EL MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

Capítulo 2

El movimiento en una dirección se asemeja al movimiento a lo largo de una línea recta, como el de un coche en una carretera recta. La conductora se encuentra con semáforos y distintos límites de velocidad en su camino por la carretera hacia la escuela.

¿Cómo puede estimar el tiempo que tardará en llegar? (Véase el ejemplo 2.2.)

Comenzaremos el estudio del universo físico examinando los objetos en movimiento. El estudio del movimiento, cuyo análisis experimental comenzó hace más de 400 años, dando lugar al nacimiento de la física, se denomina **cinemática**.

Partiremos del caso más simple, el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta, como el de un coche que se mueve a lo largo de una carretera horizontal, recta y estrecha. Una partícula es un objeto cuya posición puede describirse por un solo punto. Cualquier cosa puede considerarse como una partícula —una molécula, una persona o una galaxia— siempre que podamos ignorar razonablemente su estructura interna.

2.1 Desplazamiento, velocidad y módulo de la velocidad[1]

La figura 2.1 muestra un coche que está en la posición x_i en el instante t_i y en la posición x_f en un instante posterior t_f. La variación de la posición del coche $x_f - x_i$, se denomina **desplazamiento**. Es costumbre utilizar la letra griega Δ (delta mayúscula) para indicar la variación o incremento de una magnitud. Así pues, la variación de x se escribe Δx:

1. En inglés se usan los términos *velocity* y *speed* para denominar la velocidad vectorial y la velocidad escalar o módulo de la velocidad. Aunque se han hecho intentos para denominar celeridad al módulo de la velocidad, se suele nombrar los dos conceptos como velocidad.

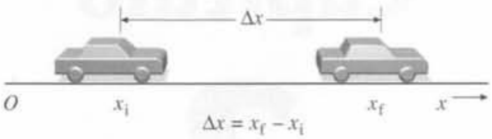


Figura 2.1 Un automóvil se mueve en línea recta en un sistema de coordenadas formado por una línea en la que se escoge un punto O como origen. A cada punto de la línea se asigna un número x, cuyo valor es proporcional a la distancia a O. Los puntos a la derecha de O son positivos y a la izquierda, negativos. Cuando el coche se desplaza desde el punto x_i al punto x_f, su desplazamiento es $\Delta x = x_f - x_i$.

$$\Delta x = x_f - x_i \tag{2.1}$$

DEFINICIÓN —DESPLAZAMIENTO

La notación Δx (léase "delta de x") corresponde a una sola magnitud, el incremento de x (no al producto de Δ por x, como tampoco cos θ es el producto del cos por θ). Por convenio, la variación experimentada por una magnitud es siempre su valor final menos su valor inicial.

Se define la **velocidad media** de la partícula v_m, como el cociente entre el desplazamiento Δx y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \tag{2.2}$$

DEFINICIÓN —VELOCIDAD MEDIA

El desplazamiento y la velocidad media pueden ser positivas o negativas. Un valor positivo indica el movimiento en la dirección x positiva. La unidad del SI de velocidad es el m/s.

EJEMPLO 2.1 | Desplazamiento y velocidad de un cometa

Un cometa que viaja directamente hacia el Sol es detectado por primera vez en $x_i = 3{,}0 \times 10^{12}$ m respecto al Sol (figura 2.2). Exactamente un año después se encuentra en $x_f = 2{,}1 \times 10^{12}$ m. Determinar su desplazamiento y velocidad media.

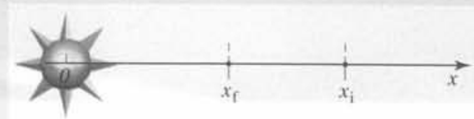


Figura 2.2

Planteamiento del problema Los cometas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol. Aquí se considera la distancia desde el Sol como si el cometa se moviese en una dimensión. Conocemos x_i y x_f. Si elegimos $t_i = 0$ será, $t_f = 1$ año $= 3{,}16 \times 10^7$ s. La velocidad media es $\Delta x/\Delta t$.

1. El desplazamiento se obtiene de su definición:

$$\Delta x = x_f - x_i = (2{,}1 \times 10^{12}\ \text{m}) - (3{,}0 \times 10^{12}\ \text{m}) = -9 \times 10^{11}\ \text{m}$$

2. La velocidad media es el desplazamiento dividido por el intervalo de tiempo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-9 \times 10^{11}\ \text{m}}{3{,}16 \times 10^7\ \text{s}}$$
$$= -2{,}85 \times 10^4\ \text{m/s} = \boxed{-28{,}5\ \text{km/s}}$$

Observación Ambas magnitudes, desplazamiento y velocidad media, son negativos, pues el cometa se mueve hacia los valores más pequeños de x. Obsérvese que las unidades, m para Δx y m/s o km/s para v_m, son partes esenciales de las respuestas. Carece de significado decir que "el desplazamiento es -9×10^{11}" o "la velocidad media de una partícula es $-28{,}5$".

Ejercicio Un avión de reacción sale de Detroit a las 2:15 p.m. y llega a Chicago, a 483 km de distancia, completando el viaje con una velocidad media de 500 km/h. ¿A qué hora llega a Chicago? (*Respuesta* 3:13 p.m., hora de Detroit, que es en realidad 2:13 p.m. hora de Chicago.)

EJEMPLO 2.2 | Camino de la escuela

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Habitualmente tardamos 10 minutos en ir de casa a la escuela situada a 5 km de distancia, yendo por una calle recta. Si un día, salimos de casa 15 min antes del comienzo de la clase, pero nos encontramos con un semáforo estropeado que hace que la velocidad durante los 2 primeros kilómetros sea de 20 km/h, ¿llegaremos a tiempo?

Planteamiento del problema A fin de resolver el problema hay que encontrar el tiempo total que necesitamos para llegar a la escuela. Para ello, hay que calcular el tiempo $\Delta t_{2\,\text{km}}$ durante el cual vamos a 20 km/h y el tiempo $\Delta t_{3\,\text{km}}$ del resto del trayecto, durante el cual la velocidad es la habitual.

1. El tiempo total coincide con el tiempo invertido en los dos primeros kilómetros más el tiempo utilizado para recorrer los tres restantes: $\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\text{ km}} + \Delta t_{3\text{ km}}$

2. Usando $\Delta x = v_m \Delta t$, determinar el tiempo que nos cuesta recorrer los dos primeros kilómetros a 20 km/h: $\Delta t_{2\text{ km}} = \dfrac{\Delta x}{v_m} = \dfrac{2\text{ km}}{20\text{ km/h}} = 0{,}1\text{ h} = 6\text{ min}$

3. Usando $\Delta x = v_m \Delta t$, calcular el tiempo que tardamos en recorrer los tres kilómetros restantes: $\Delta t_{3\text{ km}} = \dfrac{\Delta x}{v_m} = \dfrac{3\text{ km}}{v_{\text{usual}}}$

4. Usando $\Delta x = v_m \Delta t$, despejar v_{usual}, la velocidad que nos permite recorrer 5 km en 10 min: $v_{\text{usual}} = \dfrac{\Delta x_{\text{tot}}}{\Delta t_{\text{usual}}} = \dfrac{5\text{ km}}{10\text{ min}} = 0{,}5\text{ km/min}$

5. Despejar el tiempo $t_{3\text{ km}}$: $\Delta t_{3\text{ mi}} = \dfrac{3\text{ km}}{0{,}5\text{ km/min}} = 6\text{ min}$

6. Despejar el tiempo total: $\Delta t_{\text{tot}} = \Delta t_{2\text{ km}} + \Delta t_{3\text{ km}} = 12\text{ min}$

7. El desplazamiento cuesta 12 minutos comparado con los 10 minutos habituales. Sin embargo, habíamos salido de casa con 15 minutos de antelación, por lo tanto *no llegamos tarde a la escuela*.

El **módulo de la velocidad media** de una partícula es el cociente de la distancia total recorrida y el tiempo total desde el principio al final:

$$\text{Módulo de la velocidad media} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{s}{t} \tag{2.3}$$

La distancia total y el tiempo total son siempre positivos, por lo tanto el módulo de la velocidad media también es siempre positivo.

EJEMPLO 2.3 | Módulo de la velocidad media en una carrera

Un corredor recorre 100 m en 12 s; luego da la vuelta y recorre 50 m más despacio en 30 s y en dirección al punto desde el que inició su movimiento. ¿Cuál es el valor del módulo de la velocidad media y el de la velocidad media para toda su trayectoria?

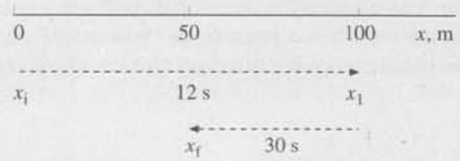


Figura 2.3

Planteamiento del problema Utilizaremos las definiciones de módulo de la velocidad media y velocidad media, recordando que el *módulo de la velocidad media* es la *distancia* total dividida por Δt, mientras que la *velocidad media* es el *desplazamiento neto* dividido por Δt.

(a)

1. El módulo de la velocidad media es igual a la distancia total dividida por el tiempo total: $\text{Módulo de la velocidad media} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

2. Calcular la distancia total recorrida y el tiempo total: $s = s_1 + s_2 = 100\text{ m} + 50\text{ m} = 150\text{ m}$; $t = 12\text{ s} + 30\text{ s} = 42\text{ s}$

3. Utilizar s y t para hallar el módulo de la velocidad media: $\text{Módulo de la velocidad media} = \dfrac{150\text{ m}}{42\text{ s}} = \boxed{3{,}57\text{ m/s}}$

(b)

1. La velocidad media es el cociente del desplazamiento neto Δx y el intervalo de tiempo Δt: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

2. El desplazamiento neto es $x_f - x_i$, en donde $x_i = 0$ es la posición inicial y $x_f = 50$ m es la posición final: $\Delta x = x_f - x_i = 50\text{ m} - 0 = 50\text{ m}$

3. Utilizar Δx y Δt para hallar la velocidad media: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{50\text{ m}}{42\text{ s}} = \boxed{1{,}19\text{ m/s}}$

Comprobar el resultado La marca mundial de una carrera de 100 m está algo por debajo de los 10 s, es decir, 10 m/s es aproximadamente la velocidad máxima que puede obtenerse. El resultado de 3,57 m/s para el módulo de la velocidad media en (a) es razonable, ya que el corredor fue mucho más lentamente durante un tercio de su recorrido. Si el resultado obtenido hubiera sido 35,7 m/s tendríamos razón para pensar que algo había fallado en el cálculo.

Observación El módulo de la velocidad media es mayor que la velocidad media porque la distancia total recorrida es mayor que el desplazamiento total. Nótese también que el desplazamiento neto es la suma de los desplazamientos individuales. Es decir $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (100\text{ m}) + (-50\text{ m})$, que es el resultado del paso 2 de la parte (b).

EJEMPLO 2.4 | La aventura del pájaro viajero

Dos trenes separados 75 km se aproximan uno al otro por vías paralelas, moviéndose cada uno de ellos a 15 km/h. Un pájaro vuela de un tren al otro en el espacio que los separa, hasta que se cruzan. ¿Cuál es la distancia total recorrida por el pájaro si éste vuela a 20 km/h?

Planteamiento del problema Este problema parece difícil a primera vista, pero realmente es muy simple si se enfoca adecuadamente. Para ello escribiremos en primer lugar una ecuación para la magnitud a determinar, es decir, la distancia total Δs recorrida por el pájaro.

1. La distancia total es igual al módulo de la velocidad media multiplicado por el tiempo:

$$s = (\text{módulo de la velocidad media})_{\text{pájaro}} \times t$$
$$= (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t$$

2. El tiempo que el pájaro está en el aire es igual al tiempo que los trenes tardan en encontrarse. La suma de las distancias recorridas por los dos trenes es $D = 75$ km. Determinar el tiempo que tardan los dos trenes en recorrer una distancia total D:

$$s_1 + s_2 = (\text{velocidad})_{\text{m }1} \times t + (\text{velocidad})_{\text{m }2} \times t = D$$

por lo tanto

$$t = \frac{D}{(\text{velocidad})_{\text{m }1} + (\text{velocidad})_{\text{m }2}}$$

3. La distancia total recorrida por el pájaro es, por lo tanto:

$$s = (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \times t$$
$$= (\text{velocidad})_{\text{m pájaro}} \frac{D}{(\text{velocidad})_{\text{m }1} + (\text{velocidad})_{\text{m }2}}$$
$$= 20\text{ km/h}\frac{75\text{ km}}{15\text{ km/h} + 15\text{ km/h}} = \boxed{50\text{ km}}$$

Observación Algunos tratan de resolver este problema determinando y sumando las distancias recorridas por el pájaro cada vez que se mueve de un tren al otro. Este sistema es muy complejo. Es importante desarrollar un enfoque meditado y sistemático para resolver los problemas. Es útil comenzar por escribir una ecuación que relacione la magnitud desconocida en función de otras magnitudes. Después se procede a determinar los valores de cada una de las restantes magnitudes de la ecuación.

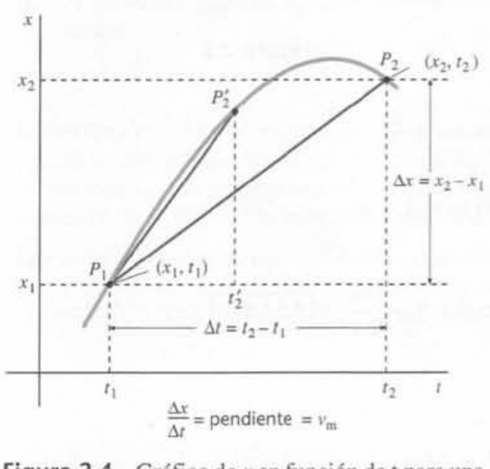


Figura 2.4 Gráfico de x en función de t para una partícula que se mueve en una dimensión. Cada punto de la curva representa la posición x en un tiempo determinado t. Se ha dibujado una línea recta entre las posiciones P_1 y P_2. El desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ se indican en la figura. La línea recta entre P_1 y P_2 es la hipotenusa del triángulo de lados Δx y Δt y la relación $\Delta x/\Delta t$ es su pendiente. En términos geométricos, la pendiente es una medida de la inclinación de la recta.

La figura 2.4 representa gráficamente la velocidad media. Una línea recta une los puntos P_1 y P_2 y forma la hipotenusa del triángulo de catetos Δx y Δt. El cociente $\Delta x/\Delta t$ es la **pendiente** de la línea y nos ofrece una interpretación geométrica de la velocidad media:

La velocidad media es la pendiente de la línea recta que conecta los puntos (t_1, x_1) y (t_2, x_2).

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA VELOCIDAD MEDIA

En general, la velocidad media depende del intervalo de tiempo escogido. Por ejemplo, si en la figura 2.4 tomamos un intervalo menor de tiempo, escogiendo un instante t_2' más próximo a t_1, la velocidad media será mayor, según indica la mayor inclinación de la línea que une los puntos P_1 y P_2'.

Velocidad instantánea

A primera vista puede parecer imposible definir la velocidad de la partícula en un solo instante, es decir, en un tiempo específico. En un instante determinado la partícula está en un solo punto. Si está en un solo punto, ¿cómo puede estar moviéndose? Por otra parte, si no se está moviendo, ¿cómo puede tener velocidad? Esto constituye una antigua paradoja que puede resolverse cuando nos damos cuenta que para observar el movimiento y así definirlo, debemos observar la posición del objeto en más de un instante. Entonces resulta posible definir la velocidad en un instante mediante un proceso de paso al límite. Veamos ahora la figura 2.5. Cuando consideramos sucesivamente intervalos de tiempo más cortos a partir de t_1, la velocidad media para cada intervalo se aproxima más a la pendiente de la tangente en t_1. La pendiente de esta tangente se define como la **velocidad instantánea** en t_1. Esta tangente es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt y, por lo tanto, Δx se aproximan a cero. Así podremos decir,

La velocidad instantánea es el límite de la relación $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se aproxima al valor cero.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{pendiente de la línea tangente a la curva } x \text{ función de } t^1 \qquad (2.4)$$

DEFINICIÓN —VELOCIDAD INSTANTÁNEA

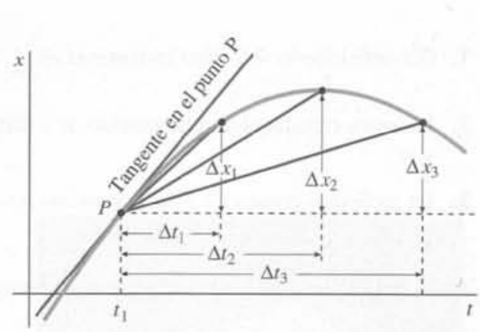


Figura 2.5 Gráfico de x en función de t. Obsérvese la secuencia de intervalos de tiempo sucesivamente más pequeños Δt_1, Δt_2, Δt_3, …. La velocidad media de cada intervalo es la pendiente de la línea recta para dicho intervalo. A medida que los intervalos se hacen más pequeños, estas pendientes se aproximan a la pendiente de la tangente a la curva en el punto t_1. La pendiente de esta línea se define como la velocidad instantánea en el tiempo t_1.

Este límite se denomina **derivada** de x respecto a t. La notación usual para la derivada es dx/dt:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad (2.5)$$

Esta pendiente puede ser positiva, negativa o nula; por consiguiente, en un movimiento unidimensional la velocidad instantánea puede ser positiva (x creciente) o negativa (x decreciente) o nula (no hay movimiento). Su módulo lo denominamos **módulo de la velocidad instantánea**.

EJEMPLO 2.5 | Posición de una partícula en función del tiempo

La posición de una partícula viene descrita por la función indicada en la figura 2.6. Hallar la velocidad instantánea en el instante $t = 2$ s. ¿Cuándo es mayor la velocidad? ¿Cuándo es nula? ¿Es negativa alguna vez?

Planteamiento del problema En la figura 2.6 hemos dibujado la línea de tangente a la curva en el instante $t = 2$ s. La pendiente de la línea tangente es la velocidad instantánea de la partícula en el tiempo dado. Puede utilizarse esta figura para medir la pendiente de la línea tangente.

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

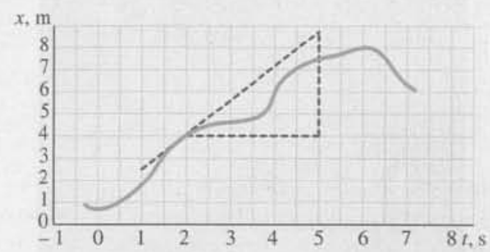


Figura 2.6

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Determinar los valores x_1 y x_2 sobre la línea tangente en los instantes $t_1 = 2$ s y $t_2 = 5$ s.	$x_1 \approx 4$ m, $\quad x_2 \approx 8{,}5$ m
2. Calcular la pendiente de la línea tangente a partir de estos valores. Esta pendiente es igual a la velocidad instantánea en $t = 2$ s.	$v = \text{pendiente} \approx \dfrac{8{,}5\text{ m} - 4\text{ m}}{5\text{ s} - 2\text{ s}} = \boxed{1{,}5\text{ m/s}}$
3. Según la figura, la pendiente (y por lo tanto, la velocidad instantánea) es mayor en aproximadamente $t = 4$ s. La pendiente y la velocidad son cero para $t = 0$ y $t = 6$ s y son negativas antes de 0 y después de 6 s.	

Ejercicio ¿Cuál es la velocidad media de esta partícula entre $t = 2$ s y $t = 5$ s? (*Respuesta* 1,17 m/s.)

EJEMPLO 2.6 | Caída de una piedra desde un acantilado

La posición de una piedra que a partir del reposo se deja caer desde un acantilado viene dada por $x = 5t^2$, en donde x se mide en metros y hacia abajo desde la posición inicial cuando $t = 0$, y t se expresa en segundos. Hallar la velocidad en un instante t cualquiera. (Se omite la indicación explícita de la unidades para simplificar la notación.)

Planteamiento del problema Podemos calcular la velocidad de un instante determinado t calculando la derivada dx/dt directamente a partir de su definición en la ecuación 2.4. En la figura 2.7 se muestra la curva correspondiente que nos da x en función de t. Las líneas tangentes están dibujadas en los tiempos t_1, t_2 y t_3. Las pendientes de estas líneas tangentes crecen uniformemente, indicando que la velocidad instantánea crece uniformemente con el tiempo.

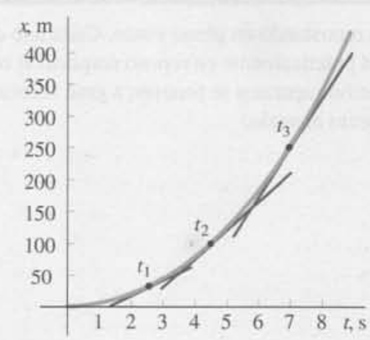


Figura 2.7

1. La pendiente de la línea tangente a la curva suele llamarse de un modo más simple "pendiente de la curva".

1. Por definición la velocidad instantánea es: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

2. Podemos calcular el desplazamiento Δx a partir de la función posición $x(t)$: $x(t) = 5t^2$

3. En un tiempo posterior $t + \Delta t$, la posición $x(t + \Delta t)$ viene dada por:
$$x(t + \Delta t) = 5(t + \Delta t)^2 = 5[t^2 + 2t\ \Delta t + (\Delta t)^2]$$
$$= 5t^2 + 10t\ \Delta t + 5(\Delta t)^2$$

4. El desplazamiento para este intervalo de tiempo será:
$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$$
$$= [5t^2 + 10t\ \Delta t + 5(\Delta t)^2] - 5t^2$$
$$= 10t\ \Delta t + 5(\Delta t)^2$$

5. Dividir Δx por Δt para determinar la velocidad media en este intervalo de tiempo: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10t\ \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t + 5\ \Delta t$

6. A medida que consideramos intervalos de tiempo cada vez más cortos, Δt se aproxima a cero y el segundo termino, $5\Delta t$, tiende a cero; en cambio, el primer término, $10t$, permanece invariable: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (10t + 5\Delta t) = \boxed{10t}$

Observación Si hubiéramos hecho $\Delta t = 0$ en los pasos 4 y 5, el desplazamiento hubiera sido $\Delta x = 0$, en cuyo caso la relación $\Delta x/\Delta t$ quedaría indefinida. En su lugar, hemos dejado Δt como una variable hasta el paso final, cuando el límite $\Delta t \to 0$ está bien definido.

Para determinar las derivadas rápidamente se utilizan reglas basadas en estos pasos al límite (véase Apéndice Tabla D.4). Una regla particularmente útil es

$$\text{Si } x = Ct^n, \quad \text{entonces} \quad \frac{dx}{dt} = Cnt^{n-1} \tag{2.6}$$

en donde C y n son constantes. Utilizando esta regla en el ejemplo 2.6 resulta $x = 5t^2$ y $v = dx/dt = 10t$, de acuerdo con los resultados anteriores.

Aviones repostando en pleno vuelo. Cada uno de ellos está prácticamente en reposo respecto al otro, si bien ambos aparatos se mueven a gran velocidad con respecto al suelo.

Velocidad relativa

Si usted está sentado en un avión que se mueve a 800 km/h hacia el este, su velocidad también es de 800 km/h hacia el este. Sin embargo, 800 km/h hacia el este podría ser su velocidad relativa a la superficie de la Tierra o su velocidad relativa al aire exterior del aparato. (Si el avión vuela dentro de una corriente en chorro, estas dos velocidades podrían ser distintas.) Además, su velocidad es cero si se mide respecto del avión. Por lo tanto, para especificar la velocidad de una partícula, debe también especificarse el **sistema de referencia**. En esta discusión se han concretado tres sistemas de referencia: la superficie de la Tierra, el aire exterior del avión y el propio aparato.

Un sistema de referencia es un objeto material cuyas partes están en reposo entre sí.

DEFINICIÓN—SISTEMA DE REFERENCIA

Para medir la posición de un objeto se usan ejes de coordenadas fijos a sistemas de referencia. La posición de un viajero, si éste está sentado en su asiento, es constante, en relación a un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto del avión. Sin embargo, para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de la superficie de la Tierra o para un sistema de coordenadas horizontal fijo respecto de un globo que flota en el aire exterior al avión, la posición del viajero cambia continuamente. Si tiene problemas para imaginarse un sistema de coordenadas fijo en el aire exterior, imagínese un sistema de coordenadas ligado a un globo que flota en el aire. El aire y el globo están en reposo mutuo, por lo cual forman un sistema de referencia único.

Si una partícula se mueve con velocidad v_{pA} en relación al sistema de coordenadas A y éste a su vez se mueve con velocidad v_{AB} en relación a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula relativa a B es

$$v_{pB} = v_{pA} + v_{AB} \tag{2.7a}$$

Por ejemplo, si una persona nada en un río paralelamente a la dirección de la corriente, su velocidad relativa a la orilla, v_{po}, es igual a la velocidad vectorial relativa al agua, v_{pa}, más la velocidad del agua relativa a la orilla, v_{ao}:

$$v_{po} = v_{pa} + v_{ao}$$

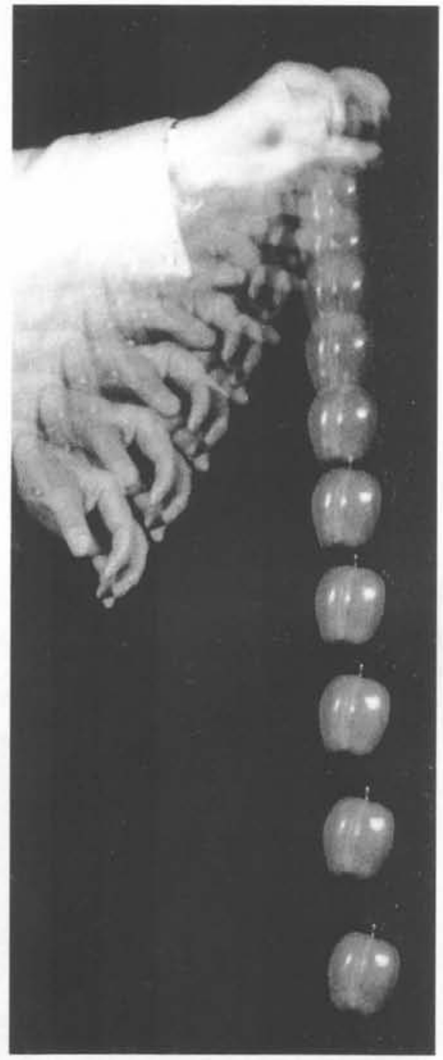
Si la persona nada a 2 m/s contra la corriente y la velocidad vectorial del agua relativa a la orilla es de 1,2 m/s, su velocidad respecto a la orilla será $v_{po} = -2$ m/s + 1,2 m/s = −0,8 m/s, en donde hemos escogido la dirección de la corriente como sentido positivo.

Una gran sorpresa para los científicos de nuestro siglo fue el descubrimiento de que la ecuación 2.7a es sólo una aproximación. Un estudio de la teoría de la relatividad nos muestra que la expresión exacta para las velocidades relativas es

$$v_{pB} = \frac{v_{pA} + v_{AB}}{1 + v_{pA}v_{AB}/c^2} \tag{2.7b}$$

en donde $c = 3 \times 10^8$ m/s es la velocidad de la luz en el vacío. En todos los casos cotidianos con objetos macroscópicos, v_{pA} y v_{AB} son velocidades mucho menores que c, con lo cual las ecuaciones 2.7a y 2.7b coinciden, pero si se trata de velocidades muy elevadas, tales como la velocidad de un electrón o la velocidad de las galaxias distantes que se alejan de la Tierra, la diferencia entre estas dos ecuaciones puede ser importante. La ecuación 2.7b tiene la interesante propiedad de que si $v_{pA} = c$, entonces v_{pB} también es igual a c, lo cual es un postulado de la relatividad, a saber, la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia que se mueven con velocidad constante relativa entre sí.

Ejercicio Use la ecuación 2.7b sustituyendo c por v_{pA} y resuelva para v_{pB}. Observe entonces que la ecuación 2.7b está de acuerdo con el resultado que dice "la velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas de referencia".



Fotografía estroboscópica de la caída de una manzana a 60 destellos por segundo. La aceleración de la manzana viene indicada por el mayor espaciado que se observa en las imágenes inferiores.

2.2 Aceleración

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad instantánea. Cuando, por ejemplo, un conductor aprieta el pedal del acelerador de su coche, espera cambiar su velocidad. La **aceleración media** en un intervalo particular de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, se define como el cociente $\Delta v/\Delta t$, en donde $\Delta v = v_2 - v_1$:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.8}$$

DEFINICIÓN —ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración tiene las dimensiones de una longitud dividida por el tiempo al cuadrado. La unidad en el SI es m/s^2. (En la ecuación 2.8, si el numerador está en m/s y el denominador en s, las unidades de $\Delta v/\Delta t$ son (m/s)/s. Multiplicando el numerador y el denominador por 1 s, encontramos que las unidades de $\Delta v/\Delta t$ son m/s^2.) Podemos escribir la ecuación 2.8 como $\Delta v = a_m \Delta t$. Por ejemplo, si decimos que una partícula tiene una aceleración de 5,1 m/s^2, ello quiere decir que, si parte del reposo, después de 1 s se moverá con una velocidad de 5,1 m/s; después de 2 s, lo hará con una velocidad de 10,2 m/s y así sucesivamente. La **aceleración instantánea** es el límite del cociente $\Delta v/\Delta t$ cuando Δt tiende a cero. Si representamos la velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en el tiempo t se define como la pendiente de la línea tangente a la curva en ese tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.9}$$

$$= \text{pendiente de la línea tangente a la curva de } v \text{ en función de } t$$

DEFINICIÓN —ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

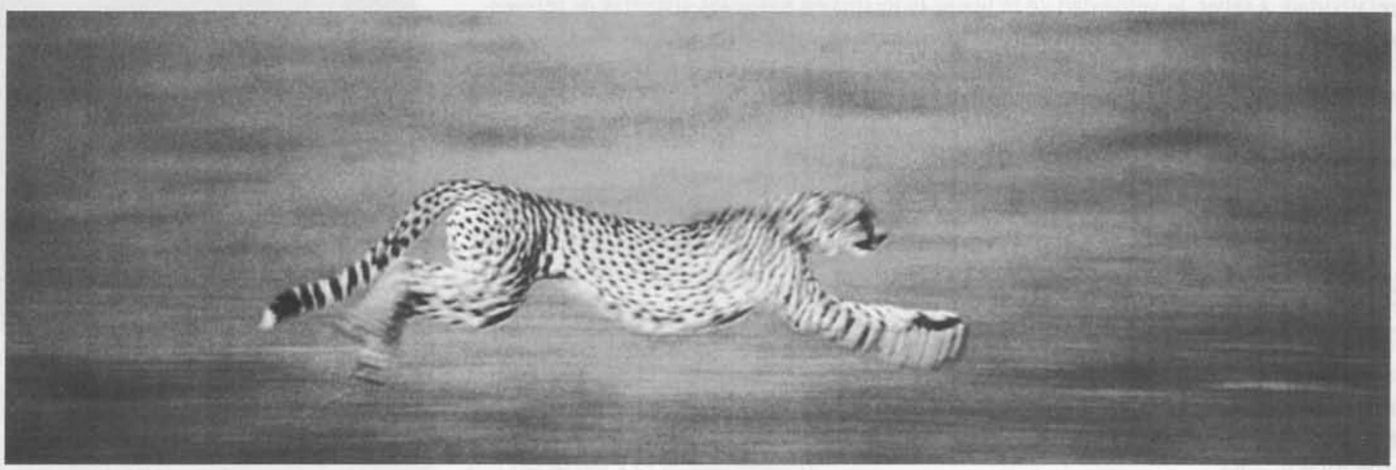
La aceleración es, por lo tanto, la derivada de la velocidad vectorial respecto al tiempo dv/dt. Como la velocidad es también la derivada de la posición x respecto a t, la aceleración es la segunda derivada de x respecto a t, d^2x/dt^2. Podemos ver el origen de esta notación escribiendo la aceleración como dv/dt y sustituyendo v por dx/dt:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(dx/dt)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.10}$$

Si la aceleración es cero, no hay cambio de velocidad con el tiempo, es decir, la velocidad es constante. En este caso, la curva de x en función de t es una línea recta. Si la aceleración no es nula, pero es constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la curva de x en función de t es cuadrática con el tiempo.

EJEMPLO 2.7 | Un felino rápido

Un guepardo puede acelerar de 0 a 96 km/h en 2 s, mientras que una moto requiere 4,5 s. Calcular las aceleraciones medias del guepardo y de la moto y compararlas con la aceleración de caída libre debida a la gravedad, $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.



1. Determinar la aceleración media a partir de los datos suministrados:

   Guepardo $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{96\ \mathrm{km/h} - 0}{2\ \mathrm{s}} = 48\ \mathrm{km/(h \cdot s)}$

   Moto $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{96\ \mathrm{km/h} - 0}{4{,}5\ \mathrm{s}} = 21{,}3\ \mathrm{km/(h \cdot s)}$

2. Convertir a m/s^2 sabiendo que 1 h = 3600 s = 3,6 ks:

   Guepardo $\dfrac{48\ \mathrm{km}}{\mathrm{h \cdot s}} \times \dfrac{1\ \mathrm{h}}{3{,}6\ \mathrm{ks}} = 13{,}3\ \mathrm{m/s^2}$

   Moto $\dfrac{21{,}3\ \mathrm{km}}{\mathrm{h \cdot s}} \times \dfrac{1\ \mathrm{h}}{3{,}6\ \mathrm{ks}} = 5{,}92\ \mathrm{m/s^2}$

3. Comparar los resultados con la aceleración de la gravedad, multiplicando por el factor de conversión $1g/(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})$:

   Guepardo $13{,}3\ \mathrm{m/s^2} \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = \boxed{1{,}36g}$

   Moto $5{,}92\ \mathrm{m/s^2} \times \dfrac{1g}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}} = \boxed{0{,}60g}$

Observación Al expresar el tiempo en kilosegundos, los prefijos kilo (k) se cancelan mutuamente.

Ejercicio Un coche se mueve a 45 km/h en el tiempo $t = 0$. El coche acelera de forma constante a razón de 10 km/(h · s). *(a)* ¿Cuál es su velocidad cuando $t = 2$ s? *(b)* ¿En qué momento el coche se mueve a 70 km/h?

(*Respuestas* *(a)* 65 km/h, *(b)* 2,5 s.)

Ejercicio de análisis dimensional Si un coche parte del reposo desde $x = 0$ con aceleración constante a, su velocidad v depende de a y de la distancia recorrida x. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene las dimensiones correctas y por lo tanto, corresponde a una ecuación posible que relaciona x, a y v?

(a) $v = 2ax$ *(b)* $v^2 = 2a/x$ *(c)* $v = 2ax^2$ *(d)* $v^2 = 2ax$

(*Respuesta* Sólo *(d)* posee las mismas dimensiones a ambos lados de la ecuación. Aunque el análisis dimensional no nos permite obtener la ecuación exacta, con frecuencia es útil para obtener la dependencia funcional.)

EJEMPLO 2.8 | La velocidad y la aceleración en función del tiempo

La posición de una partícula viene dada por $x = Ct^3$, siendo C una constante cuyas unidades son m/s^3. Hallar la velocidad y aceleración en función del tiempo.

1. La velocidad puede determinarse aplicando $dx/dt = Cnt^{n-1}$ (ecuación 2.6):
$$x = Ct^3$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \boxed{3Ct^2}$$

2. La derivada de la velocidad respecto al tiempo nos da la aceleración:
$$a = \frac{dv}{dt} = \boxed{6Ct}$$

Comprobar el resultado Podemos comprobar las unidades de nuestras respuestas. Para la velocidad $[v] = [C][t^2] = (\text{m/s}^3)(\text{s}^2) = \text{m/s}$. Para la aceleración $[a] = [C][t] = (\text{m/s}^3)(\text{s}) = \text{m/s}^2$.

2.3 Movimiento con aceleración constante

El movimiento de una partícula que tiene aceleración constante es corriente en la naturaleza. Por ejemplo, cerca de la superficie de la Tierra todos los objetos caen verticalmente con aceleración de la gravedad constante (si puede despreciarse la resistencia del aire). Si una partícula tiene una aceleración constante a, su aceleración media en cualquier intervalo de tiempo es también a. Es decir,

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a \tag{2.11}$$

Si la velocidad es v_0 en el tiempo $t = 0$ y v al cabo de cierto tiempo t, la aceleración correspondiente es

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

Reajustando esta expresión se obtiene v en función de t.

$$v = v_0 + at \tag{2.12}$$

ACELERACIÓN CONSTANTE, v EN FUNCIÓN DE t

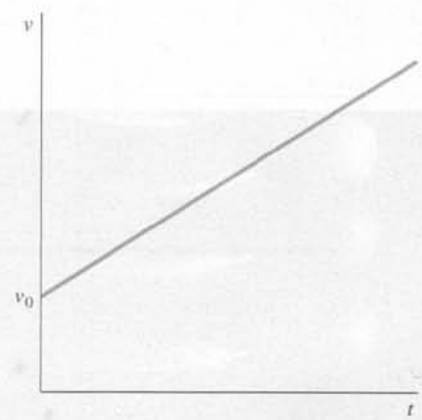


Figura 2.8 Gráfico de la velocidad en función del tiempo con aceleración constante.

Esta es la ecuación de una línea recta en un gráfico de v en función de t (figura 2.8). La pendiente de la línea es la aceleración a y su intersección con el eje vertical es la velocidad inicial v_0.

"*Va de cero a 60 en unos 3 segundos.*" © Sydney Harris

El desplazamiento $\Delta x = x - x_0$ en el intervalo de tiempo $\Delta t = t - 0$ es

$$\Delta x = v_m \, \Delta t = v_m t \tag{2.13}$$

Para una aceleración constante, la velocidad varía linealmente con el tiempo y la velocidad media es el valor medio de las velocidades inicial y final. (Esta relación es válida sólo si la aceleración es constante.) Si v_0 es la velocidad inicial y v la velocidad final, la velocidad media es

$$v_m = \tfrac{1}{2}(v_0 + v) \tag{2.14}$$

ACELERACIÓN CONSTANTE, v_m

El desplazamiento es, por lo tanto,

$$\Delta x = x - x_0 = v_m t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{2.15}$$

Podemos eliminar v sustituyendo $v = v_0 + at$ de la ecuación 2.12:

$$\Delta x = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

El desplazamiento es, así:

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{2.16}$$

ACELERACIÓN CONSTANTE, $x(t)$

El término $v_0 t$ representa el desplazamiento que tendría lugar si a fuera cero y el término $\tfrac{1}{2}at^2$ es el desplazamiento adicional debido a la aceleración constante.

Eliminando t entre las ecuaciones 2.12 y 2.14 se obtiene una expresión entre Δx, a, v y v_0. De la ecuación 2.12, $t = (v - v_0)/a$ y sustituyendo en la ecuación 2.14 se obtiene

$$\Delta x = v_m t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)\,\frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

es decir

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x \tag{2.17}$$

ACELERACIÓN CONSTANTE

La ecuación 2.17 es útil, por ejemplo, si se trata de determinar la velocidad de una pelota que se ha dejado caer desde cierta altura x cuando no nos interesa conocer el tiempo de caída.

Problemas con un objeto

Muchos problemas prácticos se refieren a objetos en caída libre, es decir, objetos que caen bajo la única influencia de la gravedad. Todos los objetos en caída libre que parten de la misma velocidad inicial se mueven de forma idéntica. Como se ve en la figura 2.9, se sueltan desde el reposo, simultáneamente, una pluma y una manzana en una cámara de vacío, de modo que caen con el mismo movimiento. Ambos objetos tienen la misma aceleración. El módulo de la aceleración causada por la gravedad se designa por g, cuyo valor aproximado es

$$g \approx 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

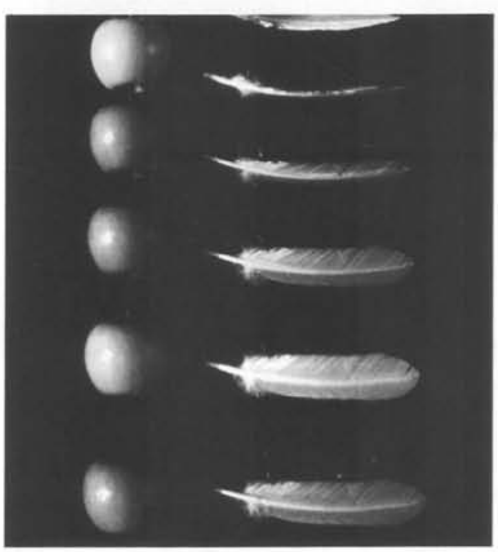


Figura 2.9

Como g es el *módulo* de una aceleración, siempre es positiva. Si la dirección hacia abajo se considera positiva, la aceleración debida a la gravedad es $a = g$; si se considera positiva hacia arriba, entonces $a = -g$.

EJEMPLO 2.9 | El birrete volador

Un estudiante de física contento por su graduación lanza su birrete hacia arriba con una velocidad inicial de 14,7 m/s. Considerando que su aceleración es 9,81 m/s² hacia abajo (despreciamos la resistencia del aire), (*a*) ¿cuánto tiempo tardará el birrete en alcanzar su punto más alto? (*b*) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? (*c*) Suponiendo que el birrete se recoge a la misma altura de la que ha salido, ¿cuánto tiempo permanece en el aire?

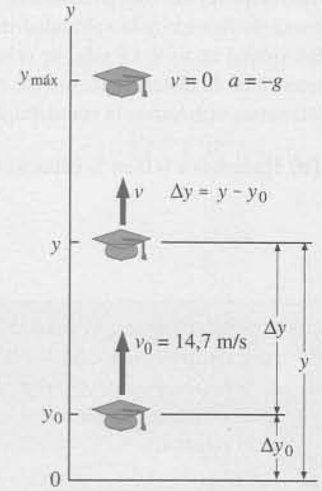


Figura 2.10

Planteamiento del problema Cuando el birrete alcanza su punto más alto, su velocidad instantánea es cero. Así convertimos la expresión "punto más alto" a la condición matemática $v = 0$.

(a) 1. Dibujar el birrete en su posición inicial y en el punto más alto de su trayectoria. Incluir un eje de coordenadas y señalar el origen y las dos posiciones del birrete.

2. El tiempo se relaciona con la velocidad y la aceleración:

$$v = v_0 + at$$

3. Calcular el tiempo que tarda el birrete en alcanzar su altura máxima. Para ello hacer $v = 0$ y despejar t:

$$t = \frac{0 - v_0}{a} = \frac{-14{,}7 \text{ m/s}}{-9{,}81 \text{ m/s}^2} = \boxed{1{,}50 \text{ s}}$$

(b) Determinar la distancia recorrida a partir del tiempo t y la velocidad media:

$$\Delta y = v_m t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t = \tfrac{1}{2}(14{,}7 \text{ m/s} + 0)(1{,}50 \text{ s}) = \boxed{11{,}0 \text{ m}}$$

(c) 1. Para calcular el tiempo total hacemos $\Delta y = 0$ en la ecuación 2.16 y despejamos t:

$$\Delta y = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$0 = (v_0 + \tfrac{1}{2}at)t$$

2. Hay dos soluciones para t cuando $\Delta y = 0$. La primera corresponde al tiempo en que se lanza el birrete y la segunda corresponde al tiempo en que se recoge:

$$t = 0 \qquad \text{(primera solución)}$$

$$t = -\frac{2v_0}{a} = -\frac{2(14{,}7 \text{ m/s})}{-9{,}80 \text{ m/s}^2} = \boxed{3 \text{ s}} \qquad \text{(segunda solución)}$$

Observación La solución $t = 3$ s también resulta de la simetría del sistema. El tiempo que tarda el birrete en caer desde la altura máxima es el mismo que transcurre hasta alcanzar dicha altura (figura 2.11). En realidad, el birrete no está sometido a una aceleración constante debido a que la resistencia del aire sobre un objeto ligero como es el birrete ejerce un efecto significativo. Si la resistencia del aire no es despreciable, el tiempo de caída es mayor que el de subida.

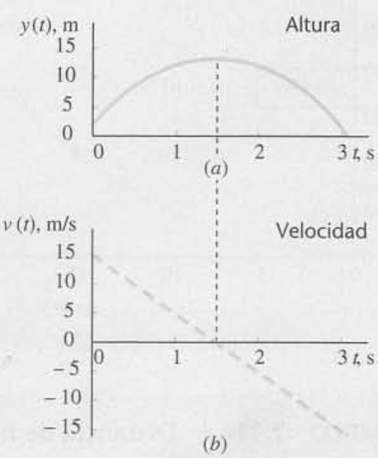


Figura 2.11

Ejercicio Calcular $y_{máx} - y_0$ utilizando (*a*) la ecuación 2.15 y (*b*) la ecuación 2.16. (*c*) Determinar la velocidad del birrete cuando vuelve a su punto de partida. (*Respuestas* (*a*) y (*b*) $y_{máx} - y_0 = 11{,}0$ m, (*c*) −14,7 m/s; obsérvese que la velocidad final es la misma que la velocidad inicial.)

Ejercicio ¿Cuál es la velocidad del birrete (*a*) 0,1 s antes de que alcance su punto más alto y (*b*) 0,1 s después de alcanzar su punto más alto? (*c*) Calcular $\Delta v/\Delta t$ para este intervalo de tiempo de 0,2 s. (*Respuestas* (*a*) +0,981 m/s, (b) −0,981 m/s, (*c*) [(−0,981 m/s − (+0,981 m/s)]/(0,2 s) = −9,81 m/s².)

Ejercicio Un coche acelera desde el reposo a 8 m/s². (*a*) ¿Qué velocidad lleva al cabo de 10 s? (*b*) ¿Qué distancia ha recorrido después de 10 s? (*c*) ¿Cuál es su velocidad media en el intervalo $t = 0$ a $t = 10$ s? (*Respuestas* (*a*) 80 m/s, (*b*) 400 m, (*c*) 40 m/s.)

El ejemplo siguiente se refiere a la **distancia de frenado** de un coche, es decir, al espacio que recorre desde que comienza a frenar hasta que se detiene.

EJEMPLO 2.10 | Distancia de frenado de un vehículo

Una persona que conduce un vehículo de noche por una autopista ve de pronto a cierta distancia un coche parado y frena hasta detenerse con una aceleración de 5 m/s² (una aceleración que reduce la velocidad suele llamarse desaceleración). ¿Cuál es la distancia de frenado del vehículo si su velocidad inicial es (*a*) 15 m/s o (*b*) 30 m/s?

Planteamiento del problema Si elegimos la dirección del movimiento como positiva, la distancia de frenado y la velocidad inicial son positivas pero la aceleración es negativa. Así, la velocidad inicial es $v_0 = 15$ m/s, la velocidad final es $v = 0$ y la aceleración es $a = -5$ m/s^2. Queremos determinar la distancia recorrida, Δx. Como no necesitamos conocer el tiempo que tarda el coche en detenerse, utilizamos la ecuación 2.17 como la más conveniente.

(a) Hacemos $v = 0$ en la ecuación 2.17: Despejamos Δx:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$$

por lo tanto

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0^2 - v_0^2}{2a} = \frac{-v_0^2}{2a} = -\frac{(15\text{ m/s})^2}{2(-5\text{ m/s}^2)} = \boxed{22{,}5\text{ m}}$$

(b) A partir del apartado anterior vemos que si $v = 0$, $\Delta x = -v_0^2/(2a)$. Así, Δx es proporcional al cuadrado de la velocidad inicial. Haciendo uso de esta observación y del resultado del apartado (*a*), encontrar la distancia de frenado para una velocidad inicial el doble de la del apartado anterior.

$$\Delta x = 2^2(22{,}5\text{ m}) = \boxed{90\text{ m}}$$

Observación La respuesta (b) también puede obtenerse sustituyendo directamente la velocidad inicial de 30 m/s en la expresión de Δx deducida en el apartado (a). Noventa metros es una distancia considerable, aproximadamente la longitud de un campo de fútbol. El incremento de v_0 en un factor 2 modifica la distancia de frenado en un factor $2^2 = 4$ (ver figura 2.12). La consecuencia práctica de esta dependencia cuadrática es que incluso incrementos modestos en la velocidad originan aumentos importantes en la distancia de frenado.

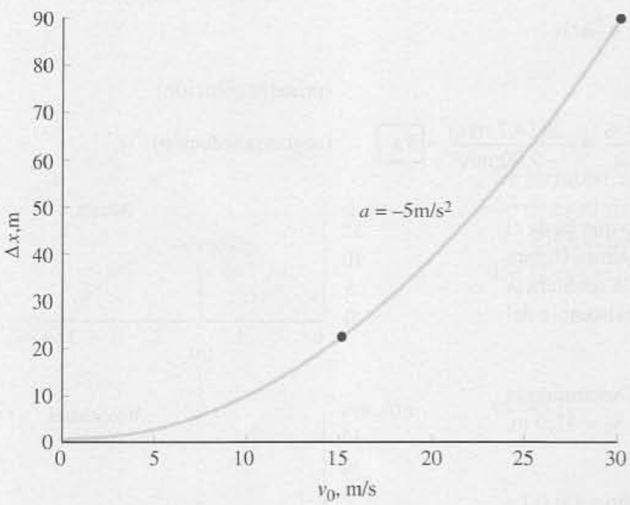


Figura 2.12 Distancia de frenado en función de la velocidad inicial. La curva muestra el caso del ejemplo 2.10, en que la aceleración es $a = -5{,}0$ m/s^2; los puntos que se muestran en la curva son las soluciones de los apartados (a) y (b).

EJEMPLO 2.11 | Distancia de frenado — *¡INTÉNTELO USTED MISMO!*

En el ejemplo 2.10, (*a*) ¿cuánto tiempo tarda el coche en detenerse si su velocidad inicial es 30 m/s? (*b*) ¿Qué distancia recorre el coche durante el último segundo?

Planteamiento del problema (*a*) Excepto en los valores, este ejemplo coincide con el apartado (a) del ejemplo 2.9. Utilizar el mismo procedimiento que se ha mostrado en el ejemplo 2.10. (*b*) Como la velocidad disminuye en 5 m/s cada segundo, la velocidad que tendrá el coche 1 s antes de detenerse debe ser de 5 m/s. Determinar la velocidad media durante el último segundo y con ella calcular la distancia recorrida.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) Determinar el tiempo total de frenado.	$t = 6$ s
(b) 1. Calcular la velocidad media durante el último segundo.	$v_m = \boxed{2{,}5\text{ m/s}}$
2. Calcular la distancia recorrida a partir de $\Delta x = \bar{v}_m \Delta t$.	$\Delta x_1 = v_m \Delta t = \boxed{2{,}5\text{ m}}$

Observación Si el apartado (b) hubiera preguntado por la velocidad media durante los últimos 1,3 segundos (en vez de durante el último segundo), se hubiera podido determinar la velocidad inicial v_1 durante este intervalo a partir de la ecuación 2.11 $\Delta v = a\Delta t$.

A veces nos podemos formar una imagen valiosa sobre el movimiento de un objeto suponiendo que podemos aplicar las fórmulas para la aceleración constante aunque ésta, en realidad, no lo sea. Éste es el caso del ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2.12 | El choque de prueba

Un coche que va a 100 km/h choca contra una pared de hormigón rígida. ¿Cuál es su aceleración?

Planteamiento del problema En este ejemplo no es correcto considerar el coche como una partícula, ya que las distintas partes del mismo sufrirán aceleraciones distintas al arrugarse sobre la pared. Además, estas aceleraciones no son constantes. Sin embargo *podemos* obtener una respuesta aproximada suponiendo que una partícula puntual localizada en el centro del coche posee una aceleración constante. Para resolver este problema necesitamos más información: la distancia de detención o el tiempo de detención del coche. Podemos estimar la distancia de detención utilizando el sentido común. Después del impacto, el centro del coche se desplazará hacia adelante algo menos que la mitad de la longitud del coche. Tomaremos para nuestra estimación el valor razonable de 0,75 m. Como el problema no nos proporciona el tiempo, utilizaremos la relación $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.

1. Usando $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, obtener la aceleración:

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

por lo tanto

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} = \frac{0^2 - (100\ \text{km/h})^2}{2(0{,}75\ \text{m})}$$

2. Convertir la velocidad expresada en km/h en m/s. En una hora hay 60^2 s = 3,6 ks:

$$(100\ \text{km/h}) \times \left(\frac{1\ \text{h}}{3{,}6\ \text{ks}}\right) = 27{,}8\ \text{m/s}$$

3. Completar el cálculo de la aceleración:

$$a = \frac{0^2 - (100\ \text{km/h})^2}{2(0{,}75\ \text{m})} = -\frac{(27{,}8\ \text{m/s})^2}{1{,}5\ \text{s}} = -514\ \text{m/s}^2 \approx \boxed{-500\ \text{m/s}^2}$$

Observación Nótese que el módulo de esta aceleración es superior a $50g$. Esta estimación de la aceleración se basa en las suposiciones de que el desplazamiento del centro del coche es de 0,75 m y que la aceleración es constante.

EJEMPLO 2.13 | El movimiento de un electrón

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un electrón en un tubo de rayos catódicos acelera desde el reposo con una aceleración de $5{,}33 \times 10^{12}$ m/s² durante 0,15 μs (1 μs = 10^{-6} s). Después, el electrón se mueve con velocidad constante durante 0,2 μs. Finalmente alcanza el reposo con una aceleración de $-2{,}67 \times 10^{13}$ m/s². ¿Qué distancia total recorre el electrón?

Planteamiento del problema Las ecuaciones de aceleración constante no se pueden aplicar directamente a este problema, ya que la aceleración del electrón varía con el tiempo. Dividir el movimiento del electrón en tres intervalos, cada uno con una aceleración constante distinta y utilizar la posición y velocidad finales de cada intervalo como condiciones iniciales para el intervalo siguiente. Tomar como origen la posición de partida del electrón y asignar la dirección positiva a la dirección del movimiento.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Determinar el desplazamiento y la velocidad final en el primer intervalo de 0,15 μs.	$\Delta x_1 = 6{,}00$ cm; $v_1 = 8{,}00 \times 10^5$ m/s
2. Utilizar esta velocidad final como velocidad constante para determinar el desplazamiento mientras se mueve uniformemente.	$\Delta x_2 = 16$ cm

3. Utilizar esta misma velocidad como valor inicial y la ecuación 2.17 con $v = 0$ para determinar el desplazamiento del tercer intervalo, en el cual el electrón termina en reposo. — $\Delta x_3 = 1{,}20\text{ cm}$

4. Sumar los desplazamientos obtenidos en los pasos 1, 2 y 3 para calcular el recorrido total. — $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 6{,}00\text{ cm} + 16\text{ cm} + 1{,}20\text{ cm} = \boxed{23{,}2\text{ cm}}$

Observación En un aparato de rayos X los electrones son acelerados desde un alambre caliente hacia un blanco metálico. Al chocar contre éste, se paran bruscamente. Como consecuencia, el blanco emite rayos X característicos del metal.

(*Izquierda*) Acelerador lineal de unos tres kilómetros de longitud de la Universidad de Stanford (EE.UU.). Se utiliza para acelerar electrones y positrones en línea recta a velocidades próximas a las de la luz. (*Derecha)* Sección transversal del haz electrones del acelerador, tal como se observa en un monitor de video.

EJEMPLO 2.14 | Lanzamiento de prismáticos

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Juan trepa a un árbol para presenciar mejor al conferenciante de una ceremonia de graduación que se celebra al aire libre. Desgraciadamente ha olvidado sus prismáticos abajo. María lanza los prismáticos hacia Juan pero su fuerza es mayor que su precisión. Los prismáticos pasan a la altura de la mano extendida de Juan 0,69 s después del lanzamiento y vuelven a pasar por el mismo punto 1,68 s más tarde. ¿A qué altura se encuentra Juan?

Planteamiento del problema En este problema hay dos incógnitas: la altura h de Juan y la velocidad inicial de los prismáticos, v_0. Sabemos que $y = h$ para $t_1 = 0{,}69$ s e $y = h$ para $t_2 = 0{,}69\text{ s} + 1{,}68\text{ s} = 2{,}37$ s. Expresando h en función del tiempo t tendremos dos ecuaciones a partir de las cuales se pueden determinar las dos incógnitas.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Utilizando $\Delta y = v_0t + \frac{1}{2}at^2$, igualar y para los tiempos t_1 y t_2 teniendo en cuenta que $y = h$ y $a = -g$ en cada caso.	$h = v_0t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ y $h = v_0t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$
2. Eliminar v_0 de estas dos ecuaciones y despejar h en función de los tiempos t_1 y t_2. Esto puede hacerse despejando v_0 en la primera ecuación y sustituyendo el resultado en la segunda ecuación.	$h = \left(\frac{h + \frac{1}{2}gt_1^2}{t_1}\right)t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$ por lo tanto $h = \boxed{8{,}02\text{ m}}$

Observación Tenemos dos incógnitas h y v_0, pero disponemos de dos tiempos, lo cual nos permite escribir dos ecuaciones y resolver las dos incógnitas.

Ejercicio Determinar la velocidad inicial de los prismáticos y la velocidad que llevan cuando pasan a la altura de Juan en su trayectoria descendente. (*Respuesta* $v_0 = 15{,}0$ m/s y $v_2 = -8{,}24$ m/s.)

Problemas con dos objetos

A continuación exponemos algunos problemas que incluyen dos objetos que se mueven con aceleración constante.

EJEMPLO 2.15 | A la caza de un coche con exceso de velocidad

Un coche lleva una velocidad de 25 m/s (≈ 90 km/h) en una zona escolar. Un coche de policía que está parado, arranca cuando el infractor le adelanta y acelera con una velocidad constante de 5 m/s². *(a)* ¿Cuánto tiempo tarda el coche de policía en alcanzar al vehículo infractor? *(b)* ¿Qué velocidad lleva el coche de policía cuando le alcanza?

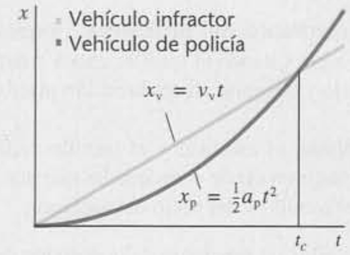


Figura 2.13 Las dos curvas muestran la posición del coche infractor y del coche de policía. Tienen la misma posición en el instante inicial, $t = 0$, y de nuevo cuando $t = t_c$.

Planteamiento del problema Para determinar cuando los dos coches se encuentran en la misma posición, expresamos las posiciones x_v del vehículo infractor y x_p del coche de policía en función del tiempo y despejamos t para $x_v = x_p$.

(a) 1. Funciones de posición del infractor y del coche policía:

$$x_v = v_v t \quad \text{y} \quad x_p = \tfrac{1}{2}a_p t^2$$

2. Hacer $x_v = x_p$ y resolver para el tiempo t_c, para $t_c > 0$:

$$v_v t_c = \tfrac{1}{2}a_p t_c^2 \Rightarrow v_v = \tfrac{1}{2}a_p t_c \qquad t_c \neq 0$$

$$t_c = \frac{2v_v}{a_p} = \frac{2(25\ \text{m/s})}{5\ \text{m/s}^2} = \boxed{10\ \text{s}}$$

(b) 1. La velocidad del coche de policía viene expresada por $v = v_0 + at$, en donde $v_0 = 0$:

$$v_p = a_p t_c = (5\ \text{m/s}^2)(10\ \text{s}) = \boxed{50\ \text{m/s}}$$

Observación La velocidad final del coche de policía en *(b)* es exactamente el doble que la del coche infractor. Como los dos coches cubren la misma distancia en igual tiempo, ambos hicieron el recorrido con igual velocidad media. La velocidad media del infractor es, naturalmente de 25 m/s. Como el policía parte del reposo y su velocidad media es de 25 m/s, debe alcanzar una velocidad final de 50 m/s.

Ejercicio ¿Qué distancia han recorrido los coches cuando el policía alcanza al infractor? (*Respuesta* 250 m.)

EJEMPLO 2.16 | El coche de policía

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

¿Qué velocidad lleva el coche de policía del ejemplo 2.15 cuando se encuentra a 25 m por detrás del vehículo infractor?

Planteamiento del problema La velocidad viene expresada por $v_p = at_1$, en donde t_1 es el tiempo en el cual $D = x_v - x_p = 25$ m.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
1. Dibujar una curva *x-t* que muestre las posiciones de los dos coches en el tiempo t_1 (figura 2.14).	
2. Utilizar las ecuaciones para x_p y x_v del ejemplo 2.15 y despejar t_1 cuando $x_v - x_p = 25$ m. Hay dos soluciones, una que corresponde a pocos instantes después del inicio del movimiento y otra que corresponde a poco antes de que el vehículo con exceso de velocidad sea alcanzado.	$t_1 = (5\ \text{s} \pm \sqrt{15})\ \text{s}$
3. Utilizar $v_p = a_p t$ para calcular la velocidad del coche de policía cuando $t = t_1$.	$v_{p1} = \boxed{5{,}64\ \text{m/s}}$ y $\boxed{44{,}4\ \text{m/s}}$

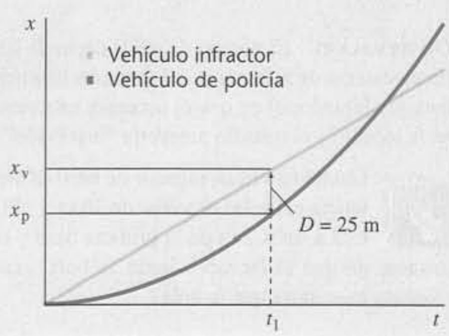


Figura 2.14

Observación En la figura 2.14 se observa que la distancia entre los dos coches al principio es cero, crece hasta un valor máximo y luego disminuye. La separación en cualquier momento es $D = x_v - x_p = v_v t - \frac{1}{2}a_p t^2$. Cuando la separación es máxima, $dD/dt = 0$, lo cual ocurre en el instante $t = 5$ s. Para intervalos de tiempo iguales antes y después de $t = 5$ s, las separaciones son las mismas.

EJEMPLO 2.17 | Un ascensor en movimiento

Una persona en un ascensor ve un tornillo que cae del techo. La altura del ascensor es de 3 m. ¿Cuánto tiempo tarda el tornillo en chocar contra el suelo si el ascensor asciende con una aceleración constante $a_e = 4{,}0\ \mathrm{m/s^2}$?

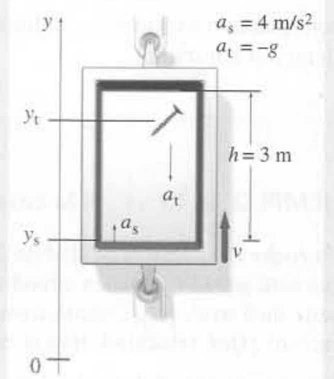


Figura 2.15 El eje de coordenadas está fijo al edificio.

Planteamiento del problema Expresar las posiciones del tornillo y_t y del suelo y_s en función del tiempo. Cuando el tornillo choca contra el suelo, $y_t = y_s$. Tomar como origen la posición inicial del suelo y designar como dirección positiva la dirección hacia arriba.

1. Dibujar el ascensor y el tornillo como se muestra en la figura 2.15. Añadir un eje de coordenadas que nos sirva para indicar las posiciones del tornillo y del suelo del ascensor:

2. Escribir las funciones de la posición del ascensor y del tornillo:

$$y_s - y_{0s} = v_{0s}t + \tfrac{1}{2}a_s t^2$$

$$y_t - y_{0t} = v_{0t}t + \tfrac{1}{2}a_t t^2$$

3. Cuando $t = t_1$, el tornillo llega al suelo. En ese instante las posiciones son:

$$y_t = y_s$$

$$y_{0t} + v_{0t}t_1 + \tfrac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + v_{0s}t_1 + \tfrac{1}{2}a_s t_1^2$$

4. Cuando $t = 0$, el suelo del ascensor y el tornillo tienen la misma velocidad. Usar este hecho para simplificar el resultado del paso 3:

$$v_{0s} = v_{0t}$$

por lo tanto

$$y_{0t} + v_{0t}t_1 + \tfrac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + v_{0s}t_1 + \tfrac{1}{2}a_s t_1^2$$

$$y_{0t} + \tfrac{1}{2}a_t t_1^2 = y_{0s} + \tfrac{1}{2}a_s t_1^2$$

5. Usar la información obtenida para simplificar:

$$y_{0s} = 0, \quad a_s = 4{,}0\ \mathrm{m/s^2}$$

$$y_{0t} = h = 3\ \mathrm{m}, \quad a_t = -g$$

por lo tanto

$$h - \tfrac{1}{2}g t_1^2 = 0 + \tfrac{1}{2}a_s t_1^2$$

o

$$h = \tfrac{1}{2}(g + a_s)t_1^2$$

6. Despejar el tiempo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g + a_s}} = \sqrt{\frac{2(3\ \mathrm{m})}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} + 4{,}0\ \mathrm{m/s^2}}}$$

$$= \boxed{0{,}659\ \mathrm{s}}$$

Observación El tiempo de caída depende de la aceleración del ascensor, pero no de la velocidad. En el sistema de referencia del ascensor hay una "gravedad efectiva" $g' = g + a_s$. En el caso (supuestamente hipotético) en que el ascensor estuviera en caída libre, es decir $a_s = -g'$, el tiempo de caída sería infinito y el tornillo parecería "ingrávido".

Cuando un buen jugador de béisbol corre entre bases va a una velocidad de 9,5 m/s. La distancia entre las bases es de 26 m y el lanzador está a unos 18,5 m de la base. Si un jugador está a unos 2 m de la primera base y comienza a correr hacia la segunda base en el mismo instante en que el lanzador lanza la bola, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador llegue a la segunda base antes que la bola?

EJEMPLO 2.18 | Un ascensor en movimiento

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Considerar el ascensor y el tornillo del ejemplo 2.17. Suponer que la velocidad de subida del ascensor es de 16 m/s cuando el tornillo se desprende del techo y empieza a caer. (*a*) ¿Qué distancia recorre el ascensor mientras el tornillo cae? ¿Qué distancia recorre el tornillo? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del tornillo y del ascensor en el momento del impacto de aquél en el suelo? (*c*) ¿Cuál es la velocidad relativa del tornillo con respecto al suelo del ascensor?

Planteamiento del problema El tiempo de vuelo del tornillo se ha obtenido en la solución del ejemplo 2.17. Usar este tiempo para resolver los apartados (*a*) y (*b*). Por lo que se refiere al apartado (*c*), la velocidad del tornillo respecto del edificio es igual a la suma de la velocidad del tornillo con respecto al ascensor más la velocidad del ascensor respecto al edificio.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Usar la ecuación 2.16 para calcular la distancia que se mueve el suelo del ascensor durante el tiempo t_1.	$\Delta y_s = v_{s0}t_1 + \frac{1}{2}a_s t_1^2 = \boxed{11{,}4\text{ m}}$
2. El tornillo se desprende a tres metros del suelo.	$\Delta y_t = \boxed{8{,}42\text{ m}}$
(b) Usar la ecuación 2.12 para encontrar la velocidad del impacto del tornillo con el suelo del ascensor.	$v = v_0 + at$, por lo tanto $v_t = v_{t0} - gt_1 = \boxed{9{,}53\text{ m/s}}$ $v_s = v_{s0} + a_s t_1 = \boxed{18.6\text{ m/s}}$
(c) Usar la ecuación 2.7a para determinar la velocidad relativa del tornillo respecto del ascensor.	$v_{te} = v_{ts} + v_{se}$ por lo tanto $v_{ts} = v_{te} - v_{se} = 9{,}53\text{ m/s} - 18{,}6\text{ m/s}$ $= \boxed{-9{,}10\text{ m/s}}$

Observación El tornillo impacta con el suelo del ascensor 8,4 m por encima de su posición inicial. Con respecto al edificio, en el momento del contacto, el tornillo todavía está subiendo. Nótese que en el momento del impacto la velocidad del tornillo relativa al edificio es positiva.

2.4 Integración

Para determinar la velocidad a partir de una determinada aceleración, observemos que la velocidad es la función $v(t)$ cuya derivada es la aceleración $a(t)$:

$$\frac{dv(t)}{dt} = a(t)$$

Si la aceleración es constante, la velocidad es aquella función del tiempo que cuando se deriva es igual a esta constante. Por ejemplo

$$v = at, \qquad a = \text{constante}$$

De un modo más general, podemos añadir a la función at cualquier constante sin que se modifique la derivada respecto al tiempo. Llamando c a esta nueva constante, resulta

$$v = at + c$$

Cuando $t = 0$, $v = c$. Así pues, c es la velocidad inicial v_0.

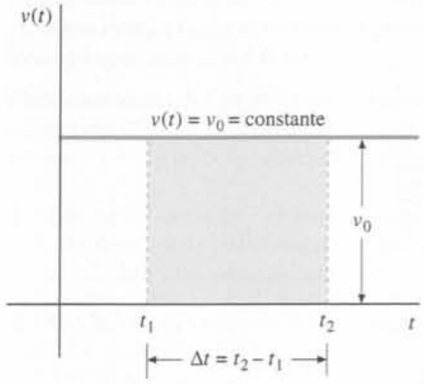
Análogamente, la función posición $x(t)$ es aquella función cuya derivada es la velocidad:

$$\frac{dx}{dt} = v = v_0 + at$$

Cada uno de estos términos puede tratarse separadamente. La función cuya derivada es una constante v_0 es $v_0 t$ más cualquier constante. La función cuya derivada es at es $\frac{1}{2}at^2$ más cualquier constante. Llamando x_0 a la suma combinada de todas estas constantes arbitrarias resulta

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

Cuando $t = 0$, $x = x_0$. Así pues, x_0 es la posición inicial.



Área sombreada $= v_0\ \Delta t = \Delta x$

Figura 2.16 El desplazamiento Δx durante el intervalo de tiempo Δt es igual al área bajo la curva de v en función de t. Para $v(t) = v_0$ = constante, el desplazamiento es igual al área del rectángulo sombreado.

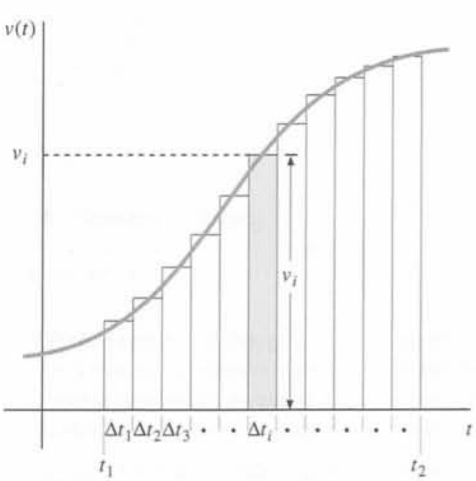


Figura 2.17 Gráfico de una curva general de $v(t)$ en función de t. El desplazamiento total desde t_1 hasta t_2 es el área bajo la curva en este intervalo, que puede obtenerse aproximadamente sumando las áreas de los rectángulos.

Siempre que se obtiene una función a partir de su derivada, debe añadirse una constante arbitraria en la función general. Como para obtener $x(t)$ a partir de la aceleración debemos integrar dos veces, aparecen dos constantes. Normalmente estas constantes se determinan a partir de la velocidad y la posición iniciales en un instante determinado. Generalmente se elige el instante en que $t = 0$. Es por esto que estas constantes reciben el nombre de **condiciones iniciales**. Un problema común llamado **problema del valor inicial** toma la forma: "dado $a(t)$ y los valores iniciales de x y de v determinar $x(t)$". Este problema es particularmente importante en física porque la aceleración de una partícula está determinada por las fuerzas que actúan sobre ella. Así pues, si conocemos las fuerzas que actúan sobre una partícula y su posición y velocidad en un instante determinado, podemos hallar unívocamente su posición en cualquier otro instante.

Una función $F(t)$ cuya derivada (respecto a t) es igual a la función $f(t)$ se denomina **antiderivada** de $f(t)$. El problema de la antiderivada está relacionado con el de la obtención del área bajo una curva. Consideremos el caso del movimiento con velocidad constante v_0. El cambio de posición Δx durante un intervalo Δt es

$$\Delta x = v_0\ \Delta t$$

Ésta es el área bajo la curva de v en función de t (figura 2.16). Si v_0 es negativa, tanto el desplazamiento como el área bajo la curva son negativos. Normalmente pensamos en el área como una magnitud que no puede ser negativa, pero en este contexto no es así. En este caso el "área bajo la curva" (el área entre la curva y el eje temporal) es una magnitud negativa.

La interpretación geométrica del desplazamiento como el área bajo la curva de v en función de t es válida no sólo para la velocidad constante, sino también en general, como se ilustra en la figura 2.17. En este caso, el área bajo la curva puede aproximarse dividiendo el intervalo de tiempo en cierto número de pequeños intervalos Δt_1, Δt_2, etc., y trazando una serie de áreas rectangulares. El área del rectángulo correspondiente al intervalo de tiempo Δt_i es $v_i \Delta t_i$, el cual es aproximadamente igual al desplazamiento Δx_i durante el intervalo Δt_i. La suma de las áreas de los rectángulos es, por lo tanto, la suma de los desplazamientos realizados durante los intervalos de tiempo correspondientes y es aproximadamente igual al desplazamiento total desde el instante t_1 al t_2. Matemáticamente, escribiremos esto en la forma

$$\Delta x \approx \sum_i v_i \Delta t_i$$

en donde la letra Σ (sigma mayúscula) representa una "suma". Podemos hacer la aproximación tan exacta como queramos escogiendo suficientes rectángulos bajo la curva, cada uno de los cuales corresponde a un valor pequeño de Δt. En el límite correspondiente a intervalos de tiempo cada vez más pequeños, esta suma es igual al área comprendida bajo la curva, que equivale, por lo tanto, al desplazamiento. Este límite se denomina **integral** y se escribe del modo siguiente.

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_i v_i\ \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} v\ dt \tag{2.18}$$

Es útil imaginar que el signo integral $\int$ es una S alargada que indica una suma. Los límites t_1 y t_2 indican los valores inicial y final de la variable t. El desplazamiento es, por lo tanto, el área bajo la curva de v en función de t. La figura 2.18 demuestra que la velocidad media tiene una interpretación geométrica simple en función del área bajo la curva.

Para ilustrar que el desplazamiento iguala el área bajo una curva v-t, consideremos lo que ocurre cuando se lanza una pelota de golf directamente hacia arriba. La pelota sube aproximadamente un metro, invierte su sentido de movimiento, y cae de nuevo acelerando hasta que la volvemos a coger con la mano. Si se supone que la resistencia del aire es despreciable, la velocidad de la pelota viene dada por $v = v_0 + at$ (ecuación 2.12), donde la dirección hacia arriba se considera positiva y $a = -g$. La figura 2.19 representa esta velocidad durante el tiempo de vuelo de la pelota. Inicialmente la velocidad de la pelota es positiva, a medio camino vale cero, y justo antes de cogerla vale $-v_0$. Durante su ascenso, el área bajo la curva es positiva, mientras que durante el descenso es negativa. Así, el área total bajo la curva durante el vuelo es cero. Dado que la pelota se lanza desde el mismo sitio donde finalmente es recogida, el cambio de posición es cero. Por consiguiente, el desplazamiento y el área bajo la curva v-t son iguales porque ambos son cero.

El proceso de calcular una integral se llama **integración**. En la ecuación 2.18, v es la derivada de x y x es la antiderivada de v. Este es un ejemplo del teorema fundamental del cálculo, cuya formulación durante el siglo XVII aceleró el desarrollo matemático de la física:

$$\text{Si } f(t) = \frac{dF(t)}{dt}, \text{ entonces } F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt \tag{2.19}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

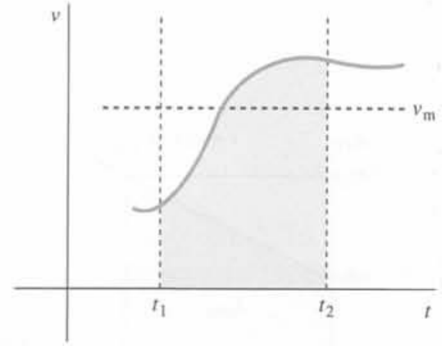


Figura 2.18 El desplazamiento Δx durante el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es igual al área de la región sombreada. Según la definición de velocidad media $\Delta x = v_m \Delta t$. Ésta es justamente el área del rectángulo de altura v_m y base Δt. Así pues, el área rectangular $v_m \Delta t$ y el área bajo la curva v en función de t deben ser iguales.

La antiderivada de una función se denomina también integral indefinida de la función y se escribe sin límites sobre el signo integral:

$$x = \int v\, dt$$

La operación de determinar x a partir de la derivada v (es decir, determinar la antiderivada) se llama también integración. Por ejemplo, si $v = v_0$ (una constante) entonces,

$$x = \int v_0\, dt = v_0 t + x_0$$

donde x_0 es la constante arbitraria de integración. A partir de la ecuación 2.6 que expresa la regla general para la derivada de una potencia, podemos determinar una regla general para la integración de una potencia de t. El resultado es

$$\int t^n\, dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \tag{2.20}$$

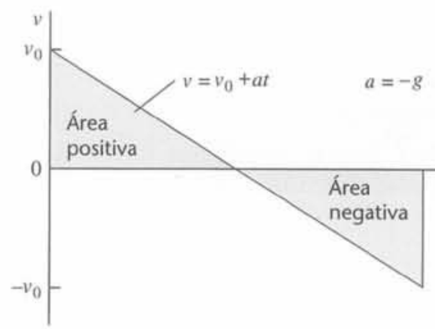


Figura 2.19 Curva v en función de t para una pelota de golf que se lanza directamente hacia arriba. El área bajo la curva es positiva en la parte que corresponde al ascenso, y negativa en la del descenso. El área bajo la curva correspondiente a todo el vuelo es cero.

en donde C es una constante arbitraria. Puede comprobarse fácilmente derivando el segundo miembro mediante la regla de la ecuación 2.6. (Para el caso especial $n = -1$, $\int t^{-1}\, dt = \ln t + C$, en donde $\ln t$ es el logaritmo natural de t.)

El cambio de velocidad durante cierto intervalo de tiempo puede interpretarse análogamente como el área bajo la curva a en función de t en dicho intervalo. Así se escribe

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\sum_i a_i\, \Delta t_i \right) = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt \tag{2.21}$$

Así pueden deducirse las ecuaciones de la aceleración constante calculando las integrales indefinidas de la aceleración y la velocidad. Si a es constante, tenemos

$$v = \int a\, dt = a \int dt = v_0 + at \tag{2.22}$$

en donde hemos escrito en primer lugar la constante de integración v_0. Integrando de nuevo y llamando x_0 a la constante de integración resulta

$$x = \int (v_0 + at)\, dt = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} at^2 \tag{2.23}$$

Es instructivo deducir las ecuaciones 2.22 y 2.23 usando integrales definidas en vez de integrales indefinidas. Si la aceleración es constante, la ecuación 2.21, con $t_1 = 0$, nos da

$$v(t_2) - v(0) = a \int_0^{t_2} dt = a(t_2 - 0)$$

donde el tiempo t_2 es arbitrario. Como es arbitrario, se puede poner $t_2 = t$ y se obtiene

$$v = v_0 + at$$

donde $v = v(t)$ y $v_0 = v(0)$. Para obtener la ecuación 2.23, se sustituye $v_0 + at$ por v en la ecuación 2.18 con $t_1 = 0$. Esto nos lleva a

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_0 + at)dt$$

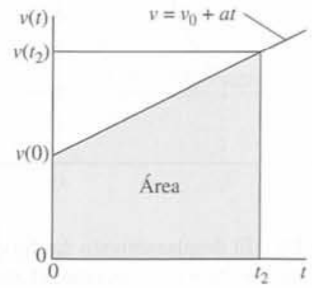


Figura 2.20 El área bajo la curva v-t es el desplazamiento $\Delta x = x(t_2) - x(0)$.

Esta integral es igual al área bajo la curva v-t (figura 2.20). Evaluando la integral y resolviendo para x nos da

$$x(t_2) - x(0) = \int_0^{t_2} (v_0 + at)dt = v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2\Big|_0^{t_2} = v_0 t_2 + \tfrac{1}{2}\, at_2^2$$

donde t_2 es arbitrario. Poniendo $t_2 = t$ obtenemos

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

donde $x = x(t)$ y $x_0 = x(0)$.

Una vez deducidas las ecuaciones cinemáticas de aceleración constante sin ninguna referencia a la velocidad media, podemos demostrar que para el caso especial de aceleración constante, la velocidad media es el valor medio entre las velocidades inicial y final (ecuación 2.14). Sea v_0 la velocidad inicial en $t = 0$ y v la velocidad final en el tiempo t. De acuerdo con la definición de velocidad media, el desplazamiento es

$$\Delta x = v_m\, \Delta t = v_m(t - 0) = v_m t \qquad (2.24)$$

Igualmente, de la ecuación 2.23 resulta

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2}\, at^2$$

Podemos eliminar la aceleración según la ecuación 2.12 utilizando $a = (v - v_0)/t$. Es decir

$$\Delta x = v_0 t + \tfrac{1}{2}\left(\frac{v - v_0}{t}\right)t^2 = v_0 t + \tfrac{1}{2}\, vt - \tfrac{1}{2}\, v_0 t = \tfrac{1}{2}(v + v_0)t \qquad (2.25)$$

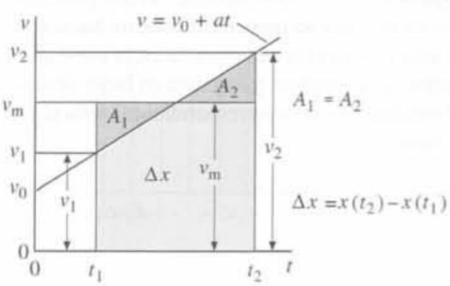


Figura 2.21

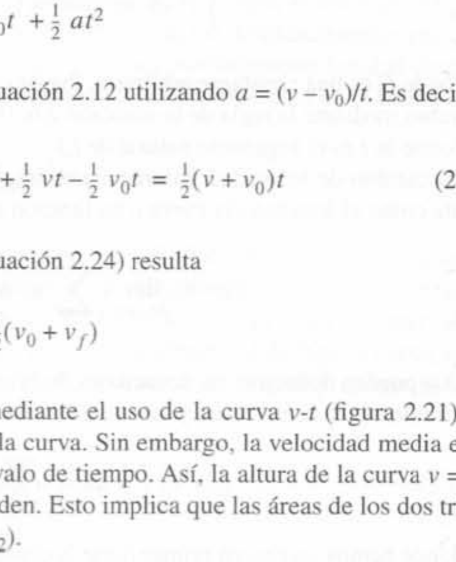
Comparando este resultado con $\Delta x = v_m t$ (ecuación 2.24) resulta

$$v_m = \tfrac{1}{2}(v_0 + v_f)$$

que coincide con la ecuación 2.14.

Puede visualizarse la velocidad media mediante el uso de la curva v-t (figura 2.21). El desplazamiento Δx corresponde al área bajo la curva. Sin embargo, la velocidad media es el área bajo la curva $v = v_m$ por el mismo intervalo de tiempo. Así, la altura de la curva $v = v_m$ es tal que las áreas bajo las dos curvas coinciden. Esto implica que las áreas de los dos triángulos grises sean iguales y que $v_m = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

EJEMPLO 2.19 | Un transbordador



Un transbordador lleva una velocidad constante $v_0 = 8$ m/s durante 60 s. A continuación para sus motores y se acerca a la costa. Su velocidad es entonces una función del tiempo dada por la expresión $v = v_0 t_1^2/t^2$, siendo $t_1 = 60$ s. ¿Cuál es el desplazamiento del transbordador en el intervalo $0 < t < \infty$?

Planteamiento del problema La función velocidad viene representada por la figura 2.20. El desplazamiento total se calcula sumando el desplazamiento Δx_1 correspondiente al intervalo $0 < t < t_1 = 60$ s y el desplazamiento durante el intervalo $t_1 < t < \infty$.

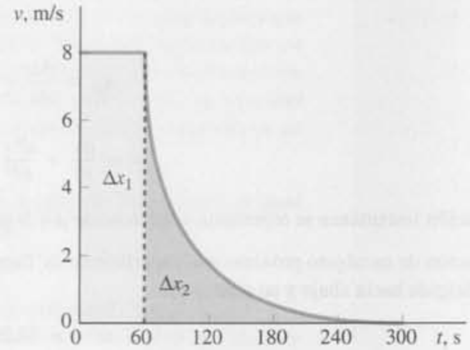


Figura 2.22

1. La velocidad del transbordador es constante durante los primeros 60 segundos; así, el desplazamiento es simplemente el producto de la velocidad por el tiempo transcurrido:

$$\Delta x_1 = v_0 \Delta t = v_0 t_1 = (8\text{ m/s})(60\text{ s}) = 480\text{ m}$$

2. El desplazamiento restante viene dado por la integral de la velocidad desde $t = t_1$ hasta $t = \infty$. Utilizamos la ecuación 2.18 para calcular la integral:

$$\Delta x_2 = \int_{t_1}^{\infty} v\,dt = \int_{t_1}^{\infty} \frac{v_0 t_1^2}{t^2}\,dt = v_0 t_1^2 \int_{t_1}^{\infty} t^{-2}\,dt = v_0 t_1^2 \left.\frac{t^{-1}}{-1}\right|_{t_1}^{\infty}$$

$$= -v_0 t_1^2\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{t_1}\right) = v_0 t_1 = (8\text{ m/s})(60\text{s}) = 480\text{ m}$$

3. El desplazamiento total es la suma de los dos desplazamientos anteriores:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 480\text{ m} + 480\text{ m} = \boxed{960\text{ m}}$$

Observación El área bajo la curva de v en función del tiempo es finita. Así, aunque el transbordador nunca deja de moverse, viaja sólo una distancia finita. Una representación mejor de la velocidad de un buque que bordea la costa con los motores parados sería una función exponencialmente decreciente $v = v_0 e^{-b(t-t_1)}$, donde b es una constante positiva. En este caso el buque se acercaría a la costa también una distancia finita en el intervalo $60\text{ s} \le t \le \infty$.

Resumen

El desplazamiento, la velocidad y la aceleración son magnitudes cinemáticas *definidas* importantes.

Tema	**Observaciones y ecuaciones relevantes**	
1. Desplazamiento	$\Delta x = x_2 - x_1$	(2.1)
Interpretación gráfica	El desplazamiento es el área bajo la curva v en función de t.	
2. Velocidad		
Velocidad media	$v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	(2.2)
Velocidad instantánea	$v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$	(2.5)
Interpretación gráfica	La velocidad instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva x en función de t.	
Velocidad relativa	Si una partícula se mueve con velocidad v_{pA} respecto a un sistema de coordenadas A, el cual a su vez se mueve con velocidad v_{AB} respecto a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula relativa a B es $v_{pB} = v_{pA} + v_{AB}$	(2.7)
3. Módulo de la velocidad		
Módulo de la velocidad media	Módulo de la velocidad media $= \dfrac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \dfrac{s}{t}$	(2.3)

4. Aceleración

Aceleración media
$$a_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{2.8}$$

Aceleración instantánea
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{2.10}$$

Interpretación gráfica — La aceleración instantánea se representa gráficamente por la pendiente de la curva v en función del tiempo t.

Aceleración debida a la gravedad — La aceleración de un objeto próximo a la superficie de la Tierra en caída libre bajo la influencia de la gravedad está dirigida hacia abajo y su módulo es

$$g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 32{,}2\ \mathrm{pies/s^2}$$

5. El desplazamiento y la velocidad como integrales — El desplazamiento se representa gráficamente por el área bajo la curva v en función del tiempo. Esta área es la integral de v extendida al tiempo, desde cierto valor inicial t_1 a cierto valor final t_2 y se expresa del modo siguiente:

$$\Delta x = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i v_i\, \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v\ dt \tag{2.18}$$

Igualmente, el cambio de velocidad durante cierto tiempo se representa gráficamente por el área bajo la curva a en función de t:

$$\Delta v = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_i a_i\, \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} a\ dt \tag{2.21}$$

Velocidad
$$v = v_0 + at \tag{2.12}$$

Desplazamiento en función de v_{m}
$$\Delta x = x - x_0 = v_{\mathrm{m}}t = \tfrac{1}{2}(v_0 + v)t \tag{2.15}$$

Desplazamiento en función de a
$$\Delta x = x - x_0 = v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{2.16}$$

v en función de a y Δx
$$v^2 = v_0^2 + 2a\ \Delta x \tag{2.17}$$

Problemas

- ● Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- ●● Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ●●● Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Usar en todos los problemas $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ para la aceleración de la gravedad y despreciar, a menos que se indique lo contrario, el rozamiento y la resistencia del aire.

Problemas conceptuales

1 ● ¿Cuál es la velocidad media del recorrido de "ida y vuelta" de un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba y que vuelve a caer en el mismo sitio desde donde ha sido lanzado?

2 ● SSM Un objeto lanzado verticalmente hacia arriba vuelve al suelo T segundos más tarde. Su altura máxima es H metros y su altura en el momento de soltarlo es despreciable. Su velocidad media durante estos T segundos es (*a*) H/T, (*b*) 0, (*c*) $H/2T$, (*d*) $2H/T$.

3 ● iSOLVE Para evitar una caída demasiado rápida durante el aterrizaje, un avión debe mantener una mínima velocidad relativa de vuelo (velocidad del avión respecto al aire). Sin embargo, cuanto menor sea la velocidad con respecto del suelo durante el aterrizaje, más segura es la maniobra. ¿Qué opción es más segura para un avión, aterrizar a favor del viento o con el viento en contra?

4 ● Dé un ejemplo de un movimiento en una dimensión donde (*a*) la velocidad sea positiva y la aceleración sea negativa y, (*b*) donde la velocidad sea negativa y la aceleración sea positiva.