x}$ y anchura Δt, es decir, el área bajo la curva entre los lados derecho e izquierdo de Δt. El cambio total de velocidad en cualquier intervalo (digamos, t_1 a t_2) es la suma de los cambios Δv_x en los subintervalos pequeños. De esta manera el cambio de velocidad total se representa gráficamente con el área *total* bajo la curva a_x-t entre las líneas verticales t_1 y t_2. (En la sección 2.4 demostramos que esto se cumplía para el caso especial en que la aceleración es constante.)

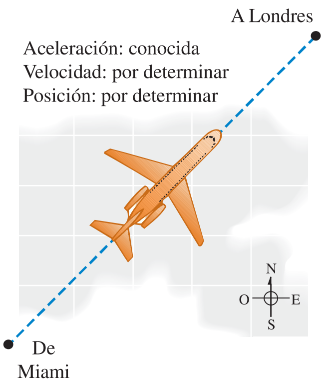
En el límite donde los Δt se hacen muy pequeños y muy numerosos, el valor de $a_{\text{med-}x}$ para el intervalo de cualquier t a $t + \Delta t$ se acerca a la aceleración instantánea a_x en el instante t. En este límite, el área bajo la curva a_x-t es la *integral* de a_x (que en general es una función de t) de t_1 a t_2. Si v_{1x} es la velocidad del cuerpo en t_1 y v_{2x} es la velocidad en t_2, entonces,

$$v_{2x} - v_{1x} = \int_{v_{1x}}^{v_{2x}} dv_x = \int_{t_1}^{t_2} a_x\,dt \qquad (2.15)$$

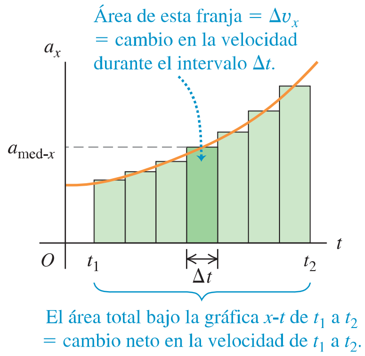
El cambio en v_x es la integral de la aceleración a_x con respecto al tiempo.

2.26 Cuando pisamos el pedal del acelerador de un automóvil, la aceleración resultante *no* es constante: cuanto mayor sea la rapidez del auto, más lentamente adquirirá rapidez adicional. Un auto ordinario tarda el doble en acelerar de 50 km/h a 100 km/h que en acelerar de 0 a 50 km/h.

2.27 La posición y la velocidad de un avión que cruza el Atlántico se encuentran integrando su aceleración con respecto al tiempo.



2.28 Una gráfica a_x-t para un cuerpo cuya aceleración no es constante.



Podemos seguir exactamente el mismo procedimiento con la curva de velocidad contra tiempo. Si x_1 es la posición de un cuerpo en t_1 y x_2 es su posición en t_2, por la ecuación (2.2) el desplazamiento Δx en un intervalo Δt pequeño es $v_{\text{med-}x}\,\Delta t$, donde $v_{\text{med-}x}$ es la velocidad media durante Δt. El desplazamiento total $x_2 - x_1$ durante $t_2 - t_1$ está dado por

$$x_2 - x_1 = \int_{x_1}^{x_2} dx = \int_{t_1}^{t_2} v_x\,dt \qquad (2.16)$$

El cambio en la posición x (es decir, el desplazamiento) es la integral en el tiempo de la velocidad v_x. Gráficamente, el desplazamiento entre t_1 y t_2 es el área bajo la curva v_x-t entre esos dos instantes. [Éste es el resultado que obtuvimos en la sección 2.4 para el caso especial en que v_x está dada por la ecuación (2.8).]

Si $t_1 = 0$ y t_2 es cualquier instante posterior t, y si x_0 y v_{0x} son la posición y la velocidad en $t = 0$, respectivamente, entonces rescribimos las ecuaciones (2.15) y (2.16) como:

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt \qquad (2.17)$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt \qquad (2.18)$$

Aquí, x y v_x son la posición y la velocidad en el instante t. Si conocemos la aceleración a_x en función del tiempo y la velocidad inicial v_{0x}, podremos usar la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en cualquier instante; es decir, podemos obtener v_x en función del tiempo. Una vez conocida esta función, y dada la posición inicial x_0, podemos usar la ecuación (2.18) para calcular la posición x en cualquier instante.

Ejemplo 2.9 Movimiento con aceleración cambiante

Sally conduce su Mustang 1965 por una autopista recta. En el instante $t = 0$, cuando Sara avanza a 10 m/s en la dirección $+x$, pasa un letrero que está en $x = 50$ m. Su aceleración es una función del tiempo:

$$a_x = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

a) Deduzca expresiones para su velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿En qué momento es máxima su velocidad? *c*) ¿Cuál es esa velocidad máxima? *d*) ¿Dónde está el automóvil cuando alcanza la velocidad máxima?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La aceleración es función del tiempo, así que no podemos usar las fórmulas para aceleración constante de la sección 2.4.

PLANTEAR: Utilizamos las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener la velocidad y la posición en función del tiempo. Una vez que tengamos esas funciones, podremos contestar diversas preguntas acerca del movimiento.

EJECUTAR: *a*) En $t = 0$, la posición de Sally es $x_0 = 50$ m y su velocidad es $v_{0x} = 10$ m/s. Puesto que se nos da la aceleración a_x en función del tiempo, primero usamos la ecuación (2.17) para obtener la velocidad v_x en función del tiempo t. La integral de t^n es $\int t^n\,dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ con $n \neq -1$, así que

$$\begin{aligned} v_x &= 10\ \text{m/s} + \int_0^t [2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t]\,dt \\ &= 10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2 \end{aligned}$$

Luego usamos la ecuación (2.18) para obtener x en función de t:

$$\begin{aligned} x &= 50\ \text{m} + \int_0^t \left[10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)t - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)t^2\right] dt \\ &= 50\ \text{m} + (10\ \text{m/s})t + \frac{1}{2}(2.0\ \text{m/s}^2)t^2 - \frac{1}{6}(0.10\ \text{m/s}^3)t^3 \end{aligned}$$

La figura 2.29 muestra las gráficas de a_x, v_x y x en función del tiempo. Observe que, para cualquier t, la pendiente de la gráfica v_x-t es igual al valor de a_x y la pendiente de la gráfica x-t es igual al valor de v_x.

b) El valor máximo de v_x se da cuando v_x deja de aumentar y comienza a disminuir. En este instante, $dv_x/dt = a_x = 0$. Igualando a cero la expresión de la aceleración,

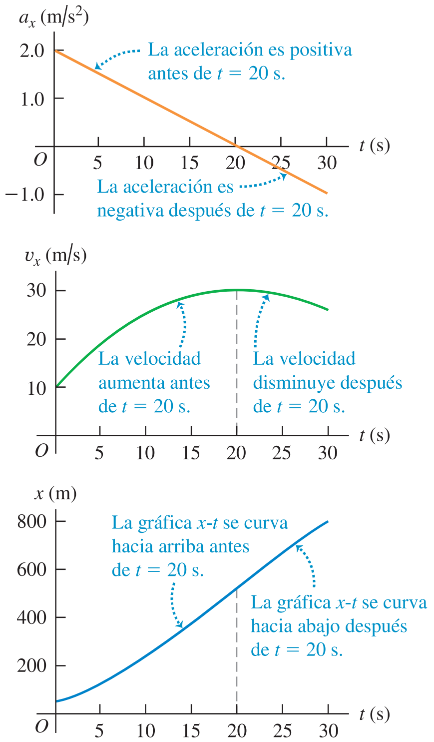
$$0 = 2.0\ \text{m/s}^2 - (0.10\ \text{m/s}^3)t$$

$$t = \frac{2.0\ \text{m/s}^2}{0.10\ \text{m/s}^3} = 20\ \text{s}$$

c) Obtenemos la velocidad máxima sustituyendo $t = 20$ s (cuando v es máxima) en la ecuación para v_x del inciso *a*):

$$\begin{aligned} v_{\text{máx-}x} &= 10\ \text{m/s} + (2.0\ \text{m/s}^2)(20\ \text{s}) - \frac{1}{2}(0.10\ \text{m/s}^3)(20\ \text{s})^2 \\ &= 30\ \text{m/s} \end{aligned}$$

2.29 Posición, velocidad y aceleración del automóvil del ejemplo 2.9 como funciones del tiempo. ¿Puede usted demostrar que si continúa este movimiento, el auto parará en $t = 44.5$ s?



d) El valor máximo de v_x se da en $t = 20$ s. Para obtener la posición del auto en ese instante, sustituimos $t = 20$ s en la expresión para x del inciso *a*):

$$x = 50\text{ m} + (10\text{ m/s})(20\text{ s}) + \frac{1}{2}(2.0\text{ m/s}^2)(20\text{ s})^2 - \frac{1}{6}(0.10\text{ m/s}^3)(20\text{ s})^3 = 517\text{ m}$$

EVALUAR: La figura 2.29 nos ayuda a interpretar los resultados. La gráfica superior de esta figura muestra que a_x es positiva entre $t = 0$ y $t = 20$ s, y negativa después. Es cero en $t = 20$ s, cuando v_x es máxima (punto alto en la curva de en medio). El auto acelera hasta $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen el mismo signo) y frena después de $t = 20$ s (porque v_x y a_x tienen signos opuestos).

Como v_x es máxima en $t = 20$ s, la gráfica *x*-*t* (la de arriba en la figura 2.29) tiene su pendiente positiva máxima en ese instante. Observe que la curva *x*-*t* es cóncava hacia arriba entre $t = 0$ y $t = 20$ s, cuando a_x es positiva, y es cóncava hacia abajo después de $t = 20$ s, cuando a_x es negativa.

Ejemplo 2.10 Fórmulas de aceleración constante por integración

Use las ecuaciones (2.17) y (2.18) para obtener v_x y x en función del tiempo para el caso de aceleración constante.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Estos ejemplos servirán para verificar las ecuaciones que dedujimos en esta sección. Si están correctas, deberíamos terminar con las mismas ecuaciones de aceleración constante que dedujimos en la sección 2.4 sin usar la integración.

PLANTEAR: Seguimos los mismos pasos que en el ejemplo 2.9. La única diferencia es que a_x es una constante.

EJECUTAR: Por la ecuación (2.17), la velocidad está dada por

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x\,dt = v_{0x} + a_x\int_0^t dt = v_{0x} + a_x t$$

Pudimos obtener a_x de la integral porque es constante. Si sustituimos esta expresión para v_x en la ecuación (2.18), obtendremos

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\,dt = x_0 + \int_0^t (v_{0x} + a_x t)\,dt$$

Puesto que v_{0x} y a_x son constantes, podemos sacarlas de la integral:

$$x = x_0 + v_{0x}\int_0^t dt + a_x\int_0^t t\,dt = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

EVALUAR: Estos resultados son iguales a las ecuaciones (2.8) y (2.12) para la sección 2.4, ¡como debería ser! No obstante, nuestras expresiones para las ecuaciones (2.17) y (2.18), en los casos en que la aceleración depende del tiempo, también pueden servirnos cuando la aceleración sea constante.

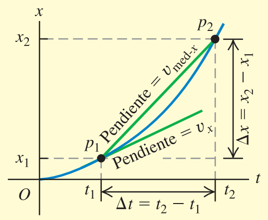
Evalúe su comprensión de la sección 2.6 Si la aceleración a_x se incrementa con el tiempo, la gráfica v_x-t ¿será i) una línea recta, ii) una curva cóncava hacia arriba (con curvatura hacia arriba) o iii) una curva cóncava hacia abajo (con curvatura hacia abajo)?

CAPÍTULO 2 RESUMEN

Movimiento rectilíneo, velocidad media e instantánea: Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición con respecto al origen O mediante una coordenada como x. La velocidad media de la partícula, $v_{\text{med-}x}$, durante un intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual a su desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido entre Δt. La velocidad instantánea v_x en cualquier instante t es igual a la velocidad media en el intervalo de tiempo de t a $t + \Delta t$ en el límite cuando Δt tiende a cero. De forma equivalente, v_x es la derivada de la función de posición con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 2.1.)

$$v_{\text{med-}x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{2.2}$$

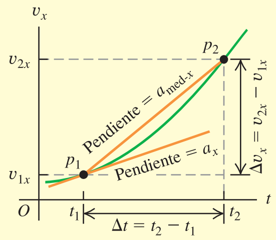
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \tag{2.3}$$



Aceleración media e instantánea: La aceleración media $a_{\text{med-}x}$ durante un intervalo Δt es igual al cambio de velocidad $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ durante ese lapso dividido entre Δt. La aceleración instantánea a_x es el límite de $a_{\text{med-}x}$ cuando Δt tiende a cero, o la derivada de v_x con respecto a t. (Véanse los ejemplos 2.2 y 2.3.)

$$a_{\text{med-}x} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \tag{2.4}$$

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \tag{2.5}$$



Movimiento rectilíneo con aceleración constante: Cuando la aceleración es constante, cuatro ecuaciones relacionan la posición x y la velocidad v_x en cualquier instante t con la posición inicial x_0, la velocidad inicial v_{0x} (ambas medidas en $t = 0$) y la aceleración a_x. (Véanse los ejemplos 2.4 y 2.5.)

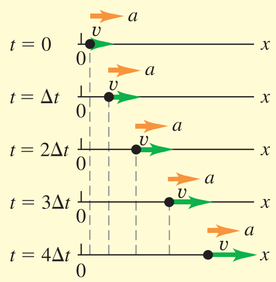
Sólo aceleración constante:

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{2.8}$$

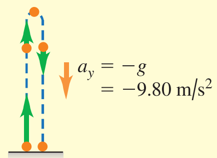
$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \tag{2.12}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \tag{2.13}$$

$$x - x_0 = \left(\frac{v_{0x} + v_x}{2}\right) t \tag{2.14}$$



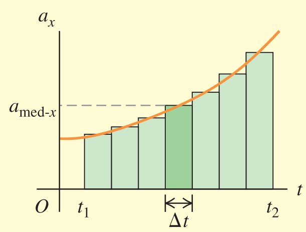
Cuerpos en caída libre: La caída libre es un caso del movimiento con aceleración constante. La magnitud de la aceleración debida a la gravedad es una cantidad positiva g. La aceleración de un cuerpo en caída libre siempre es hacia abajo. (Véanse los ejemplos 2.6 a 2.8.)



Movimiento rectilíneo con aceleración variable: Cuando la aceleración no es constante, sino una función conocida del tiempo, podemos obtener la velocidad y la posición en función del tiempo integrando la función de la aceleración. (Véanse los ejemplos 2.9 y 2.10.)

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t a_x \, dt \tag{2.17}$$

$$x = x_0 + \int_0^t v_x \, dt \tag{2.18}$$



Términos clave

partícula, *37*
velocidad media, *37*
gráfica *x-t*, *38*
velocidad instantánea, *39*
derivada, *40*
rapidez, *40*
diagrama de movimiento, *42*
aceleración media, *43*
aceleración instantánea, *44*
gráfica v_x-*t*, *45*
gráfica a_x-*t*, *47*
caída libre, *53*
aceleración debida a la gravedad, *54*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Sí. Aceleración se refiere a *cualquier* cambio de velocidad, ya sea que aumente o disminuya.

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

2.1 Respuestas a *a*): iv), i) y iii) (empatados), v), ii); respuesta a *b*): i) y iii); respuesta a *c*): v) En *a*), la velocidad media es $v_{\text{med-}x} = \Delta x/\Delta t$. Para los cinco viajes, $\Delta t = 1$ h. Para los viajes individuales, tenemos i) $\Delta x = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; ii) $\Delta x = -50$ km, $v_{\text{med-}x} = -50$ km/h; iii) $\Delta x = 60\text{ km} - 10\text{ km} = +50$ km, $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h; iv) $\Delta x = +70$ km, $v_{\text{med-}x} = +70$ km/h; v) $\Delta x = \Delta x = -20\text{ km} + 20\text{ km} = 0$, $v_{\text{med-}x} = 0$. En *b*) ambos tienen $v_{\text{med-}x} = +50$ km/h.

2.2 Respuestas: *a*) *P*, *Q* y *S* (empatados), *R* La velocidad es ***b*)** positiva cuando la pendiente de la gráfica *x-t* es positiva (**punto *P***), ***c*)** negativa cuando la pendiente es negativa (**punto *R***) y ***d*)** cero cuando la pendiente es cero (**puntos *Q* y *S***). ***e*) *R*, *P*, *Q* y *S* (empatados)** La rapidez es máxima cuando la pendiente de la gráfica *x-t* es más empinada (ya sea positiva o negativa), y cero cuando la pendiente es cero.

2.3 Respuestas: *a*) *S*, donde la gráfica *x-t* se curva (es cóncava) hacia arriba. ***b*) *Q***, donde la gráfica *x-t* se curva (es cóncava) hacia abajo.

c*) *P* y *R, donde la gráfica *x-t* es una línea recta. ***d*)** En *P*, $v_x > 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez **no cambia**); en *Q*, $v_x > 0$ y $a_x < 0$ (la rapidez **disminuye**); en *R*, $v_x < 0$ y $a_x = 0$ (la rapidez **no cambia**); y en *S*, $v_x < 0$ y $a_x > 0$ (la rapidez **disminuye**).

2.4 Respuesta: *b*) La aceleración del policía es constante, de manera que su gráfica v_x-*t* es una recta y su motocicleta se mueve más rápido que el automóvil del conductor, cuando ambos vehículos se encuentran en $t = 10$ s.

2.5 Respuestas: *a*) iii) Use la ecuación (2.13) sustituyendo *x* por *y* y $a_y = g$; $v^2_y = v_0{}^2_y - 2g(y - y_0)$. La altura inicial es $y_0 = 0$ y la velocidad a la altura máxima $y = h$ es $v_y = 0$, así que $0 = v_0{}^2_y - 2gh$ y $h = v_0{}^2_y/2g$. Si la velocidad inicial aumenta en un factor de 2, la altura máxima aumentará en un factor de $2^2 = 4$ y la pelota alcanzará la altura $4h$. ***b*) v)** Utilice la ecuación (2.8) remplazando *x* por *y* y $a_y = g$; $v_y = v_{0y} - gt$. La velocidad en la altura máxima es $v_y = 0$, así que $0 = v_{0y} - gt$ y $t = v_{0y}/g$. Si la velocidad inicial se incrementa en un factor de 2, el tiempo para llegar a la altura máxima se incrementa en un factor de 2 y se vuelve $2t$.

2.6 Respuestas: ii) La aceleración a_x es igual a la pendiente de la gráfica v_x-*t*. Si a_x aumenta, la pendiente de la gráfica v_x-*t* también se incrementa y la curva es cóncava hacia arriba.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

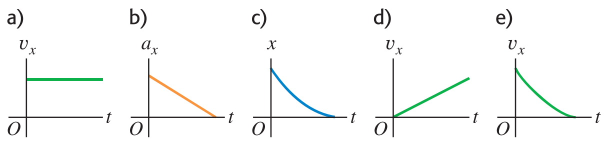
Preguntas para análisis

P2.1. ¿El velocímetro de un automóvil mide rapidez o velocidad? Explique su respuesta.

P2.2. La figura 2.30 muestra una serie de fotografías de alta rapidez de un insecto que vuela en línea recta de izquierda a derecha (en la dirección $+x$). ¿Cuál de las gráficas de la figura 2.31 es más probable que describa el movimiento del insecto?

Figura 2.30 Pregunta P2.2.

Figura 2.31 Pregunta P2.2.



P2.3. ¿Un objeto con aceleración constante puede invertir la dirección en la que se mueve? ¿Puede invertirla *dos veces*? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.4. ¿En qué condiciones la velocidad media es igual a la velocidad instantánea?

P2.5. ¿Para un objeto es posible *a*) frenar mientras su aceleración incrementa en magnitud; *b*) aumentar su rapidez mientras disminuye su aceleración? En cada caso, explique su razonamiento.

P2.6. ¿En qué condiciones la magnitud de la velocidad media es igual a la rapidez media?

P2.7. Cuando un Dodge Viper está en el negocio "Lavamóvil", un BMW Z3 está en las calles Olmo y Central. Luego, cuando el Dodge llega a Olmo y Central, el BMW llega a "Lavamóvil". ¿Qué relación hay entre las velocidades medias de los automóviles entre esos instantes?

P2.8. En el estado de Massachusetts un conductor fue citado en el tribunal por exceso de rapidez. La prueba contra el conductor era que una mujer policía observó al automóvil del conductor junto a un segundo auto, en un momento en que la mujer policía ya había determinado que el segundo auto excedía el límite de rapidez. El conductor alegó que: "el otro auto me estaba rebasando, y yo no iba a exceso de rapidez". El juez dictaminó contra él porque, según dijo, "si los autos estaban juntos, ambos iban a exceso de rapidez". Si usted fuera el abogado del conductor, ¿cómo defendería su caso?

P2.9. ¿Puede usted tener desplazamiento 0 y velocidad media distinta de 0? ¿Y velocidad distinta de 0? Ilustre sus respuestas en una gráfica x-t.

P2.10. ¿Puede usted tener aceleración 0 y velocidad distinta de 0? Explique, usando una gráfica v_x-t.

P2.11. ¿Puede usted tener velocidad cero y aceleración media distinta de cero? ¿Y velocidad cero y aceleración distinta de cero? Explique, usando una gráfica v_x-t y dé un ejemplo de dicho movimiento.

P2.12. Un automóvil viaja al oeste. ¿Puede tener una velocidad hacia el oeste y simultáneamente una aceleración hacia el este? ¿En qué circunstancias?

P2.13. La camioneta del juez en la figura 2.2 está en $x_1 = 277$ m en $t_1 = 16.0$ s, y en $x_2 = 19$ m en $t_2 = 25.0$ s. *a*) Dibuje *dos* posibles gráficas x-t distintas para el movimiento de la camioneta. *b*) ¿La velocidad media $v_{\text{med-}x}$ en el intervalo de t_1 a t_2 tiene el mismo valor en ambas gráficas? ¿Por qué?

P2.14. Con aceleración constante, la velocidad media de una partícula es la mitad de la suma de sus velocidades inicial y final. ¿Se cumple esto si la aceleración *no* es constante? Explique su respuesta.

P2.15. Usted lanza una pelota verticalmente hasta una altura máxima mucho mayor que su propia estatura. ¿La magnitud de la aceleración es mayor mientras se lanza o después de que se suelta? Explique su respuesta.

P2.16. Demuestre lo que sigue. *a*) En tanto puedan despreciarse los efectos del aire, si se lanza algo verticalmente hacia arriba tendrá la misma rapidez cuando regrese al punto de lanzamiento que cuando se soltó. *b*) El tiempo de vuelo será el doble del tiempo de subida.

P2.17. Un grifo de agua que gotea deja caer constantemente gotas cada 1.0 s. Conforme dichas gotas caen, la distancia entre ellas aumenta, disminuye o permanece igual? Demuestre su respuesta.

P2.18. Si se conocen la posición y velocidad iniciales de un vehículo y se registra la aceleración en cada instante, ¿puede calcularse su posición después de cierto tiempo con estos datos? Si se puede, explique cómo.

P2.19. Desde la azotea de un rascacielos, usted lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez v_0 y una pelota directamente hacia abajo con rapidez v_0. *a*) ¿Qué pelota tiene mayor rapidez cuando llega al suelo? *b*) ¿Cuál llega al suelo primero? *c*) ¿Cuál tiene un mayor desplazamiento cuando llega al suelo? *d*) ¿Cuál recorre la mayor distancia cuando llega al suelo?

P2.20. Se deja caer una pelota desde el reposo en la azotea de un edificio de altura h. En el mismo instante, una segunda pelota se proyecta verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo, de modo que tenga rapidez cero cuando llegue al nivel de la azotea. Cuando las dos pelotas se cruzan, ¿cuál tiene mayor rapidez (o ambas tienen la misma rapidez)? Explique su respuesta. ¿Dónde estarán las dos pelotas cuando se crucen: a una altura $h/2$ sobre el suelo, más abajo de esa altura o arriba de esa altura? Explique su respuesta.

Ejercicios

Sección 2.1 Desplazamiento, tiempo y velocidad media

2.1. Un cohete que lleva un satélite acelera verticalmente alejándose de la superficie terrestre. 1.15 s después del despegue, el cohete libra el tope de su plataforma de lanzamiento, a 63 m sobre el suelo; y después de otros 4.75 s, está a 1.00 km sobre el suelo. Calcule la magnitud de la velocidad media del cohete en *a*) la parte de 4.75 s de su vuelo; *b*) los primeros 5.90 s de su vuelo.

2.2. En un experimento, se sacó a una pardela (una ave marina) de su nido, se le llevó a 5150 km de distancia y luego fue liberada. El ave regresó a su nido 13.5 días después de haberse soltado. Si el origen es el nido y extendemos el eje $+x$ al punto de liberación, ¿cuál fue la velocidad media del ave en m/s *a*) en el vuelo de regreso? *b*) ¿Y desde que se sacó del nido hasta que regresó?

2.3. Viaje a casa. Suponga que usted normalmente conduce por la autopista que va de San Diego y Los Ángeles con una rapidez media de 105 km/h (65 m/h) y el viaje le toma 2 h y 20 min. Sin embargo, un viernes por la tarde el tráfico le obliga a conducir la misma distancia con una rapidez media de sólo 70 km/h (43 mi/h). ¿Cuánto tiempo más tardará el viaje?

2.4. De pilar a poste. Partiendo de un pilar, usted corre 200 m al este (la dirección $+x$) con rapidez media de 5.0 m/s, luego 280 m al oeste con rapidez media de 4.0 m/s hasta un poste. Calcule *a*) su rapidez media del pilar al poste y *b*) su velocidad media del pilar al poste.

2.5. Dos corredores parten simultáneamente del mismo punto de una pista circular de 200 m y corren en direcciones *opuestas*. Uno corre con una rapidez constante de 6.20 m/s, y el otro, con rapidez constante de 5.50 m/s. ¿Cuándo se encuentren primero? *a*) ¿cuánto tiempo habrán estado corriendo?, y *b*) ¿qué distancia desde el punto de salida habrá cubierto cada uno?

2.6. Suponga que los dos corredores del ejercicio 2.5 salen al mismo tiempo del mismo lugar, pero ahora corren en la *misma* dirección. *a*) ¿Cuándo el más rápido alcanzará primero al más lento y qué distancia desde el punto de partida habrá cubierto cada uno? *b*) ¿Cuándo el más rápido alcanzará al más lento por *segunda* vez, y qué distancia habrán cubierto en ese instante desde el punto de salida?

2.7. Estudio de los terremotos. Los terremotos producen varios tipos de ondas de choque. Las más conocidas son las ondas P (P por *primaria* o *presión*) y las ondas S (S por *secundaria* o *esfuerzo cortante*). En la corteza terrestre, las ondas P viajan a aproximadamente 6.5 km/s, en tanto que las ondas S se desplazan a aproximadamente 3.5 km/s. Las rapideces reales varían según el tipo de material por el que viajen. El tiempo de propagación, entre la llegada de estas dos clases de onda a una estación de monitoreo sísmico, le indica a los geólogos a qué distancia ocurrió el terremoto. Si el tiempo de propagación es de 33 s, a qué distancia de la estación sísmica sucedió el terremoto?

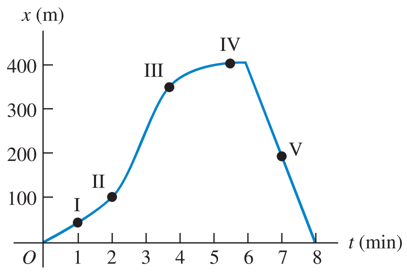
2.8. Un Honda Civic viaja en línea recta en carretera. Su distancia x de un letrero de alto está dada en función del tiempo t por la ecuación $x(t) = \alpha t^2 - \beta t^3$, donde $\alpha = 1.50$ m/s^2 y $\beta = 0.0500$ m/s^3. Calcule la velocidad media del auto para los intervalos *a*) $t = 0$ a $t = 2.00$ s; *b*) $t = 0$ a $t = 4.00$ s; *c*) $t = 2.00$ s a $t = 4.00$ s.

Sección 2.2 Velocidad instantánea

2.9. Un automóvil está parado ante un semáforo. Después viaja en línea recta y su distancia con respecto al semáforo está dada por $x(t) = bt^2 - ct^3$, donde $b = 2.40$ m/s^2 y $c = 0.120$ m/s^3. *a*) Calcule la velocidad media del auto entre el intervalo $t = 0$ a $t = 10.0$ s. *b*) Calcule la velocidad instantánea del auto en $t = 0$; $t = 5.0$ s; $t = 10.0$ s. *c*) ¿Cuánto tiempo después de arrancar el auto vuelve a estar parado?

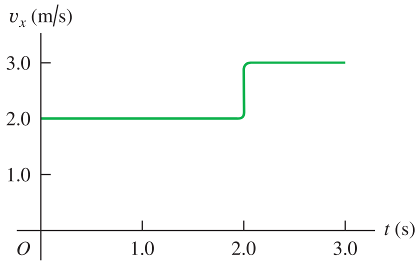
2.10. Una profesora de física sale de su casa y camina por la acera hacia el campus. A los 5 min, comienza a llover y ella regresa a casa. Su distancia con respecto a su casa en función del tiempo se muestra en la figura 2.32. ¿En cuál punto rotulado su velocidad es *a*) cero, *b*) constante y positiva, *c*) constante y negativa, *d*) de magnitud creciente y *e*) de magnitud decreciente?

Figura 2.32 Ejercicio 2.10.



2.11. Una pelota se mueve en línea recta (el eje x). En la figura 2.33 la gráfica muestra la velocidad de esta pelota en función del tiempo. *a*) ¿Cuáles son la rapidez media y la velocidad media de la pelota durante los primeros 3.0 s? *b*) Suponga que la pelota se mueve de tal manera que el segmento de la gráfica después de 2.0 s era -3.0 m/s en vez de $+3.0$ m/s. En este caso, calcule la rapidez media y la velocidad media de la pelota.

Figura 2.33 Ejercicio 2.11.



Sección 2.3 Aceleración media e instantánea

2.12. Un piloto de pruebas de Automotores Galaxia, S.A., está probando un nuevo modelo de automóvil con un velocímetro calibrado para indicar m/s en lugar de mi/h. Se obtuvo la siguiente serie de lecturas durante una prueba efectuada en una carretera recta y larga:

Tiempo (s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Rapidez (m/s)	0	0	2	6	10	16	19	22	22

a) Calcule la aceleración media en cada intervalo de 2 s. ¿La aceleración es constante? ¿Es constante durante alguna parte de la prueba? *b*) Elabore una gráfica v_x-t con los datos, usando escalas de 1 cm = 1 s horizontalmente, y 1 cm = 2 m/s verticalmente. Dibuje una curva suave que pase por los puntos graficados. Mida la pendiente de la curva para obtener la aceleración instantánea en: t = 9 s, 13 s y 15 s.

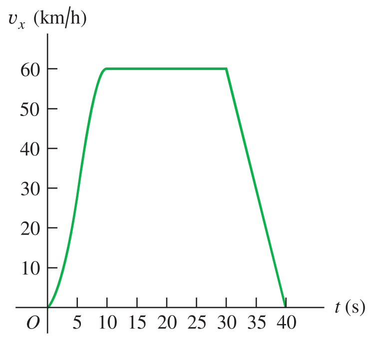
2.13. ¡El automóvil más rápido (y más caro)! La siguiente tabla presenta los datos de prueba del Bugatti Veyron, el auto más rápido fabricado. El vehículo se mueve en línea recta (el eje x).

Tiempo (s)	0	2.1	20.0	53
Rapidez (mi/h)	0	60	200	253

a) Elabore una gráfica v_x-t de la velocidad de este auto (en mi/h) en función del tiempo. ¿Su aceleración es constante? *b*) Calcule la aceleración media del auto (en m/s^2) entre i) 0 y 2.1 s; ii) 2.1 s y 20.0 s; iii) 20.0 s y 53 s. ¿Estos resultados son congruentes con el inciso *a*) de su gráfica? (Antes de decidirse a comprar este vehículo, le sería útil saber que sólo se fabricarán 300, que a su máxima rapidez se le acaba la gasolina en 12 minutos y ¡que cuesta 1,250,000 dólares!)

2.14. La figura 2.34 muestra la velocidad de un automóvil solar en función del tiempo. El conductor acelera desde un letrero de alto, viaja 20 s con rapidez constante de 60 km/h y frena para detenerse 40 s después de partir del letrero. *a*) Calcule la aceleración media para estos intervalos: i) $t = 0$ a $t = 10$ s; ii) $t = 30$ s a $t = 40$ s; iii) $t = 10$ s a $t = 30$ s; iv) $t = 0$ a $t = 40$ s. *b*) ¿Cuál es la aceleración instantánea en $t = 20$ s y en $t = 35$ s?

Figura 2.34 Ejercicio 2.14.



2.15. Una tortuga camina en línea recta sobre lo que llamaremos eje x con la dirección positiva hacia la derecha. La ecuación de la posición de la tortuga en función del tiempo es $x(t) = 50.0 \text{ cm} + (2.00 \text{ cm/s})t - (0.0625 \text{ cm/s}^2)t^2$. *a*) Determine la velocidad inicial, posición inicial y aceleración inicial de la tortuga. *b*) ¿En qué instante t la tortuga tiene velocidad cero? *c*) ¿Cuánto tiempo después de ponerse en marcha regresa la tortuga al punto de partida? *d*) ¿En qué instantes t la tortuga está a una distancia de 10.0 cm de su punto de partida? ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la tortuga en cada uno de esos instantes? *e*) Dibuje las gráficas: x-t, v_x-t y a_x-t para el intervalo de $t = 0$ a $t = 40.0$ s.

2.16. Una astronauta salió de la Estación Espacial Internacional para probar un nuevo vehículo espacial. Su compañero mide los siguientes cambios de velocidad, cada uno en un intervalo de 10 s. Indique la magnitud, el signo y la dirección de la aceleración media en cada intervalo. Suponga que la dirección positiva es a la derecha. *a*) Al principio del intervalo, la astronauta se mueve a la derecha sobre el eje x a 15.0 m/s, y al final del intervalo se mueve a la derecha a 5.0 m/s. *b*) Al principio se mueve a la izquierda a 5.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s. *c*) Al principio se mueve a la derecha a 15.0 m/s y al final lo hace a la izquierda a 15.0 m/s.

2.17. Aceleración de un automóvil. Con base en su experiencia al viajar en automóvil, estime la magnitud de la aceleración media de un auto, cuando *a*) acelera en una autopista desde el reposo hasta 65 mi/h, y *b*) frena desde una rapidez de autopista hasta un alto total. *c*) Explique por qué en cada caso la aceleración media podría considerarse ya sea positiva o negativa.

2.18. La velocidad de un automóvil en función del tiempo está dada por $v_x(t) = \alpha + \beta t^2$, donde $\alpha = 3.00$ m/s y $\beta = 0.100$ m/s^3. *a*) Calcule