MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Capítulo 3

Los barcos a vela no navegan en línea recta hacia su destino sino que siguen una trayectoria en zig-zag contra el viento. El barco de la foto que se dirige hacia un puerto situado hacia el sudeste navega primero hacia el este, después hacia el sur para acabar torciendo finalmente hacia el este.

? ¿Cómo podemos calcular el desplazamiento y la velocidad medias? (Véase el ejemplo 3.3.)

En este capítulo extenderemos las ideas del capítulo anterior a dos y tres dimensiones. Para llevar a cabo esta extensión, introduciremos los vectores y mostraremos cómo se usan para analizar y describir el movimiento.

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar el concepto del vector aceleración, un concepto fundamental para el desarrollo de las leyes de Newton en los capítulos 4 y 5.

3.1 El vector desplazamiento

Cuando hay movimiento, el desplazamiento de una partícula tiene una dirección en el espacio y un módulo. La magnitud que expresa la dirección y la distancia en línea recta comprendida entre dos puntos del espacio es un segmento lineal llamado **vector desplazamiento**. Se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector desplazamiento y cuya longitud es proporcional al módulo del vector desplazamiento. Designaremos los vectores con letras negritas, como en **A**. (Cuando se escribe a mano, un vector se indica mediante una flecha sobre el símbolo considerado, por ejemplo, $\vec{A}$.) El módulo de **A** se escribe $|\mathbf{A}|$ o simplemente A y, por ejemplo, el módulo del vector desplazamiento tiene dimensiones de longitud. El módulo de un vector no puede ser negativo.

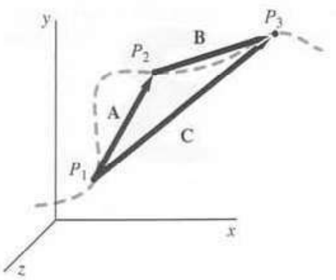


Figura 3.1

Suma de vectores desplazamiento

La figura 3.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve desde el punto P_1 hasta un segundo punto P_2 y luego a un tercer punto P_3. El desplazamiento de P_1 a P_2 viene representado por el vector **A** y el desplazamiento de P_2 a P_3 por **B**. Obsérvese que el vector desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real de la partícula. El desplazamiento *resultante* de P_1 a P_3, llamado **C**, es la suma de los dos desplazamientos sucesivos **A** y **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{3.1}$$

Dos vectores desplazamiento se suman gráficamente situando el origen de uno en el extremo del otro (figura 3.2). El vector resultante se extiende desde el origen del primer vector al extremo final del segundo. Obsérvese que C no es igual a $A + B$ a menos que **A** y **B** estén en la misma dirección. Es decir $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ no implica que $C = A + B$.

Una forma equivalente de sumar vectores es el llamado **método del paralelogramo**, que consiste en desplazar **B** hasta que coincida su origen con el de **A**. La diagonal del paralelogramo formado por **A** y **B** es igual a **C**. Como puede verse en la figura 3.3, no existe diferencia en el orden en que sumemos los vectores; es decir $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

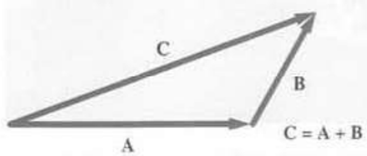


Figura 3.2 Método para la suma de vectores que consiste en situar los dos vectores uno a continuación del otro.

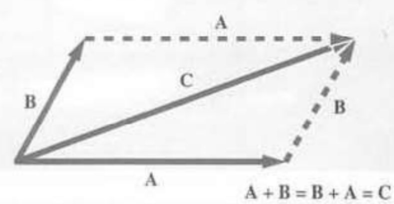


Figura 3.3 Método del paralelogramo para la suma de vectores.

EJEMPLO 3.1 | Desplazamiento

Una persona se mueve 3 km hacia el este y luego 4 km hacia el norte. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

Planteamiento del problema Los dos desplazamientos componentes y el desplazamiento resultante se muestran en la figura 3.4. Como **A** y **B** forman un ángulo recto entre sí y $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ es la hipotenusa del correspondiente triángulo rectángulo, el módulo C puede hallarse mediante el teorema de Pitágoras. La dirección de **C** se obtiene por trigonometría.

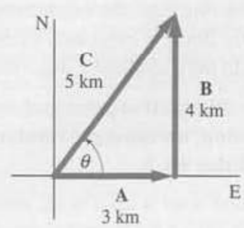


Figura 3.4

1. El módulo del desplazamiento resultante está relacionado con los módulos de los dos desplazamientos por el teorema de Pitágoras:

$$C^2 = A^2 + B^2$$
$$= (3\text{ km})^2 + (4\text{ km})^2 = 25\text{ km}^2$$

y de aquí

$$C = \sqrt{25\text{ km}^2} = 5\text{ km}$$

2. Sea θ el ángulo que forma el eje de dirección este con el desplazamiento **C**. Según sea la figura podemos determinar tg θ y basta utilizar una calculadora con funciones trigonométricas para obtener θ:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A}$$

y de aquí

$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{B}{A} = \operatorname{arctg}\frac{4\text{ km}}{3\text{ km}} = 53{,}1°$$

Observación Un vector viene descrito por su módulo y dirección. En este ejemplo el desplazamiento resultante es un vector de longitud 5 km en una dirección 53,1° al norte del este.

3.2 Propiedades generales de los vectores

En física existen muchas magnitudes que poseen módulo y dirección, y se suman como los desplazamientos. Son ejemplos la velocidad, la aceleración, el momento lineal y la fuerza. Estas magnitudes se llaman **vectores**. Las magnitudes que carecen de dirección asociada —por ejemplo, la distancia y el módulo de la velocidad— se denominan **escalares**.

Los vectores son magnitudes con módulo, dirección y sentido que se suman como los desplazamientos.

DEFINICIÓN —VECTORES

Un vector se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector y cuya longitud es proporcional al módulo del vector. Cuando se expresa el módulo de un vector, debe venir acompañado de sus unidades. Así, el módulo del vector velocidad se expresa en metros por segundo. Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección. Gráficamente esto significa que tienen la misma longitud y son paralelos el uno al otro. Una consecuencia de esta definición es que si un vector se mueve manteniéndose paralelo a sí mismo, no se modifica. Así todos los vectores de la figura 3.5 son iguales. Si trasladamos o giramos el sistema de coordenadas, todos los vectores de la figura 3.5 permanecen iguales. Un vector no depende del sistema de coordenadas utilizado para su representación (excepto los vectores de posición, que introduciremos en la sección 3.3).

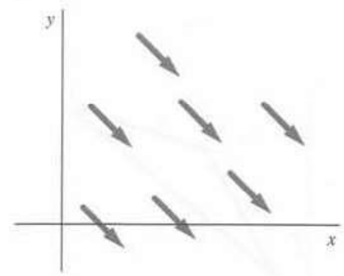


Figura 3.5 Los vectores son iguales si sus módulos y direcciones son los mismos. Todos los vectores de esta figura son iguales.

Producto de un vector por un escalar

Un vector **A** multiplicado por un escalar s es el vector $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$, que tiene módulo $|s|A$ y es paralelo a **A** si s es positivo, y antiparalelo a **A** si s es negativo. Así, el vector $-\mathbf{A}$ tiene el mismo módulo que **A**, pero apunta en dirección opuesta, de modo que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$. Las dimensiones de $s\mathbf{A}$ son las de s multiplicadas por las de A.

Resta de vectores

Para restar el vector **B** del vector **A** basta sumarle $-\mathbf{B}$. El resultado es $\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ (figura 3.6*a*). Otro método equivalente de restar **B** de **A** es unir sus orígenes y trazar el vector **C** de **B** a **A**. Es decir, **C** es el vector que debe sumarse a **B** para obtener el vector resultante **A** (figura 3.6*b*). Las reglas de sumar o restar dos vectores cualesquiera, tales como dos vectores velocidad o dos vectores aceleración, son las mismas que las utilizadas para los desplazamientos.

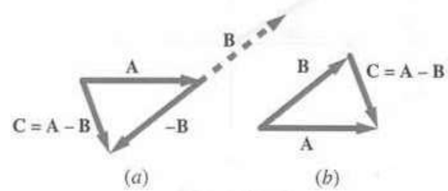


Figura 3.6

Componentes de los vectores

La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es la longitud de la proyección del vector sobre dicha línea. Se obtiene trazando una línea perpendicular desde el extremo o flecha de un vector a la línea, como indica la figura 3.7. El signo de la componente es positivo si la proyección de la punta del vector se encuentra en la dirección positiva con relación a su origen. Las componentes de un vector a lo largo de las direcciones x, y y z, ilustradas en la figura 3.8 para un vector en el plano xy, se denominan componentes rectangulares. Obsérvese que las componentes de un vector dependen del sistema de coordenadas utilizado para su representación, aunque el mismo vector no dependa de ello.

Las componentes rectangulares son útiles para la suma o resta de vectores. Si θ es el ángulo comprendido entre **A** y el eje x, resulta

$$A_x = A\cos\theta \tag{3.2}$$

COMPONENTE X DE UN VECTOR

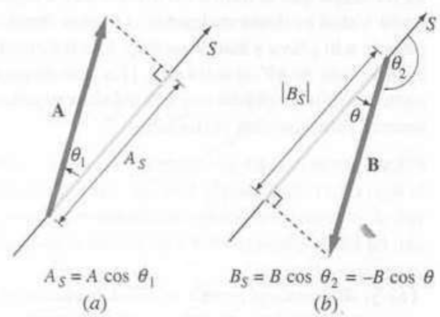


Figura 3.7 Definición de la componente de un vector. La componente del vector **A** en la dirección positiva de S es A_s, y A_s es positiva. La componente del vector **B** en la dirección positiva de S es B_s, y B_s es negativa.

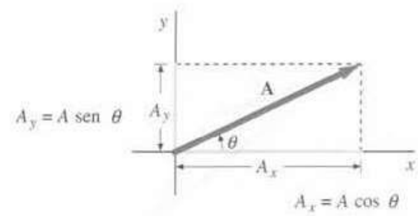


Figura 3.8 Componentes rectangulares de un vector. $A_x = A \cos \theta$, $A_y = A$ sen θ.

y

$$A_y = A \text{ sen } \theta \tag{3.3}$$

COMPONENTE *Y* DE UN VECTOR

en donde A es el módulo de **A**.

Si conocemos A_x y A_y, podemos obtener el ángulo θ a partir de

$$\text{tg } \theta = \frac{A_y}{A_x}, \qquad \theta = \text{arctg } \frac{A_y}{A_x} \tag{3.4}$$

y el módulo A a partir del teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.5a}$$

En tres dimensiones,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{3.5b}$$

Las componentes pueden ser positivas o negativas. Por ejemplo, si **A** apunta en la dirección negativa de x, A_x es negativa.

Consideremos dos vectores **A** y **B** en el plano xy. Las componentes rectangulares de cada vector y las de la suma **C** = **A** + **B** se muestran en la figura 3.9. Como puede verse, la ecuación vectorial **C** = **A** + **B** es equivalente a las dos ecuaciones de las componentes:

$$C_x = A_x + B_x \tag{3.6a}$$

y

$$C_y = A_y + B_y \tag{3.6b}$$

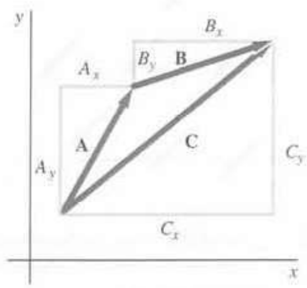


Figura 3.9

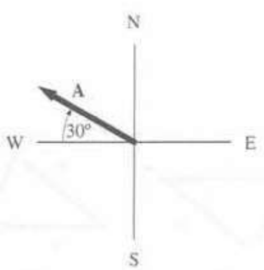


Figura 3.10

Ejercicio Un coche recorre 20 km en dirección 30° al norte del oeste. Se supone que el eje x apunta al este y el eje y al norte, como en la figura 3.10. Determinar las componentes x e y del vector desplazamiento del coche. (*Respuesta* $A_x = -17{,}3$ km, $A_y = +10$ km.)

EJEMPLO 3.2 | El mapa del tesoro

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Suponga que usted trabaja como animador en un centro turístico en una isla tropical. Dispone de un mapa que le indica las direcciones a seguir para enterrar un tesoro en un lugar determinado. Usted no desea malgastar el tiempo dando vueltas por la isla, porque quiere acabar pronto para ir a la playa y hacer surfing. Las instrucciones son ir 3 km hacia el oeste y luego 4 km en la dirección de 60º al nordeste. ¿En qué dirección debe moverse y cuánto tendrá que caminar para cumplir su objetivo con la máxima rapidez? Encuentre la respuesta (*a*) gráficamente y (*b*) usando componentes vectoriales

Planteamiento del problema Hay que encontrar la resultante del desplazamiento, que es **C** en la figura 3.11. El triángulo formado por los tres vectores no es rectangular, de modo que no podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Podemos obtener gráficamente la resultante dibujando a escala cada uno de los desplazamientos y midiendo el desplazamiento resultante.

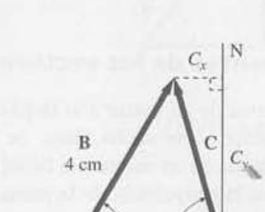


Figura 3.11

(a) Si dibujamos el primer vector desplazamiento **A** de 3 cm de largo y el segundo **B** de 4 cm de largo, encontraremos que el vector resultante **C** es de unos 3,5 cm de longitud. Así, el módulo del desplazamiento resultante es de 3,5 km. El ángulo θ formado por el desplazamiento resultante y la dirección oeste puede medirse con un transportador angular. Por lo tanto, debe andar 3,5 km a 75°.

(b) 1. Para resolver el problema utilizando las componentes vectoriales, sea **A** el primer desplazamiento y elegimos el eje x positivo en la dirección este y el eje y positivo en la dirección norte. Calculamos A_x y A_y de las ecuaciones 3.2 y 3.3:

$$A_x = -3 \text{ km} \quad \text{y} \quad A_y = 0$$

2. De igual modo calculemos las componentes del segundo desplazamiento **B**:

$$B_x = (4 \text{ km}) \cos 60° = 2 \text{ km}$$
$$B_y = (4 \text{ km}) \text{ sen } 60° = 3{,}46 \text{ km}$$

3. Las componentes del desplazamiento resultante **C** = **A** + **B** se obtienen por suma:

$$C_x = A_x + B_x = -3 \text{ km} + 2 \text{ km} = -1 \text{ km}$$
$$C_y = A_y + B_y = 0 + 2\sqrt{3} \text{ km} = 3{,}46 \text{ km}$$

4. El teorema de Pitágoras nos permite obtener la magnitud de **C**:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (-1 \text{ km})^2 + (2\sqrt{3} \text{ km})^2 = 13{,}0 \text{ km}^2$$
$$C = \sqrt{13} \text{ km} = \boxed{3{,}61 \text{ km}}$$

5. El cociente entre C_y y C_x es igual a la tangente del ángulo θ entre **C** y la dirección negativa de x:

$$\text{tg } \theta = \frac{C_y}{|C_x|}$$

por lo tanto,

$$\theta = \text{arctg} \frac{2\sqrt{3} \text{ km}}{1 \text{ km}} = \text{arctg } (2\sqrt{3})$$
$$= \boxed{74°}$$

Observaciones Como el desplazamiento es una magnitud vectorial, la respuesta debe incluir el módulo y la dirección o ambas componentes. En (*b*) podríamos haber concluido el cálculo en el paso 3, ya que las componentes x e y definen completamente el vector desplazamiento. Se han convertido en el módulo y la dirección para comparar el resultado con la respuesta a la parte (*a*). Obsérvese que en el paso 5 de (*b*) se obtiene un ángulo de 74 °. Este resultado está de acuerdo con el de (*a*) dentro de la exactitud de nuestra medida.

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector *sin dimensiones* de módulo unidad. El vector $A^{-1}\mathbf{A}$ es un ejemplo de vector unitario que apunta en la dirección de **A**. (A veces, para evitar confusiones, los vectores unitarios se escriben en negritas con un pequeño ángulo en su parte superior; por ejemplo, $\hat{\mathbf{A}} = A^{-1}\mathbf{A}$.) Los vectores unitarios que apuntan en la direcciones x, y y z son convenientes para expresar los vectores en función de sus componentes rectangulares. Usualmente se escriben **i**, **j** y **k**, respectivamente. Así, el vector $A_x\mathbf{i}$ tiene módulo A_x y apunta en la dirección x positiva si A_x es positiva (o la dirección x negativa si A_x es negativo). Un vector **A** en general puede escribirse como suma de tres vectores, cada uno de ellos paralelo a un eje coordenado (figura 3.12):

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{3.7}$$

La suma de dos vectores **A** y **B** puede escribirse en función de vectores unitarios en la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Las propiedades generales de los vectores se resumen en la tabla 3.1.

Ejercicio Dados dos vectores

$$\mathbf{A} = (4 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (2 \text{ m})\mathbf{i} - (3 \text{ m})\mathbf{j},$$

determinar (a) A, (b) B, (c) **A** + **B**, y (d) **A** – **B**. (*Respuestas* (*a*) A = 5 m, (*b*) B = 3,61 m, (*c*) **A** + **B** = (6 m)**i**, (*d*) **A** – **B** = (2 m)**i** + (6 m)**j**.)

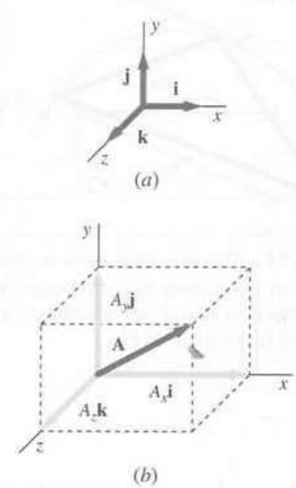
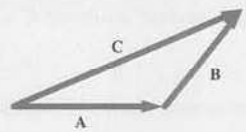
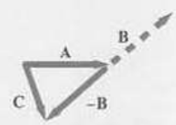


Figura 3.12 (*a*) Vectores unitarios **i**, **j** y **k** en un sistema de coordenadas rectangulares. (*b*) Vector **A** escrito en función de los vectores unitarios: $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$.

TABLA 3.1 Propiedades de los vectores

Propiedad	Explicación	Figura	Representación de las componentes
Igualdad	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{B}\rvert$ y sus direcciones y sentidos son iguales		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adición	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de un vector	$\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ si $\lvert\mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert$ y su sentido es opuesto		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Sustracción	$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicación por un escalar	$\mathbf{B} = s\mathbf{A}$ tiene el módulo $\lvert\mathbf{B}\rvert = s\lvert\mathbf{A}\rvert$ y la misma dirección que $\mathbf{A}$ si es s positivo o $-\mathbf{A}$ si s es negativo		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

3.3 Posición, velocidad y aceleración

Vectores posición y velocidad

El **vector posición** de una partícula es un vector trazado desde el origen de un sistema de coordenadas hasta la posición de la partícula. Para una partícula en el punto (x, y) su vector posición $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{3.9}$$

DEFINICIÓN —VECTOR POSICIÓN

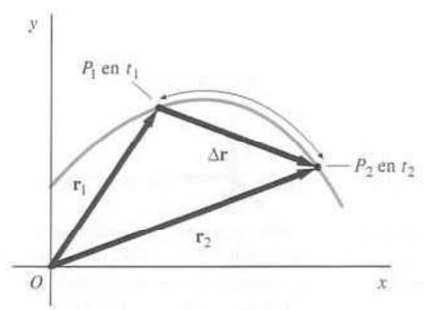


Figura 3.13 El vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ es la diferencia de los vectores de posición $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. De igual modo $\Delta\mathbf{r}$ es el vector que sumado a $\mathbf{r}_1$ nos da el nuevo vector posición $\mathbf{r}_2$.

La figura 3.13 representa la trayectoria o camino real seguido por la partícula. (No confundir la trayectoria con los gráficos x en función de t del capítulo anterior.) En el instante t_1, la partícula se encuentra en P_1, y su vector posición es $\mathbf{r}_1$; en el instante t_2 la partícula se ha movido a P_2 y el vector posición es $\mathbf{r}_2$. El cambio de posición de la partícula es el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{3.10}$$

DEFINICIÓN —VECTOR DESPLAZAMIENTO

El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el **vector velocidad media**.

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{3.11}$$

DEFINICIÓN —VECTOR VELOCIDAD MEDIA

Este vector apunta en la dirección del desplazamiento.

El módulo del vector desplazamiento es inferior a la distancia recorrida a lo largo de la curva a menos que la partícula se mueva en línea recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños (figura 3.14), el desplazamiento se aproxima a la distancia real recorrida por la partícula a lo largo de la curva, y la dirección $\Delta\mathbf{r}$ se aproxima a la dirección de la línea tangente a la curva en el comienzo del intervalo. Definimos el **vector velocidad instantánea** como el límite del vector velocidad media cuando Δt tiende a cero:

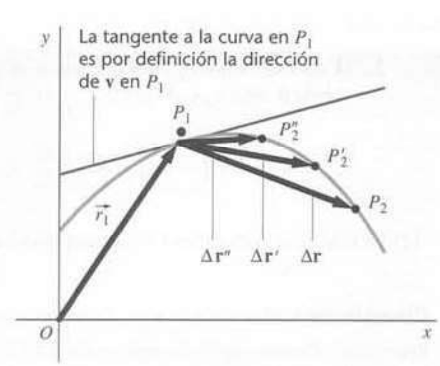


Figura 3.14 Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, la dirección del desplazamiento se aproxima a la tangente a la curva.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3.12}$$

DEFINICIÓN —VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad escalar y apunta en la dirección del movimiento de la partícula a lo largo de la línea tangente a la curva.

Para calcular la derivada en la ecuación 3.12 expresamos el vector posición en función de sus componentes.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\mathbf{j}$$

es decir,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \tag{3.13}$$

EJEMPLO 3.3 | La velocidad de un velero

Un barco de vela tiene las coordenadas $(x_1, y_1) = (110\text{ m}, 218\text{ m})$ en el instante $t_1 = 60$ s. Dos minutos más tarde, en el instante t_2, sus coordenadas son $(x_2, y_2) = (130\text{ m}, 205\text{ m})$. (*a*) Determinar la velocidad media en este intervalo de dos minutos. Expresar v_m en función de sus componentes rectangulares. (*b*) Determinar el módulo y la dirección de esta velocidad media. (*c*) Para $t \geq 20$ s, la posición del barco en función del tiempo es $x(t) = b_1 + b_2 t$ e $y(t) = c_1 + c_2/t$, donde $b_1 = 100$ m, $b_2 = \frac{1}{6}$ m/s, $c_1 = 200$ y $c_2 = 1080$ m · s. Calcular la velocidad instantánea en el tiempo genérico $t \geq 20$ s.

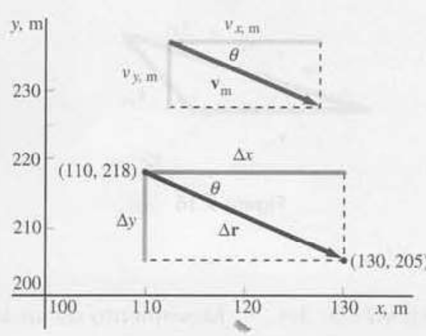


Figura 3.15

Planteamiento del problema Se conocen las posiciones inicial y final del barco de vela. (*a*) El vector velocidad media apunta de la posición inicial a la final. (*b*) Las componentes de la velocidad instantánea se calculan a partir de la ecuación 3.13: $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$.

(a) 1. Dibuje un sistema de coordenadas (figura 3.15) que muestre el desplazamiento del velero. La dirección del vector velocidad media y del vector desplazamiento coincide.

2. Las componentes *x* e *y* de la velocidad media $\mathbf{v}_m$ se calculan directamente a partir de sus definiciones:

$$\mathbf{v}_\mathbf{m} = v_{x,\text{m}}\,\mathbf{i} + v_{y,\text{m}}\,\mathbf{j}$$

donde

$$v_{x,\text{m}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{130\text{ m} - 110\text{ m}}{120\text{ s}} = 0{,}167\text{ m/s}$$

$$v_{y,\text{m}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{205\text{ m} - 218\text{ m}}{120\text{ s}} = -0{,}108\text{ m/s}$$

por lo tanto

$$\mathbf{v}_\mathbf{m} = \boxed{(0{,}167\text{ m/s})\,\mathbf{i} - (0{,}108\text{ m/s})\,\mathbf{j}}$$

3. El módulo de $\mathbf{v}_m$ se deduce del teorema de Pitágoras:

$$v_\text{m} = \sqrt{(v_{x,\text{m}})^2 + (v_{y,\text{m}})^2} = \boxed{0{,}199\text{ m/s}}$$

2. El cociente entre $v_{y,m}$ y $v_{x,m}$ expresa el valor de la tangente del ángulo θ entre $\mathbf{v}_m$ y el eje x:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{v_{y,m}}{v_{x,m}}$$

luego

$$\theta = \text{arctg}\frac{v_{y,m}}{v_{x,m}} = \text{arctg}\frac{-0{,}108\text{ m/s}}{0{,}167\text{ m/s}} = \boxed{-33{,}0°}$$

(c) La velocidad instantánea $\mathbf{v}$ se obtiene calculando dx/dt y dy/dt.

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = b_2\mathbf{i} - c_2t^{-2}\mathbf{j} = \boxed{\left(\frac{1}{6}\text{ m/s}\right)\mathbf{i} - \frac{1080\text{ m}\cdot\text{s}}{t^{-2}}\mathbf{j}}$$

Observación El módulo de $\mathbf{v}$ se obtiene de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y su dirección de tg $\theta = v_y/v_x$.

Ejercicio Determinar las componentes x e y y el módulo y dirección de la velocidad instantánea del barco de vela en el instante $t_1 = 60$ s (*Respuestas* $\mathbf{v} = (\frac{1}{6}\text{ m/s})\mathbf{i} - (0{,}30\text{ m/s})\mathbf{j}$, $v_1 = 0{,}34$ m/s, $\theta_1 = -60{,}9°$.)

Velocidad relativa

Las velocidades relativas en dos y tres dimensiones pueden combinarse del mismo modo que lo hacen en una dimensión, excepto en el hecho de que los vectores velocidad no coinciden necesariamente a lo largo de la misma línea. Si una partícula se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{pA}$ relativa a un sistema de coordenadas A, y éste a su vez se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{AB}$ relativa a otro sistema B, la velocidad de la partícula respecto a B es

$$\mathbf{v}_{pB} = \mathbf{v}_{pA} + \mathbf{v}_{AB} \tag{3.14}$$

VELOCIDAD RELATIVA

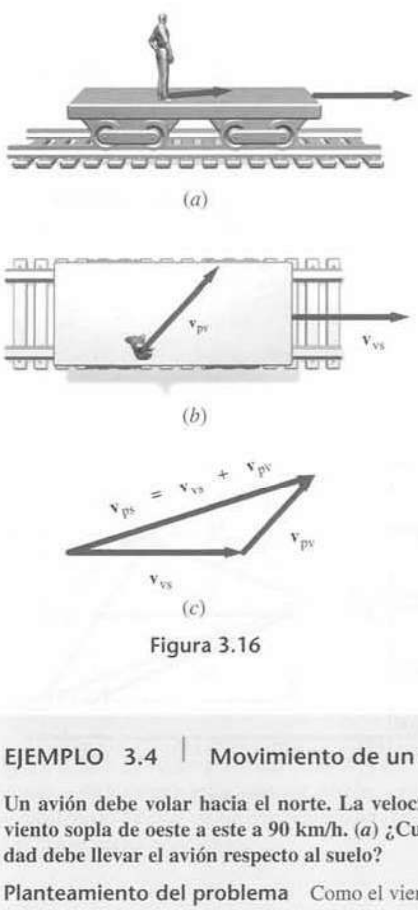


Figura 3.16

Por ejemplo, si Ud. se encuentra en una vagoneta que se mueve respecto al suelo con velocidad $\mathbf{v}_{vs}$ (figura 3.16*a*) y camina con una velocidad relativa a la vagoneta de $\mathbf{v}_{pv}$ (figura 3.16*b*), su velocidad relativa respecto al suelo será la suma de estas dos velocidades: $\mathbf{v}_{ps} = \mathbf{v}_{vs} + \mathbf{v}_{pv}$ (figura 3.16*c*).

La velocidad del objeto A relativa al objeto B es igual en módulo y opuesta en dirección a la velocidad del objeto B respecto al objeto A. Por ejemplo, $\mathbf{v}_{pv} = -\mathbf{v}_{vp}$, en donde $\mathbf{v}_{vp}$ es la velocidad de la vagoneta respecto a la persona. La adición de velocidades relativas se realiza del mismo modo que la suma de desplazamientos: gráficamente, situando los vectores velocidad el origen de uno en el extremo del otro o bien, analíticamente a partir de las componentes vectoriales.

EJEMPLO 3.4 | Movimiento de un avión

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. (*a*) ¿Cuál debe ser el rumbo del avión? (*b*) ¿Qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo?

Planteamiento del problema Como el viento sopla hacia el este, un avión con rumbo hacia el norte derivará hacia el este. Para compensar el viento de través, el avión debe dirigirse hacia el noreste. La velocidad del avión respecto al suelo $\mathbf{v}_{As}$ será la suma de la velocidad del avión respecto al aire $\mathbf{v}_{Aa}$ más la velocidad del aire respecto al suelo $\mathbf{v}_{as}$.

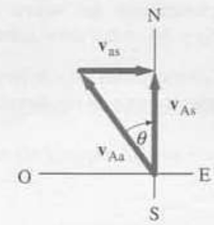


Figura 3.17

(a) 1. La velocidad del avión respecto al suelo viene dada por la ecuación 3.14:

$$\mathbf{v}_{As} = \mathbf{v}_{Aa} + \mathbf{v}_{as}$$

2. Dibuje un diagrama que muestre la suma de los vectores del paso 1. Ponga los ejes de referencia como los que se muestran en la figura 3.17.

3. El seno del ángulo θ formado por la velocidad del avión y la dirección norte es igual al cociente entre v_{as} y v_{Aa}:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{v_{as}}{v_{Aa}}$$

por lo tanto

$$\theta = \operatorname{arcsen}\frac{v_{as}}{v_{Aa}} = \operatorname{arcsen}\frac{90\ \text{km/h}}{200\ \text{km/h}} = \boxed{26{,}7°}$$

(b) Como v_{as} y v_{As} son perpendiculares podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el módulo de $\mathbf{v}_{as}$:

$$v_{Aa}^2 = v_{as}^2 + v_{As}^2$$

con lo cual

$$v_{As} = \sqrt{v_{Aa}^2 - v_{as}^2}$$

$$= \sqrt{(200\ \text{km/h})^2 - (90\ \text{km/h})^2} = \boxed{179\ \text{km/h}}$$

Vector aceleración

Se define el **vector aceleración media** como el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea $\Delta\mathbf{v}$ y el intervalo de tiempo Δt:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{3.15}$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

El **vector aceleración instantánea** es el límite de esta relación cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero; es decir, el vector aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{3.16}$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Para calcular la aceleración instantánea expresaremos $\mathbf{v}$ en función de sus coordenadas rectangulares:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt}\mathbf{k} \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\end{aligned} \tag{3.17}$$

EJEMPLO 3.5 | El movimiento de una pelota de béisbol

La posición de una pelota de béisbol golpeada por el bateador viene dada por la expresión r = 1,5 m i + (12 m/s i + 16 m/s j)t – 4,9 m/s^2 j t^2. Determinar su velocidad y aceleración.

Planteamiento del problema Dado que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, tenemos que $x = 1{,}5\ \text{m} + (12\ \text{m/s})t$ y que $y = (16\ \text{m/s})t - (4{,}9\ \text{m/s}^2)t^2$. Podemos calcular las componentes x e y de la velocidad y de la aceleración derivando x e y respecto a t.