MOVIMIENTO EN DOS Y TRES DIMENSIONES

Capítulo 3

Los barcos a vela no navegan en línea recta hacia su destino sino que siguen una trayectoria en zig-zag contra el viento. El barco de la foto que se dirige hacia un puerto situado hacia el sudeste navega primero hacia el este, después hacia el sur para acabar torciendo finalmente hacia el este.

? ¿Cómo podemos calcular el desplazamiento y la velocidad medias? (Véase el ejemplo 3.3.)

En este capítulo extenderemos las ideas del capítulo anterior a dos y tres dimensiones. Para llevar a cabo esta extensión, introduciremos los vectores y mostraremos cómo se usan para analizar y describir el movimiento.

El objetivo principal de este capítulo es desarrollar el concepto del vector aceleración, un concepto fundamental para el desarrollo de las leyes de Newton en los capítulos 4 y 5.

3.1 El vector desplazamiento

Cuando hay movimiento, el desplazamiento de una partícula tiene una dirección en el espacio y un módulo. La magnitud que expresa la dirección y la distancia en línea recta comprendida entre dos puntos del espacio es un segmento lineal llamado **vector desplazamiento**. Se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector desplazamiento y cuya longitud es proporcional al módulo del vector desplazamiento. Designaremos los vectores con letras negritas, como en **A**. (Cuando se escribe a mano, un vector se indica mediante una flecha sobre el símbolo considerado, por ejemplo, $\vec{A}$.) El módulo de **A** se escribe $|\mathbf{A}|$ o simplemente A y, por ejemplo, el módulo del vector desplazamiento tiene dimensiones de longitud. El módulo de un vector no puede ser negativo.

Suma de vectores desplazamiento

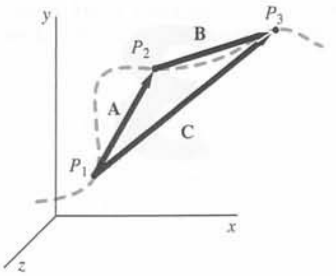


Figura 3.1

La figura 3.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve desde el punto P_1 hasta un segundo punto P_2 y luego a un tercer punto P_3. El desplazamiento de P_1 a P_2 viene representado por el vector **A** y el desplazamiento de P_2 a P_3 por **B**. Obsérvese que el vector desplazamiento depende sólo de los puntos extremos y no de la trayectoria real de la partícula. El desplazamiento *resultante* de P_1 a P_3, llamado **C**, es la suma de los dos desplazamientos sucesivos **A** y **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{3.1}$$

Dos vectores desplazamiento se suman gráficamente situando el origen de uno en el extremo del otro (figura 3.2). El vector resultante se extiende desde el origen del primer vector al extremo final del segundo. Obsérvese que C no es igual a $A + B$ a menos que **A** y **B** estén en la misma dirección. Es decir **C** = **A** + **B** no implica que $C = A + B$.

Una forma equivalente de sumar vectores es el llamado **método del paralelogramo**, que consiste en desplazar **B** hasta que coincida su origen con el de **A**. La diagonal del paralelogramo formado por **A** y **B** es igual a **C**. Como puede verse en la figura 3.3, no existe diferencia en el orden en que sumemos los vectores; es decir **A** + **B** = **B** + **A**.

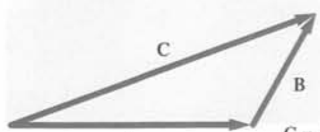


Figura 3.2 Método para la suma de vectores que consiste en situar los dos vectores uno a continuación del otro.

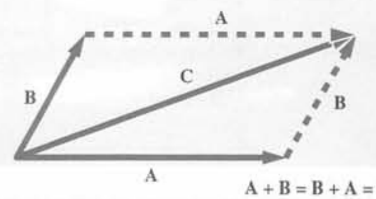


Figura 3.3 Método del paralelogramo para la suma de vectores.

EJEMPLO 3.1 | Desplazamiento

Una persona se mueve 3 km hacia el este y luego 4 km hacia el norte. ¿Cuál es el desplazamiento resultante?

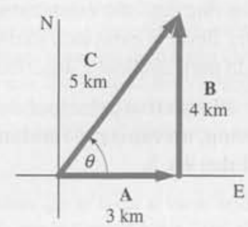


Figura 3.4

Planteamiento del problema Los dos desplazamientos componentes y el desplazamiento resultante se muestran en la figura 3.4. Como **A** y **B** forman un ángulo recto entre sí y **C** = **A** + **B** es la hipotenusa del correspondiente triángulo rectángulo, el módulo C puede hallarse mediante el teorema de Pitágoras. La dirección de **C** se obtiene por trigonometría.

1. El módulo del desplazamiento resultante está relacionado con los módulos de los dos desplazamientos por el teorema de Pitágoras:

$$C^2 = A^2 + B^2$$
$$= (3\text{ km})^2 + (4\text{ km})^2 = 25\text{ km}^2$$

y de aquí

$$C = \sqrt{25\text{ km}^2} = 5\text{ km}$$

2. Sea θ el ángulo que forma el eje de dirección este con el desplazamiento **C**. Según sea la figura podemos determinar tg θ y basta utilizar una calculadora con funciones trigonométricas para obtener θ:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{B}{A}$$

y de aquí

$$\theta = \text{arctg}\,\frac{B}{A} = \text{arctg}\,\frac{4\text{ km}}{3\text{ km}} = 53{,}1°$$

Observación Un vector viene descrito por su módulo y dirección. En este ejemplo el desplazamiento resultante es un vector de longitud 5 km en una dirección 53,1° al norte del este.

3.2 Propiedades generales de los vectores

En física existen muchas magnitudes que poseen módulo y dirección, y se suman como los desplazamientos. Son ejemplos la velocidad, la aceleración, el momento lineal y la fuerza. Estas magnitudes se llaman **vectores**. Las magnitudes que carecen de dirección asociada —por ejemplo, la distancia y el módulo de la velocidad— se denominan **escalares**.

Los vectores son magnitudes con módulo, dirección y sentido que se suman como los desplazamientos.

DEFINICIÓN —VECTORES

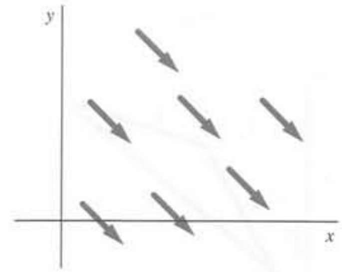
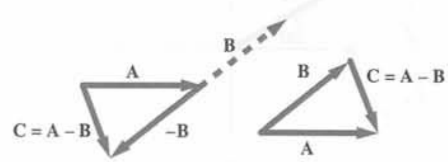


Figura 3.5 Los vectores son iguales si sus módulos y direcciones son los mismos. Todos los vectores de esta figura son iguales.

Un vector se representa gráficamente por una flecha cuya dirección es la misma que la del vector y cuya longitud es proporcional al módulo del vector. Cuando se expresa el módulo de un vector, debe venir acompañado de sus unidades. Así, el módulo del vector velocidad se expresa en metros por segundo. Dos vectores son iguales cuando tienen el mismo módulo y la misma dirección. Gráficamente esto significa que tienen la misma longitud y son paralelos el uno al otro. Una consecuencia de esta definición es que si un vector se mueve manteniéndose paralelo a sí mismo, no se modifica. Así todos los vectores de la figura 3.5 son iguales. Si trasladamos o giramos el sistema de coordenadas, todos los vectores de la figura 3.5 permanecen iguales. Un vector no depende del sistema de coordenadas utilizado para su representación (excepto los vectores de posición, que introduciremos en la sección 3.3).

Producto de un vector por un escalar

Un vector **A** multiplicado por un escalar s es el vector $\mathbf{B} = s\mathbf{A}$, que tiene módulo $|s|A$ y es paralelo a **A** si s es positivo, y antiparalelo a **A** si s es negativo. Así, el vector $-\mathbf{A}$ tiene el mismo módulo que **A**, pero apunta en dirección opuesta, de modo que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$. Las dimensiones de $s\mathbf{A}$ son las de s multiplicadas por las de A.



(*a*) (*b*)

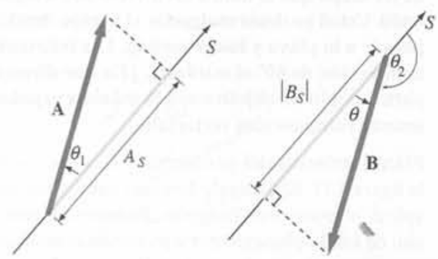
Figura 3.6

Resta de vectores

Para restar el vector **B** del vector **A** basta sumarle $-\mathbf{B}$. El resultado es $\mathbf{C} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ (figura 3.6*a*). Otro método equivalente de restar **B** de **A** es unir sus orígenes y trazar el vector **C** de **B** a **A**. Es decir, **C** es el vector que debe sumarse a **B** para obtener el vector resultante **A** (figura 3.6*b*). Las reglas de sumar o restar dos vectores cualesquiera, tales como dos vectores velocidad o dos vectores aceleración, son las mismas que las utilizadas para los desplazamientos.

Componentes de los vectores

La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es la longitud de la proyección del vector sobre dicha línea. Se obtiene trazando una línea perpendicular desde el extremo o flecha de un vector a la línea, como indica la figura 3.7. El signo de la componente es positivo si la proyección de la punta del vector se encuentra en la dirección positiva con relación a su origen. Las componentes de un vector a lo largo de las direcciones x, y y z, ilustradas en la figura 3.8 para un vector en el plano xy, se denominan componentes rectangulares. Obsérvese que las componentes de un vector dependen del sistema de coordenadas utilizado para su representación, aunque el mismo vector no dependa de ello.



$A_S = A \cos \theta_1$ $\quad$ $B_S = B \cos \theta_2 = -B \cos \theta$

(*a*) (*b*)

Figura 3.7 Definición de la componente de un vector. La componente del vector **A** en la dirección positiva de S es A_s, y A_s es positiva. La componente del vector **B** en la dirección positiva de S es B_s, y B_s es negativa.

Las componentes rectangulares son útiles para la suma o resta de vectores. Si θ es el ángulo comprendido entre **A** y el eje x, resulta

$$A_x = A \cos \theta \tag{3.2}$$

COMPONENTE X DE UN VECTOR

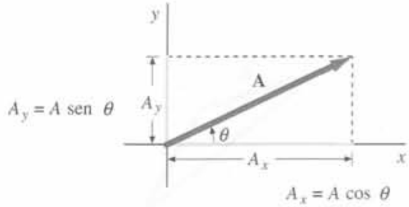


Figura 3.8 Componentes rectangulares de un vector. $A_x = A \cos\theta$, $A_y = A$ sen θ.

y

$$A_y = A \text{ sen } \theta \tag{3.3}$$

COMPONENTE *y* DE UN VECTOR

en donde A es el módulo de **A**.

Si conocemos A_x y A_y, podemos obtener el ángulo θ a partir de

$$\text{tg } \theta = \frac{A_y}{A_x}, \qquad \theta = \text{arctg } \frac{A_y}{A_x} \tag{3.4}$$

y el módulo A a partir del teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \tag{3.5a}$$

En tres dimensiones,

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{3.5b}$$

Las componentes pueden ser positivas o negativas. Por ejemplo, si **A** apunta en la dirección negativa de x, A_x es negativa.

Consideremos dos vectores **A** y **B** en el plano *xy*. Las componentes rectangulares de cada vector y las de la suma **C** = **A** + **B** se muestran en la figura 3.9. Como puede verse, la ecuación vectorial **C** = **A** + **B** es equivalente a las dos ecuaciones de las componentes:

$$C_x = A_x + B_x \tag{3.6a}$$

y

$$C_y = A_y + B_y \tag{3.6b}$$

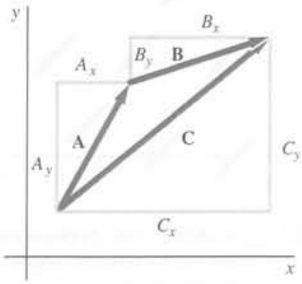


Figura 3.9

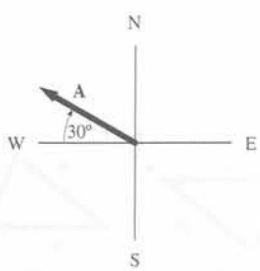


Figura 3.10

Ejercicio Un coche recorre 20 km en dirección 30° al norte del oeste. Se supone que el eje *x* apunta al este y el eje *y* al norte, como en la figura 3.10. Determinar las componentes *x* e *y* del vector desplazamiento del coche. (*Respuesta* $A_x = -17{,}3$ km, $A_y = +10$ km.)

EJEMPLO 3.2 | El mapa del tesoro

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Suponga que usted trabaja como animador en un centro turístico en una isla tropical. Dispone de un mapa que le indica las direcciones a seguir para enterrar un tesoro en un lugar determinado. Usted no desea malgastar el tiempo dando vueltas por la isla, porque quiere acabar pronto para ir a la playa y hacer surfing. Las instrucciones son ir 3 km hacia el oeste y luego 4 km en la dirección de 60º al nordeste. ¿En qué dirección debe moverse y cuánto tendrá que caminar para cumplir su objetivo con la máxima rapidez? Encuentre la respuesta (*a*) gráficamente y (*b*) usando componentes vectoriales

Planteamiento del problema Hay que encontrar la resultante del desplazamiento, que es **C** en la figura 3.11. El triángulo formado por los tres vectores no es rectangular, de modo que no podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Podemos obtener gráficamente la resultante dibujando a escala cada uno de los desplazamientos y midiendo el desplazamiento resultante.

(a) Si dibujamos el primer vector desplazamiento **A** de 3 cm de largo y el segundo **B** de 4 cm de largo, encontraremos que el vector resultante **C** es de unos 3,5 cm de longitud. Así, el módulo del desplazamiento resultante es de 3,5 km. El ángulo θ formado por el desplazamiento resultante y la dirección oeste puede medirse con un transportador angular. Por lo tanto, debe andar 3,5 km a 75°.

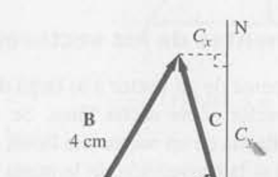


Figura 3.11

(b) 1. Para resolver el problema utilizando las componentes vectoriales, sea **A** el primer desplazamiento y elegimos el eje x positivo en la dirección este y el eje y positivo en la dirección norte. Calculamos A_x y A_y de las ecuaciones 3.2 y 3.3:

$$A_x = -3 \text{ km} \quad \text{y} \quad A_y = 0$$

2. De igual modo calculemos las componentes del segundo desplazamiento **B**:

$$B_x = (4 \text{ km}) \cos 60° = 2 \text{ km}$$
$$B_y = (4 \text{ km}) \operatorname{sen} 60° = 3{,}46 \text{ km}$$

3. Las componentes del desplazamiento resultante **C** = **A** + **B** se obtienen por suma:

$$C_x = A_x + B_x = -3 \text{ km} + 2 \text{ km} = -1 \text{ km}$$
$$C_y = A_y + B_y = 0 + 2\sqrt{3} \text{ km} = 3{,}46 \text{ km}$$

4. El teorema de Pitágoras nos permite obtener la magnitud de **C**:

$$C^2 = C_x^2 + C_y^2 = (-1 \text{ km})^2 + (2\sqrt{3} \text{ km})^2 = 13{,}0 \text{ km}^2$$
$$C = \sqrt{13} \text{ km} = \boxed{3{,}61 \text{ km}}$$

5. El cociente entre C_y y C_x es igual a la tangente del ángulo θ entre **C** y la dirección negativa de x:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{C_y}{|C_x|}$$

por lo tanto,

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3} \text{ km}}{1 \text{ km}} = \operatorname{arctg} (2\sqrt{3})$$
$$= \boxed{74°}$$

Observaciones Como el desplazamiento es una magnitud vectorial, la respuesta debe incluir el módulo y la dirección o ambas componentes. En (*b*) podríamos haber concluido el cálculo en el paso 3, ya que las componentes x e y definen completamente el vector desplazamiento. Se han convertido en el módulo y la dirección para comparar el resultado con la respuesta a la parte (*a*). Obsérvese que en el paso 5 de (*b*) se obtiene un ángulo de 74 °. Este resultado está de acuerdo con el de (*a*) dentro de la exactitud de nuestra medida.

Vectores unitarios

Un **vector unitario** es un vector *sin dimensiones* de módulo unidad. El vector $A^{-1}\mathbf{A}$ es un ejemplo de vector unitario que apunta en la dirección de **A**. (A veces, para evitar confusiones, los vectores unitarios se escriben en negritas con un pequeño ángulo en su parte superior; por ejemplo, $\hat{\mathbf{A}} = A^{-1}\mathbf{A}$.) Los vectores unitarios que apuntan en la direcciones x, y y z son convenientes para expresar los vectores en función de sus componentes rectangulares. Usualmente se escriben **i**, **j** y **k**, respectivamente. Así, el vector $A_x\mathbf{i}$ tiene módulo A_x y apunta en la dirección x positiva si A_x es positiva (o la dirección x negativa si A_x es negativo). Un vector **A** en general puede escribirse como suma de tres vectores, cada uno de ellos paralelo a un eje coordenado (figura 3.12):

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{3.7}$$

La suma de dos vectores **A** y **B** puede escribirse en función de vectores unitarios en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) + (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Las propiedades generales de los vectores se resumen en la tabla 3.1.

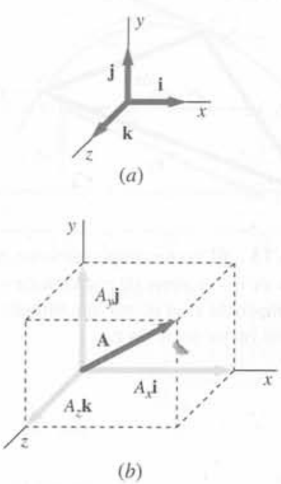


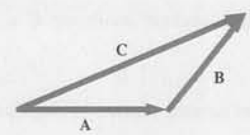
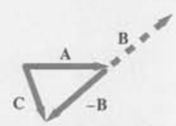
Figura 3.12 (*a*) Vectores unitarios **i**, **j** y **k** en un sistema de coordenadas rectangulares. (*b*) Vector **A** escrito en función de los vectores unitarios: $\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$.

Ejercicio Dados dos vectores

$$\mathbf{A} = (4 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = (2 \text{ m})\mathbf{i} - (3 \text{ m})\mathbf{j},$$

determinar (a) A, (b) B, (c) **A** + **B**, y (d) **A** – **B**. (*Respuestas* (*a*) A = 5 m, (*b*) B = 3,61 m, (*c*) **A** + **B** = (6 m)**i**, (*d*) **A** – **B** = (2 m)**i** + (6 m)**j**.)

TABLA 3.1 Propiedades de los vectores

Propiedad	Explicación	Figura	Representación de las componentes
Igualdad	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $\lvert\mathbf{A}\rvert = \lvert\mathbf{B}\rvert$ y sus direcciones y sentidos son iguales		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Adición	$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negativo de un vector	$\mathbf{A} = -\mathbf{B}$ si $\lvert\mathbf{B}\rvert = \lvert\mathbf{A}\rvert$ y su sentido es opuesto		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Sustracción	$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplicación por un escalar	$\mathbf{B} = s\mathbf{A}$ tiene el módulo $\lvert\mathbf{B}\rvert = s\lvert\mathbf{A}\rvert$ y la misma dirección que $\mathbf{A}$ si es s positivo o $-\mathbf{A}$ si s es negativo		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

3.3 Posición, velocidad y aceleración

Vectores posición y velocidad

El **vector posición** de una partícula es un vector trazado desde el origen de un sistema de coordenadas hasta la posición de la partícula. Para una partícula en el punto (x, y) su vector posición $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{3.9}$$

DEFINICIÓN —VECTOR POSICIÓN

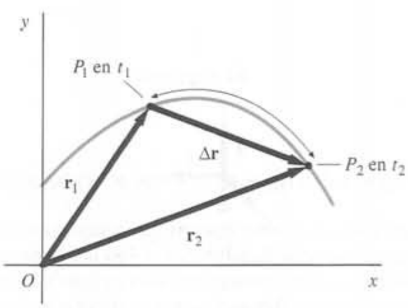


Figura 3.13 El vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ es la diferencia de los vectores de posición $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. De igual modo $\Delta\mathbf{r}$ es el vector que sumado a $\mathbf{r}_1$ nos da el nuevo vector posición $\mathbf{r}_2$.

La figura 3.13 representa la trayectoria o camino real seguido por la partícula. (No confundir la trayectoria con los gráficos x en función de t del capítulo anterior.) En el instante t_1, la partícula se encuentra en P_1, y su vector posición es $\mathbf{r}_1$; en el instante t_2 la partícula se ha movido a P_2 y el vector posición es $\mathbf{r}_2$. El cambio de posición de la partícula es el vector desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$:

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \tag{3.10}$$

DEFINICIÓN —VECTOR DESPLAZAMIENTO

El cociente entre el vector desplazamiento y el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el **vector velocidad media**.

$$\mathbf{v}_m = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{3.11}$$

DEFINICIÓN —VECTOR VELOCIDAD MEDIA

Este vector apunta en la dirección del desplazamiento.

El módulo del vector desplazamiento es inferior a la distancia recorrida a lo largo de la curva a menos que la partícula se mueva en línea recta. Sin embargo, si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños (figura 3.14), el desplazamiento se aproxima a la distancia real recorrida por la partícula a lo largo de la curva, y la dirección $\Delta\mathbf{r}$ se aproxima a la dirección de la línea tangente a la curva en el comienzo del intervalo. Definimos el **vector velocidad instantánea** como el límite del vector velocidad media cuando Δt tiende a cero:

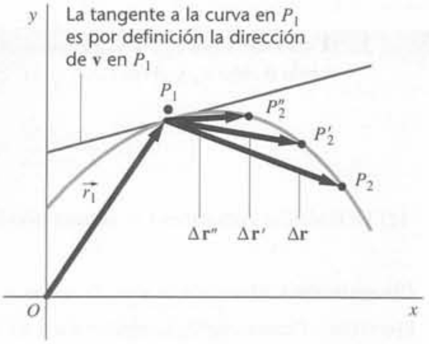


Figura 3.14 Al considerar intervalos de tiempo cada vez más pequeños, la dirección del desplazamiento se aproxima a la tangente a la curva.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3.12}$$

DEFINICIÓN —VECTOR VELOCIDAD INSTANTÁNEA

El vector velocidad instantánea es la derivada del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad escalar y apunta en la dirección del movimiento de la partícula a lo largo de la línea tangente a la curva.

Para calcular la derivada en la ecuación 3.12 expresamos el vector posición en función de sus componentes.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\mathbf{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\mathbf{j}$$

es decir,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} \tag{3.13}$$

EJEMPLO 3.3 | La velocidad de un velero

Un barco de vela tiene las coordenadas $(x_1, y_1) = (110\text{ m}, 218\text{ m})$ en el instante $t_1 = 60$ s. Dos minutos más tarde, en el instante t_2, sus coordenadas son $(x_2, y_2) = (130\text{ m}, 205\text{ m})$. *(a)* Determinar la velocidad media en este intervalo de dos minutos. Expresar v_m en función de sus componentes rectangulares. *(b)* Determinar el módulo y la dirección de esta velocidad media. *(c)* Para $t \geq 20$ s, la posición del barco en función del tiempo es $x(t) = b_1 + b_2 t$ e $y(t) = c_1 + c_2/t$, donde $b_1 = 100$ m, $b_2 = \frac{1}{6}$ m/s, $c_1 = 200$ y $c_2 = 1080$ m · s. Calcular la velocidad instantánea en el tiempo genérico $t \geq 20$ s.

Planteamiento del problema Se conocen las posiciones inicial y final del barco de vela. *(a)* El vector velocidad media apunta de la posición inicial a la final. *(b)* Las componentes de la velocidad instantánea se calculan a partir de la ecuación 3.13: $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$.

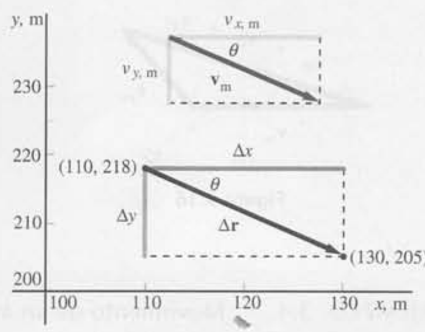


Figura 3.15

(a) 1. Dibuje un sistema de coordenadas (figura 3.15) que muestre el desplazamiento del velero. La dirección del vector velocidad media y del vector desplazamiento coincide.

2. Las componentes x e y de la velocidad media $\mathbf{v}_m$ se calculan directamente a partir de sus definiciones:

$$\mathbf{v}_m = v_{x,m}\,\mathbf{i} + v_{y,m}\,\mathbf{j}$$

donde

$$v_{x,m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{130\text{ m} - 110\text{ m}}{120\text{ s}} = 0{,}167\text{ m/s}$$

$$v_{y,m} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{205\text{ m} - 218\text{ m}}{120\text{ s}} = -0{,}108\text{ m/s}$$

por lo tanto

$$\mathbf{v}_m = \boxed{(0{,}167\text{ m/s})\ \mathbf{i} - (0{,}108\text{ m/s})\ \mathbf{j}}$$

3. El módulo de $\mathbf{v}_m$ se deduce del teorema de Pitágoras:

$$v_m = \sqrt{(v_{x,m})^2 + (v_{y,m})^2} = \boxed{0{,}199\text{ m/s}}$$

2. El cociente entre $v_{y,\mathrm{m}}$ y $v_{x,\mathrm{m}}$ expresa el valor de la tangente del ángulo θ entre $\mathbf{v}_\mathrm{m}$ y el eje x:

$$\mathrm{tg}\ \theta = \frac{v_{y,\mathrm{m}}}{v_{x,\mathrm{m}}}$$

luego

$$\theta = \mathrm{arctg}\frac{v_{y,\mathrm{m}}}{v_{x,\mathrm{m}}} = \mathrm{arctg}\frac{-0{,}108\ \mathrm{m/s}}{0{,}167\ \mathrm{m/s}} = \boxed{-33{,}0°}$$

(c) La velocidad instantánea $\mathbf{v}$ se obtiene calculando dx/dt y dy/dt.

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} = b_2\mathbf{i} - c_2t^{-2}\mathbf{j} = \boxed{\left(\tfrac{1}{6}\ \mathrm{m/s}\right)\mathbf{i} - \frac{1080\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}{t^{-2}}\mathbf{j}}$$

Observación El módulo de $\mathbf{v}$ se obtiene de $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ y su dirección de tg $\theta = v_y/v_x$.

Ejercicio Determinar las componentes x e y y el módulo y dirección de la velocidad instantánea del barco de vela en el instante $t_1 = 60$ s (*Respuestas* $\mathbf{v} = (\frac{1}{6}\ \mathrm{m/s})\mathbf{i} - (0{,}30\ \mathrm{m/s})\mathbf{j}$, $v_1 = 0{,}34$ m/s, $\theta_1 = -60{,}9°$.)

Velocidad relativa

Las velocidades relativas en dos y tres dimensiones pueden combinarse del mismo modo que lo hacen en una dimensión, excepto en el hecho de que los vectores velocidad no coinciden necesariamente a lo largo de la misma línea. Si una partícula se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\mathrm{pA}}$ relativa a un sistema de coordenadas A, y éste a su vez se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\mathrm{AB}}$ relativa a otro sistema B, la velocidad de la partícula respecto a B es

$$\mathbf{v}_{\mathrm{pB}} = \mathbf{v}_{\mathrm{pA}} + \mathbf{v}_{\mathrm{AB}} \tag{3.14}$$

VELOCIDAD RELATIVA

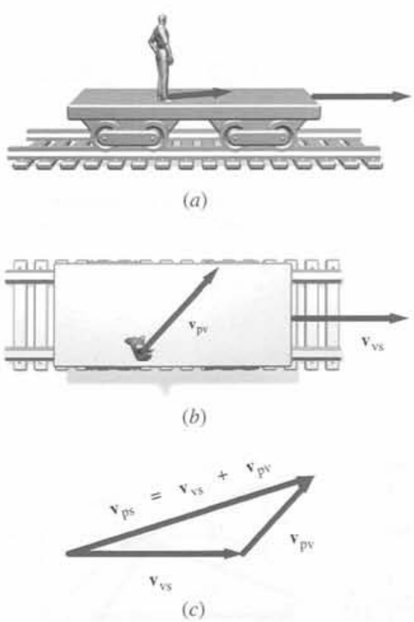


Figura 3.16

Por ejemplo, si Ud. se encuentra en una vagoneta que se mueve respecto al suelo con velocidad $\mathbf{v}_{\mathrm{vs}}$ (figura 3.16*a*) y camina con una velocidad relativa a la vagoneta de $\mathbf{v}_{\mathrm{pv}}$ (figura 3.16*b*), su velocidad relativa respecto al suelo será la suma de estas dos velocidades: $\mathbf{v}_{\mathrm{ps}} = \mathbf{v}_{\mathrm{vs}} + \mathbf{v}_{\mathrm{pv}}$ (figura 3.16*c*).

La velocidad del objeto A relativa al objeto B es igual en módulo y opuesta en dirección a la velocidad del objeto B respecto al objeto A. Por ejemplo, $\mathbf{v}_{\mathrm{pv}} = -\mathbf{v}_{\mathrm{vp}}$, en donde $\mathbf{v}_{\mathrm{vp}}$ es la velocidad de la vagoneta respecto a la persona. La adición de velocidades relativas se realiza del mismo modo que la suma de desplazamientos: gráficamente, situando los vectores velocidad el origen de uno en el extremo del otro o bien, analíticamente a partir de las componentes vectoriales.

EJEMPLO 3.4 | Movimiento de un avión

Un avión debe volar hacia el norte. La velocidad del avión respecto al aire es 200 km/h y el viento sopla de oeste a este a 90 km/h. (*a*) ¿Cuál debe ser el rumbo del avión? (*b*) ¿Qué velocidad debe llevar el avión respecto al suelo?

Planteamiento del problema Como el viento sopla hacia el este, un avión con rumbo hacia el norte derivará hacia el este. Para compensar el viento de través, el avión debe dirigirse hacia el noreste. La velocidad del avión respecto al suelo $\mathbf{v}_{\mathrm{As}}$ será la suma de la velocidad del avión respecto al aire $\mathbf{v}_{\mathrm{Aa}}$ más la velocidad del aire respecto al suelo $\mathbf{v}_{\mathrm{as}}$.

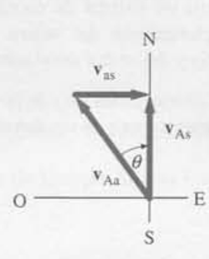


Figura 3.17

(a) 1. La velocidad del avión respecto al suelo viene dada por la ecuación 3.14:

$$\mathbf{v}_{\mathrm{As}} = \mathbf{v}_{\mathrm{Aa}} + \mathbf{v}_{\mathrm{as}}$$

2. Dibuje un diagrama que muestre la suma de los vectores del paso 1. Ponga los ejes de referencia como los que se muestran en la figura 3.17.

3. El seno del ángulo θ formado por la velocidad del avión y la dirección norte es igual al cociente entre v_{as} y v_{Aa}:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{v_{as}}{v_{Aa}}$$

por lo tanto

$$\theta = \text{arcsen}\frac{v_{as}}{v_{Aa}} = \text{arcsen}\frac{90\text{ km/h}}{200\text{ km/h}} = \boxed{26{,}7°}$$

(b) Como v_{as} y v_{As} son perpendiculares podemos utilizar el teorema de Pitágoras para determinar el módulo de $\mathbf{v}_{as}$:

$$v_{Aa}^2 = v_{as}^2 + v_{As}^2$$

con lo cual

$$v_{As} = \sqrt{v_{Aa}^2 - v_{as}^2}$$

$$= \sqrt{(200\text{ km/h})^2 - (90\text{ km/h})^2} = \boxed{179\text{ km/h}}$$

Vector aceleración

Se define el **vector aceleración media** como el cociente entre la variación del vector velocidad instantánea $\Delta\mathbf{v}$ y el intervalo de tiempo Δt:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{3.15}$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN MEDIA

El **vector aceleración instantánea** es el límite de esta relación cuando el intervalo de tiempo se aproxima a cero; es decir, el vector aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{3.16}$$

DEFINICIÓN —VECTOR ACELERACIÓN INSTANTÁNEA

Para calcular la aceleración instantánea expresaremos $\mathbf{v}$ en función de sus coordenadas rectangulares:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k} = \frac{d^2x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt}\mathbf{k}\\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\end{aligned} \tag{3.17}$$

EJEMPLO 3.5 | El movimiento de una pelota de béisbol

La posición de una pelota de béisbol golpeada por el bateador viene dada por la expresión $\mathbf{r}$ = 1,5 m $\mathbf{i}$ + (12 m/s $\mathbf{i}$ + 16 m/s $\mathbf{j}$)t – 4,9 m/s² $\mathbf{j}$ t^2. Determinar su velocidad y aceleración.

Planteamiento del problema Dado que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, tenemos que x = 1,5 m + (12 m/s)t y que y = (16 m/s)t – (4,9 m/s²)t^2. Podemos calcular las componentes x e y de la velocidad y de la aceleración derivando x e y respecto a t.

1. Las componentes x e y de la velocidad se obtienen derivando x e y.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[1{,}5\ \mathrm{m} + (12\ \mathrm{m/s})t] = 12\ \mathrm{m/s}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}[(16\ \mathrm{m/s})t - (4{,}9\ \mathrm{m/s^2})t^2]$$

$$= 16\ \mathrm{m/s} - (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})t$$

2. Derivando de nuevo se obtienen las componentes de la aceleración:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

3. Utilizando la notación vectorial, la velocidad y la aceleración son:

$$\mathbf{v} = \boxed{(12\ \mathrm{m/s})\mathbf{i} + [16\ \mathrm{m/s} + (9{,}8\ \mathrm{m/s^2})t]\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{a} = \boxed{(-9{,}8\ \mathrm{m/s^2})\ \mathbf{j}}$$

Observación Este es un ejemplo del movimiento de proyectiles, tema que estudiaremos en la sección 3.4.

Para que un vector sea constante, tanto su módulo como su dirección deben permanecer constantes. Si cualquiera de ellas cambia, el vector se modifica. Por lo tanto, si un coche toma una curva en la carretera con el módulo de la velocidad constante, experimenta una aceleración, ya que el vector velocidad se modifica debido al cambio de dirección.

EJEMPLO 3.6 | Doblando una esquina

Un coche se mueve hacia el este a 60 km/h. Toma una curva y 5 s más tarde viaja hacia el norte a 60 km/h. Determinar la aceleración media del coche.

Planteamiento del problema Los vectores inicial y final se indican en la figura 3.18. Elegimos el vector unitario **i** hacia el este y el vector **j** hacia el norte y calculamos la aceleración media a partir de su definición, $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Obsérvese que $\Delta\mathbf{v}$ es el vector que sumado a $\mathbf{v}_i$ nos da $\mathbf{v}_f$.

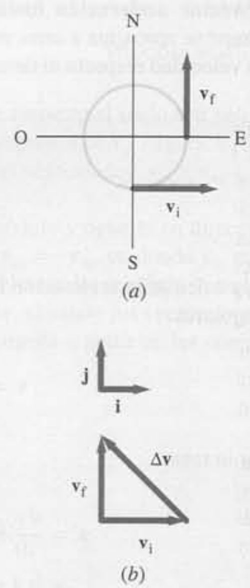


Figura 3.18

1. La aceleración media es el cociente entre la variación de velocidad y el intervalo de tiempo:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}$$

2. El cambio de velocidad viene relacionado con las velocidades inicial y final:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i$$

3. Exprese las velocidades inicial y final como vectores:

$$\mathbf{v}_i = (60\ \mathrm{km/h})\mathbf{i}$$

$$\mathbf{v}_f = (60\ \mathrm{km/h})\mathbf{j}$$

4. Sustituya los resultados anteriores para determinar la aceleración media:

$$\mathbf{a}_m = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{\Delta t} = \frac{(60\ \mathrm{km/h})\mathbf{i} - (60\ \mathrm{km/h})\mathbf{j}}{5\ \mathrm{s}}$$

$$= \boxed{-[(12\ \mathrm{km/h})/\mathrm{s}]\mathbf{i} + [(12\ \mathrm{km/h})/\mathrm{s}]\mathbf{j}}$$

Observación El coche acelera, aunque el módulo de la velocidad no cambia.

Ejercicio Determinar el módulo y la dirección del vector aceleración media. (*Respuesta* a_m = (17,0 km/h)/s, a 45° hacia el oeste del norte.)

El movimiento de un objeto alrededor de una circunferencia es un ejemplo corriente de movimiento en el cual la velocidad de un objeto cambia, aunque su módulo permanezca constante.

La dirección del vector aceleración En los ejemplos siguientes queremos mostrar cómo se determina la dirección del vector aceleración a partir de una descripción del movimiento. Por ejemplo, analicemos el movimiento de una gimnasta saltando en una plataforma

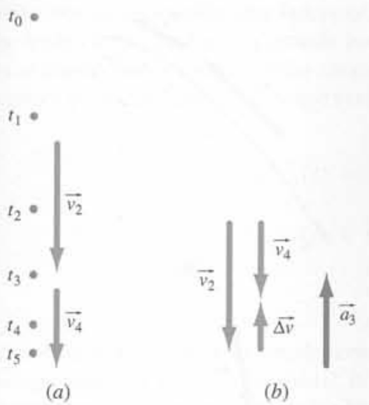


Figura 3.19 (*a*) Diagrama del movimiento del frenado de una saltadora cuando llega al suelo. Los puntos se han dibujado a instantes de tiempo consecutivos. (*b*) Dibujamos los vectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4$ en el mismo punto y determinamos $\Delta\mathbf{v}$ como el vector que une el extremo de $\mathbf{v}_2$ con el punto que alcanza $\mathbf{v}_4$ de modo que $\mathbf{v}_2 + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_4$. La aceleración $\mathbf{a}_3$ va en la misma dirección y sentido que $\Delta\mathbf{v}$.

Figura 3.20 Los puntos que representan el ascenso de la saltadora se dibujan a la derecha de aquellos que representan su descenso con el objetivo de que no se superpongan. Sin embargo, el movimiento de la saltadora está dirigido en la misma dirección aunque con sentido contrario.

elástica cuando alcanza el punto más bajo de un salto y frena y, posteriormente, cambia el sentido de su velocidad iniciando un nuevo salto. Para determinar la dirección de la aceleración cuando está frenando, en la figura 3.19*a* dibujamos una serie de puntos que muestran su posición en sucesivos instantes de tiempo. Cuanto más rápido se mueve, mayor es la distancia que recorre en instantes de tiempo sucesivos y, por lo tanto, mayor es la distancia entre los correspondientes puntos de la figura. Numeramos los puntos correlativamente, empezando con el cero. En el instante t_0 la saltadora está en el punto 0, en el instante t_1 en el punto 1 y así sucesivamente. Para determinar la dirección de la aceleración en el instante t_3 dibujamos los vectores que representan la velocidad de la saltadora en los instantes t_2 y t_4. La aceleración media en el intervalo entre t_2 y t_4 es $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_2$ y $\Delta t = t_4 - t_2$. Usamos estas expresiones para estimar la aceleración de la saltadora en el instante de tiempo t_3, es decir, $\mathbf{a}_3 \approx \Delta\mathbf{v}/\Delta t$. Como $\mathbf{a}_3$ y $\Delta\mathbf{v}$ van en la misma dirección, determinando la dirección de $\Delta\mathbf{v}$ encontramos también la dirección de $\mathbf{a}_3$. La dirección de $\Delta\mathbf{v}$ se obtiene usando la relación $\mathbf{v}_2 + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_4$ y dibujando el correspondiente diagrama de suma de vectores (figura 3.19*b*). Como la saltadora se mueve más rápido en el instante t_2 que en el instante t_4 (los puntos están más separados), la longitud de $\mathbf{v}_2$ es superior a la de $\mathbf{v}_4$. A partir de la figura obtenemos la dirección de $\Delta\mathbf{v}$ y, por lo tanto, la dirección de $\mathbf{a}_3$.

Ejercicio La figura 3.20 es el diagrama del movimiento de la saltadora antes, durante y después del instante de tiempo t_6, cuando se halla momentánemanete en reposo en el punto más bajo de su descenso. En el trozo mostrado de su ascenso la velocidad de la saltadora aumenta. Utilice este diagrama para determinar la dirección de la aceleración de la saltadora (*a*) en el instante t_6 y (*b*) en el instante t_9. (*Respuesta* (*a*) hacia arriba, (*b*) hacia arriba)

EJEMPLO 3.7 | Un birrete volador

Un estudiante de física el día de su graduación lanza su birrete al aire con un ángulo inicial de 60º por encima de la horizontal. Determinar la dirección de la aceleración del birrete durante su movimiento ascendente usando un diagrama del movimiento.

Planteamiento del problema A medida que el birrete sube, pierde velocidad y varía su posición. Dibujaremos el diagrama del movimiento y para determinar la dirección de $\Delta\mathbf{v}$, es decir, la de la aceleración, haremos un esquema de la relación $\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$.

1. El diagrama de la figura 3.21*a* muestra el movimiento ascendente del birrete. Como a medida que asciende se frena, el espacio entre los puntos disminuye.
2. En un punto de la figura se dibuja el vector velocidad en un instante de tiempo inmediatamente anterior y posterior al elegido. Nótese que los vectores se dibujan tangentes a la trayectoria del birrete.
3. La representación gráfica de la relación $\mathbf{v}_i + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_f$ se obtiene dibujando los dos vectores velocidad en un mismo punto. Estos vectores tienen el mismo módulo y dirección que los vectores dibujados en el paso 2. El vector $\Delta\mathbf{v}$ se obtiene uniendo sus extremos.
4. El vector aceleración tiene la misma dirección que el vector $\Delta\mathbf{v}$, pero no necesariamente la misma longitud, ya que $\mathbf{a} = \Delta\mathbf{v}/\Delta t$.

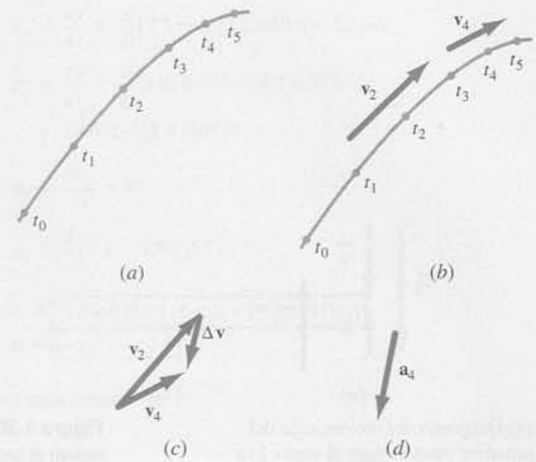


Figura 3.21

Observación El método de determinar la dirección de la aceleración mediante el diagrama del movimiento no es preciso. Por consiguiente, el resultado solamente es una estimación de la aceleración, no un cálculo exacto.

Ejercicio Usar el diagrama del movimiento para determinar la dirección de la aceleración del birrete del ejemplo 3.7 durante su caída. (*Respuesta* directamente hacia abajo)

3.4 Primer caso particular: movimiento de proyectiles

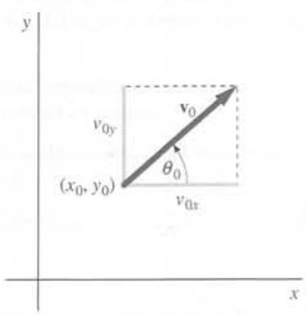


Figura 3.22

La figura 3.22 muestra el lanzamiento de una partícula con velocidad inicial v_0 y formando un ángulo θ_0 con el eje horizontal. Sea (x_0, y_0) el punto de lanzamiento; y es positiva hacia arriba y x positiva hacia la derecha.

Las componentes de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta_0 \tag{3.18a}$$

$$v_{0y} = v_0 \,\text{sen}\, \theta_0 \tag{3.18b}$$

En ausencia de la resistencia del aire, la aceleración es la de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo:

$$a_x = 0 \tag{3.19a}$$

y

$$a_y = -g \tag{3.19b}$$

Como la aceleración es constante, podemos utilizar las ecuaciones cinemáticas discutidas en el capítulo 2. La componente x de la velocidad es constante, ya que no existe aceleración horizontal:

$$v_x = v_{0x} \tag{3.20a}$$

La componente y varía con el tiempo según la ecuación 2.11, con $a = -g$:

$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.20b}$$

Obsérvese que v_x no depende de v_y y viceversa. ***Las componentes horizontal y vertical del movimiento de proyectiles son independientes.*** Esto puede demostrarse dejando caer una bola desde cierta altura y proyectando horizontalmente desde la misma altura una segunda bola al mismo tiempo. Ambas bolas chocan contra el suelo simultáneamente. Los desplazamientos x e y vienen dados por (véase ecuación 2.16.)

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \tag{3.21a}$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{3.21b}$$

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

La notación $x(t)$ e $y(t)$ destaca simplemente que x e y son funciones del tiempo. Si se conoce la componente y de la velocidad inicial, la ecuación 3.21*b* nos permite determinar el instante t en que la partícula se encuentra a la altura y. La posición horizontal en ese mismo tiempo puede calcularse a partir de la ecuación 3.21*a*. La distancia total horizontal recorrida por un proyectil es su **alcance**. (Las formas vectoriales de las ecuaciones 3.19 a 3.21 se dan en las páginas 63 y 64.)

EJEMPLO 3.8 | Otro birrete en el aire

Un estudiante de física lanza un birrete al aire con una velocidad inicial de 24,5 m/s, formando un ángulo de 36,9° con la horizontal. Posteriormente, otro estudiante lo coge. Determinar (*a*) el tiempo total que el birrete está en el aire y (*b*) la distancia total horizontal recorrida.

Planteamiento del problema Elegimos la posición inicial del birrete como origen, de modo que $x_0 = y_0 = 0$. Suponemos que el otro estudiante lo coge a la misma altura. El tiempo total que el birrete está en el aire se determina haciendo $y = 0$ en la ecuación 3.21*b*. Este resultado puede utilizarse en la ecuación 3.21*a* para determinar la distancia total recorrida.

(a) 1. Hacemos $y = 0$ en la ecuación 3.21*b* y despejamos t:

$$y = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 = t\left(v_{0y} - \tfrac{1}{2}gt\right) = 0$$

2. Existen dos soluciones para t:

$$t = 0 \quad \text{(condiciones iniciales)}$$

$$t = \frac{2v_{0y}}{g}$$

3. Calcular la componente vertical del vector velocidad inicial:

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 = (24{,}5 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 36{,}9° = 14{,}7 \text{ m/s}$$

4. Sustituir este resultado en v_{0y} del paso 2 para determinar el tiempo total t:

$$t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta_0}{g}$$

$$= \frac{2(24{,}5 \text{ m/s})\operatorname{sen} 36{,}9°}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = \boxed{3{,}00 \text{ s}}$$

(b) Utilizar este valor del tiempo para calcular la distancia total horizontal recorrida:

$$x = v_{0x}t = (v_0 \cos \theta_0)t = (24{,}5 \text{ m/s}) \cos 36{,}9°(3,00 \text{ s}) = \boxed{58{,}8 \text{ m}}$$

Observación El tiempo que el birrete está en el aire es el mismo que obtuvimos en el ejemplo 2.9, en donde el birrete fue lanzado verticalmente hacia arriba con $v_0 = 14{,}7$ m/s. La figura 3.23 muestra la altura y en función de t para el birrete. Esta curva es idéntica a la representada en la figura 2.11 (ejemplo 2.9) porque ambos birretes están sometidos a la misma aceleración y velocidad vertical. La figura 3.23 puede reinterpretarse como un gráfico de y en función de x si su escala de tiempo se convierte en una escala de longitud. Para ello basta multiplicar los valores del tiempo por 19,6 m/s, ya que el birrete se desplaza horizontalmente a (24,5 m/s) cos 36,9° = 19,6 m/s. La curva y en función de x es una parábola.

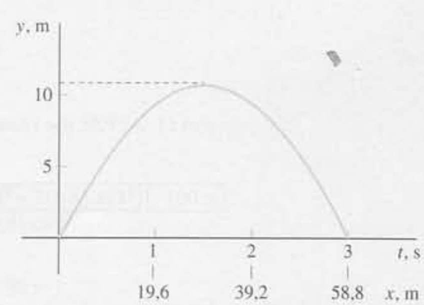


Figura 3.23

La figura 3.24 muestra una serie de gráficos de las distancias verticales en función de las distancias horizontales para proyectiles de velocidad inicial 24,5 m/s y varios ángulos iniciales distintos. Los ángulos representados son 45°, que es el de alcance máximo, y pares de ángulos que difieren el mismo número de grados por encima y por debajo de 45°. Obsérvese que estos pares de ángulo tienen el mismo alcance. La curva azul tiene un ángulo inicial de 36,9° (0,64 rad), como en este ejemplo.

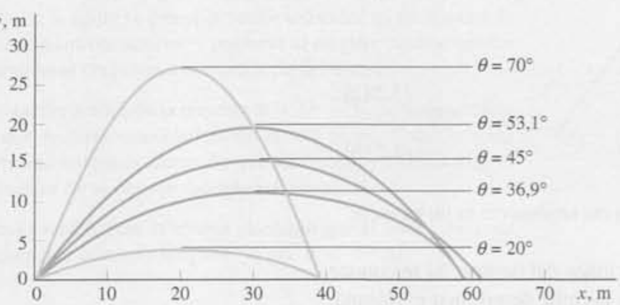


Figura 3.24

La ecuación general para la trayectoria $y(x)$ puede obtenerse a partir de las ecuaciones 3.21 eliminando la variable t entre ambas. Escogiendo $x_0 = y_0 = 0$ se obtiene $t = x/v_{0x}$ de la ecuación 3.21a. Sustituyendo este resultado en la ecuación 3.21b se obtiene

$$y(x) = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2 = \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

Teniendo en cuenta los valores de las componentes de las velocidades, resulta

$$y(x) = (\text{tg } \theta_0)x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}\right)x^2 \qquad (3.22)$$

TRAYECTORIA DE UN PROYECTIL

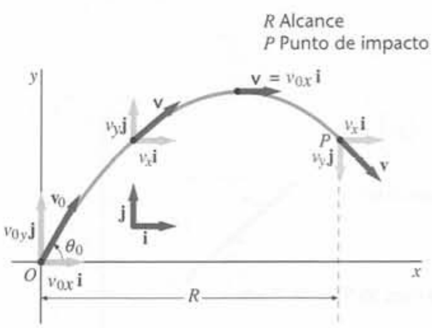


Figura 3.25 Trayectoria de un proyectil, en donde se indican los vectores velocidad.

para la trayectoria de un proyectil. Esta ecuación es de la forma $y = ax + bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. La figura 3.25 muestra la trayectoria de un proyectil con el vector velocidad y sus componentes indicadas en diversos puntos. Esta trayectoria se refiere a un proyectil que choca con el suelo en P. La distancia horizontal entre el punto de lanzamiento y el de impacto es el alcance R.

En el caso especial en que las elevaciones inicial y final sean iguales, puede deducirse una fórmula general para hallar el alcance de un proyectil en función de su velocidad inicial y el ángulo de proyección. Como en los ejemplos anteriores, el alcance se obtiene multiplicando la componente x de la velocidad por el tiempo total que el proyectil está en el aire. El tiempo total de vuelo T se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación 3.21b:

$$y(T) = v_{0y}T - \tfrac{1}{2}gT^2 = 0, \quad T > 0$$

Dividiendo por T se obtiene

$$v_{0y} - \tfrac{1}{2}gT = 0$$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo del proyectil es

$$T = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0}{g}\text{ sen } \theta_0$$

y el alcance:

$$R = v_{0x}T = (v_0 \cos \theta_0)\left(\frac{2v_0}{g}\text{ sen } \theta_0\right) = \frac{2v_0^2}{g}\text{ sen } \theta_0 \cos \theta_0$$

Esta expresión puede simplificarse utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\, \text{sen}\, \theta \cos \theta$$

Por consiguiente,

$$R = \frac{v_0^2}{g}\, \text{sen}\, 2\theta_0 \qquad (3.23)$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL PARA ELEVACIONES INICIAL Y FINAL IGUALES

Ejercicio Utilizar la ecuación 3.22 de la trayectoria para deducir la ecuación 3.23. (*Respuesta* Hacer $y(x) = 0$ y despejar x.)

La ecuación 3.23 es útil para determinar el alcance de proyectiles con elevaciones inicial y final iguales. Es importante destacar que esta ecuación muestra cómo el alcance depende de θ. Como el valor máximo de sen 2θ es 1, cuando $2\theta = 90°$, o sea, $\theta = 45°$, el alcance del proyectil es máximo cuando $\theta = 45°$. En muchas aplicaciones prácticas las cotas de altura inicial y final pueden no ser iguales y son importantes otras consideraciones. Por ejemplo, en el lanzamiento de peso, la bola termina su recorrido cuando choca contra el suelo, pero ha sido proyectada desde una altura inicial de unos 2 m sobre el suelo. Esto hace que el alcance sea máximo para un ángulo algo inferior a 45°, como se indica en la figura 3.26. Los estudios realizados de los mejores lanzadores de peso muestran que el alcance máximo tiene lugar para un ángulo inicial de unos 42°.

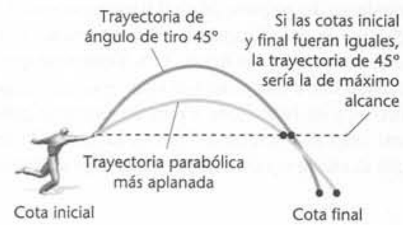


Figura 3.26 Si un proyectil toca el suelo en una cota inferior a la de proyección, el alcance máximo se alcanza bajo un ángulo de tiro algo menor de 45°.

EJEMPLO 3.9 | La caída de un paquete de aprovisionamiento

Un helicóptero deja caer un paquete con suministros a las víctimas de una inundación que se hallan en una balsa. Cuando el paquete se lanza, el helicóptero se encuentra a 100 m por encima de la balsa, volando a 25 m/s y formando un ángulo de 36,9° sobre la horizontal. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo estará el paquete en el aire? (*b*) ¿Dónde caerá el paquete? (*c*) Si el helicóptero vuela a velocidad constante, ¿cuál será su posición en el instante en que el paquete llega al suelo?

Planteamiento del problema La distancia horizontal recorrida por el paquete viene dada por la ecuación 3.21*a*, en donde t es el tiempo que el paquete se encuentra en el aire. El valor de t puede determinarse a partir de la ecuación 3.21*b*. Escoger el origen directamente por debajo del helicóptero cuando el paquete se lanza. La velocidad inicial del paquete es la velocidad inicial del helicóptero.

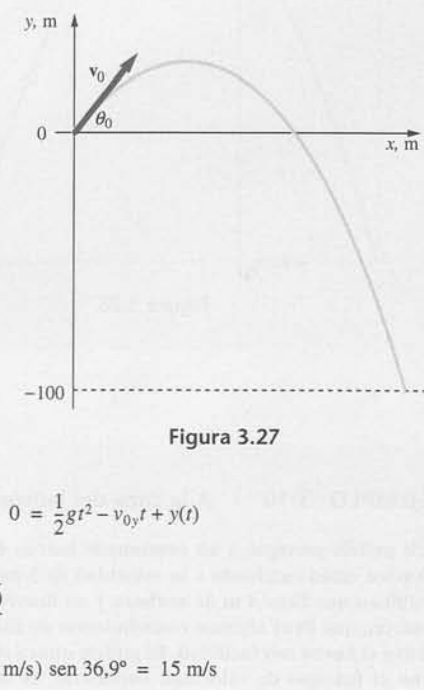


Figura 3.27

(a) 1. La trayectoria del paquete durante el tiempo que está en el aire se muestra en la figura 3.27.

2. Para determinar el tiempo que el paquete está en el aire escribimos $y(t)$.

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

3. Haciendo $y_0 = 0$, podemos aplicar la fórmula para la resolución de la ecuación de segundo grado para t:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{o} \quad 0 = \frac{1}{2}gt^2 - v_{0y}t + y(t)$$

despejando t

$$t = \frac{v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}^2 - 2gy(t)}}{g}$$

4. Calculamos t cuando $y(t) = -100$ m. Para ello se calcula v_{0y} y dado que el paquete se suelta cuando $t = 0$, el tiempo que transcurre hasta el impacto no puede ser negativo. Por lo tanto:

$$v_{0y} = v_0\, \text{sen}\, \theta_0 = (25\ \text{m/s})\, \text{sen}\, 36{,}9° = 15\ \text{m/s}$$

y sustituyendo

$$t = \frac{15\ \text{m/s} \pm \sqrt{(15\ \text{m/s})^2 - 2(9{,}81\ \text{m/s}^2)(-100\ \text{m})}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}$$

hay dos soluciones

$$t = -3{,}24\ \text{s} \quad \text{o} \quad t = 6{,}30\ \text{s}$$

$$t = \boxed{6{,}30\ \text{s}}$$

(b) Cuando el paquete choca con el agua, se ha movido una distancia horizontal x, donde x es la velocidad horizontal por el tiempo de caída del paquete. Primero calculamos la velocidad horizontal:

$$v_{0y} = v_0 \cos \theta_0 = (25 \text{ m/s}) \cos 36{,}9° = 20 \text{ m/s}$$

por lo tanto

$$x = v_{0x}t = (20 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

(c) Las coordenadas de la posición del helicóptero en el momento del impacto del paquete con el agua son:

$$x_h = v_{0x}t = (20 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = \boxed{126 \text{ m}}$$

$$y_h = y_{h0} + v_{h0}t = 0 + (15 \text{ m/s})(6{,}30 \text{ s}) = \boxed{94{,}5 \text{ m}}$$

El helicóptero está 194.5 m directamente por encima del paquete.

Observación El tiempo positivo es el apropiado, ya que corresponde a un tiempo posterior al lanzamiento del paquete (el cual tiene lugar para $t = 0$). La solución negativa del tiempo corresponde al instante en que el paquete se encontraría a $y = 0$ si su movimiento hubiera comenzado con anterioridad, como indica la figura 3.28. Obsérvese que el helicóptero se encuentra por encima del paquete cuando éste choca contra el agua (y en cualquier momento anterior). La figura 3.29 muestra un gráfico de y en función de x para una serie de paquetes lanzados con diversos ángulos iniciales y con una velocidad inicial de 25 m/s. La curva de ángulo inicial 36,9° es la de este ejemplo. Obsérvese que el máximo alcance tiene lugar bajo un ángulo menor que 45°.

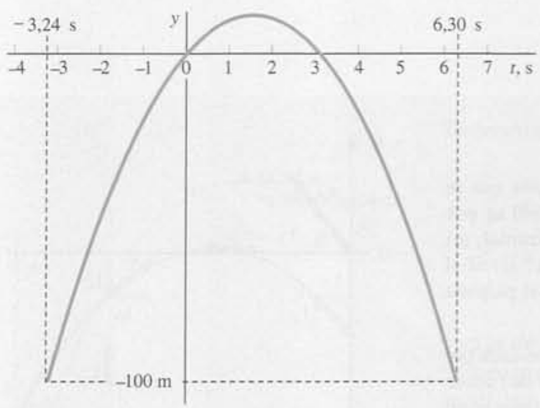


Figura 3.28

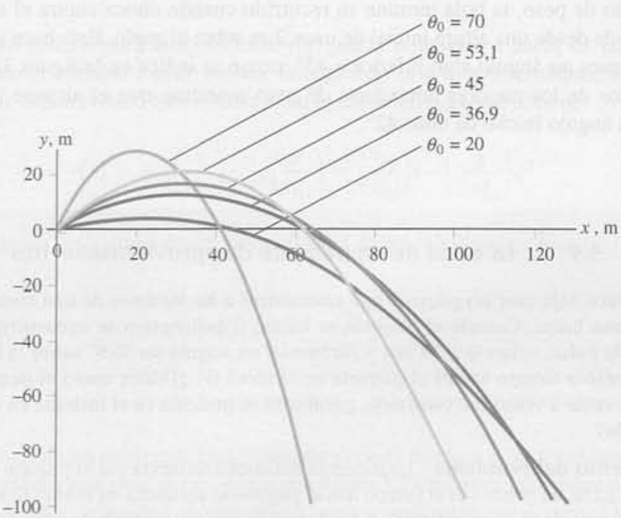


Figura 3.29

EJEMPLO 3.10 | A la caza del ladrón

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Un policía persigue a un consumado ladrón de joyas a través de los tejados de la ciudad. Ambos están corriendo a la velocidad de 5 m/s cuando llegan a un espacio vacío entre dos edificios que tiene 4 m de anchura y un desnivel de 3 m, tal como muestra la figura 3.30. El ladrón, que tiene algunos conocimientos de física, salta a 5 m/s con una inclinación de 45° y salva el hueco con facilidad. El policía nunca estudió física y piensa que lo mejor sería saltar con el máximo de velocidad horizontal, de modo que salta a 5 m/s horizontalmente. *(a)* ¿Conseguirá salvar el obstáculo? *(b)* ¿A qué distancia del borde del segundo edificio llegó el ladrón?

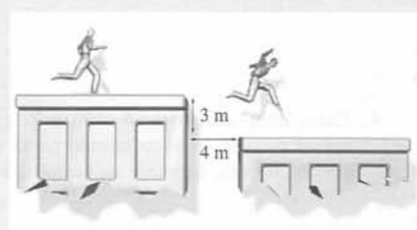


Figura 3.30

Planteamiento del problema El tiempo en el aire durante el salto depende sólo del movimiento vertical. Elegir como origen el punto de lanzamiento con la dirección positiva hacia arriba, para poder aplicar las ecuaciones 3.21. Utilizar la ecuación 3.21b para $y(t)$ y deducir de ella el tiempo para $y = -3$ m para $\theta_0 = 0°$ y de nuevo para $\theta_0 = 45°$. El valor de x correspondiente a este tiempo es la distancia horizontal recorrida.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Escribir $y(t)$ para el policía y calcular t cuando $y = -3$ m.	$t = 0{,}782$ s
2. Determinar la distancia horizontal recorrida durante este tiempo.	$x = \boxed{3{,}91 \text{ m}}$
	Como esta distancia es menor de 4 m el policía no puede cruzar el espacio vacío entre los edificios.
(b) 1. Escribir $y(t)$ para el ladrón y sustituir $y = -3$m. $y(t)$ es una ecuación de segundo grado con dos soluciones, pero sólo una es aceptable.	$t = -0{,}5$ s o $t = 1{,}22$ s Obviamente, el ladrón alcanza el techo después de saltar, de modo que $t = 1{,}22$ s
2. Calcular la distancia horizontal correspondiente al valor positivo de t.	$x = v_{0x}t = 4{,}31$ m
3. Restar 4 m de esta distancia.	$4{,}31 \text{ m} - 4{,}0 \text{ m} = \boxed{0{,}31 \text{ m}}$

Observación El ladrón probablemente sabía que debía saltar con una inclinación algo menor de 45°, pero desde luego, no tuvo tiempo para resolver exactamente el problema. El policía realmente consiguió alcanzar el segundo edificio contrayendo sus músculos abdominales antes del impacto. Con ello subió sus pies algo más de 9 cm, la distancia mínima necesaria para completar el salto sin accidentarse.

EJEMPLO 3.11 | Lanzamiento de suministros

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

En el ejemplo 3.9, (*a*) determinar el tiempo t_1 que tarda el paquete en alcanzar su máxima altura h, (*b*) calcular esta altura máxima h y (*c*) determinar el tiempo t_2 transcurrido desde que el paquete alcanza su altura máxima hasta que llega al suelo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) 1. Expresar $v_y(t)$ para el paquete.	$v_y(t) = v_{0y} - gt$
2. Hacer $v_y(t_1) = 0$ y despejar t_1.	$t_1 = \boxed{1{,}53 \text{ s}}$
(b) 1. Determinar $v_{y,m}$ durante el tiempo en que el paquete se mueve hacia arriba.	$v_{y,m} = 7{,}5$ m/s
2. Utilizar $v_{y,m}$ para determinar la distancia recorrida hacia arriba. A continuación calcular h.	$\Delta y = 11{,}5$ m, $h = \boxed{111{,}5 \text{ m}}$
(c) Hallar el tiempo transcurrido mientras el paquete cae la distancia h.	$t_2 = \boxed{4{,}77 \text{ s}}$

Observación De acuerdo con el ejemplo 3.9, $t_1 + t_2 = 6{,}3$ s.

Ejercicio Resolver el apartado (b) del ejemplo 3.11 usando la expresión para $y(t)$ de la ecuación 3.21*b* en vez de calcular $v_{y\,m}$.

Las ecuaciones 3.19a y 3.19b pueden expresarse en forma vectorial. Multiplicando la ecuación 3.19a por **i** y la ecuación 3.19b por **j** y después sumando ambas ecuaciones se obtiene $a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} = -g\mathbf{j}$, o bien,

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} \tag{3.19c}$$

donde g es el vector aceleración correspondiente a la caída libre. En la superficie de la Tierra el valor de **g** es $g = 9{,}81$ m/s^2. Las ecuaciones 3.20a y b también pueden expresarse en forma vectorial. Multiplicando la ecuación 3.20a por **i** y la ecuación 3.20b por **j** y sumando ambas ecuaciones se obtiene $(v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) = (v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}) - gt\mathbf{j}$ o bien

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{g}t \quad \text{o} \quad \Delta\mathbf{v} = \mathbf{g}t \tag{3.20c}$$

donde $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j}$, y $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$. Repitiendo el proceso para las ecuaciones 3.21a y b se obtiene

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \quad \text{o} \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \qquad (3.21\text{c})$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j}$. Para determinados problemas conviene utilizar las formas vectoriales de las ecuaciones cinemáticas (ecuaciones 3.20c y 3.21c). Este es el caso del ejemplo que sigue.

EJEMPLO 3.12 | El guardabosques y el mono

Un guardabosques con una cerbatana intenta disparar un dardo tranquilizante a un mono que cuelga de una rama (figura 3.28). El guardabosques apunta directamente al mono sin tener en cuenta que el dardo seguirá una trayectoria parabólica y pasará, por lo tanto, por debajo del mono. Sin embargo, éste, viendo salir el dardo de la cerbatana, se suelta de la rama y cae del árbol, esperando evitar el dardo. (*a*) Demostrar que el mono será alcanzado independientemente de cuál sea la velocidad inicial del dardo, con tal de que ésta sea lo suficientemente grande para que el dardo recorra la distancia horizontal que hay hasta el árbol antes de dar contra el suelo. Suponer que el tiempo de reacción del mono es despreciable. (*b*) Sea $\mathbf{v}_{d0}$ la velocidad del dardo al salir de la cerbatana. Encuentre la velocidad del dardo relativa al mono para un tiempo arbitrario *t* durante el vuelo del dardo.

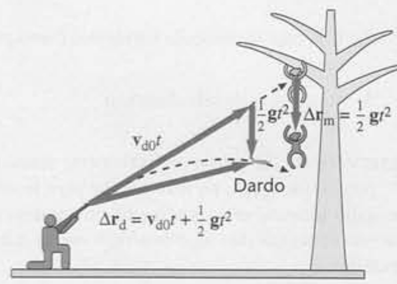


Figura 3.31

Planteamiento del problema Se aplica la ecuación 3.21c al mono y al dardo

(a) 1. Se aplica la ecuación 3.21c al mono en el tiempo *t*,
$$\Delta\mathbf{r}_m = \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$
con la velocidad inicial del mono nula.

2. Se aplica la ecuación 3.21c al dardo en el tiempo *t*,
$$\Delta\mathbf{r}_d = \mathbf{v}_{d0}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2$$
donde $\mathbf{v}_{d0}$ es la velocidad inicial del dardo cuando sale de la cerbatana.

3. La figura 3.31 refleja un esquema del mono, el dardo y la cerbatana. Se muestra el dardo y el mono en sus posiciones en el instante inicial y en el tiempo t. Los vectores muestran los diferentes términos de los pasos 1 y 2. Nótese que en el tiempo t el dardo y el mono están a una distancia $\frac{1}{2}gt^2$ por debajo de la línea de mira de la cerbatana. El dardo dará con el mono cuando alcance la línea de caída éste.

(b) 1. La velocidad del dardo relativa al mono iguala la velocidad del dardo relativa a la cerbatana más la velocidad del arma relativa al animal:
$$\mathbf{v}_{dm} = \mathbf{v}_{dc} + \mathbf{v}_{cm}$$

2. La velocidad de la cerbatana relativa al mono es igual a la velocidad del animal relativa al arma cambiada de signo.
$$\mathbf{v}_{dm} = \mathbf{v}_{dc} - \mathbf{v}_{mc}$$

3. Con el uso de la ecuación 3.20c se consigue expresar la velocidad del dardo relativa a la cerbatana y la velocidad del animal relativa al arma
$$\mathbf{v}_{dc} = \mathbf{v}_{d0} + \mathbf{g}t$$
$$\mathbf{v}_{mc} = \mathbf{g}t$$

4. La sustitución de estas expresiones en el paso 2 del apartado b lleva a:
$$\mathbf{v}_{dm} = (\mathbf{v}_{d0} + \mathbf{g}t) - (\mathbf{g}t) = \boxed{\mathbf{v}_{d0}}$$

Observación Con respecto al mono, el dardo se mueve con velocidad constante v_{d0} siguiendo una línea recta. El dardo impacta en el animal en el instante de tiempo $t = L/v_{d0}$, donde L es la distancia desde la boca del arma hasta la posición inicial del mono.

Observación En una experiencia magistral, un blanco se cuelga de un electroimán. Cuando el dardo sale del arma, el circuito que controla el electroimán se interrumpe y el blanco cae. La velocidad inicial del dardo se puede variar de modo que para valores de v_{d0} grandes el dardo alcanza al blanco muy cerca de su posición inicial, mientras que si v_{d0} tiene un valor pequeño, el dardo impacta con el blanco poco antes de que éste alcance el suelo.

Ejercicio Un jugador golpea el disco de hockey sobre hielo de forma que éste no impacta en la red de la portería ni tampoco en la valla de Plexiglass de los límites de la pista de 2,80 m de altura. El tiempo de vuelo del disco cuando pasa por encima de la valla es $t_1 = 0{,}650$ s, siendo $x_1 = 12{,}0$ m la distancia horizontal desde el punto donde el jugador golpea el disco. (*a*) Calcular la velocidad y la dirección inicial del disco. (*b*) ¿Cuándo alcanza el disco su altura máxima? (*c*) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el disco? (*Respuesta* (*a*) $v = 20{,}0$ m/s, $\theta_0 = 22{,}0°$, (*b*) $t = 0{,}764$ s, (*c*) $v_{y\,m}\, t = 2{,}86$ m).

3.5 Segundo caso particular: movimiento circular

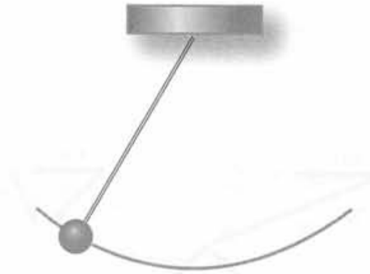


Figura 3.32

La figura 3.32 muestra una masa sujeta a una cuerda, de modo que forma un péndulo que oscila en el plano vertical. La trayectoria que sigue la masa en su continua oscilación corresponde a una fracción de una trayectoria circular. El movimiento a lo largo de una trayectoria circular, o de una parte de ella, se denomina **movimiento circular.**

EJEMPLO 3.13 | El péndulo que oscila

Consideremos el movimiento de la masa del péndulo de la figura 3.32. Usando el diagrama del movimiento de la figura 3.33, determinar la dirección del vector aceleración cuando la masa está oscilando de izquierda a derecha, *(a)* en la porción descendente de su movimiento, *(b)* cuando pasa por el punto más bajo de su recorrido, y *(c)* en la porción ascendente de su recorrido.

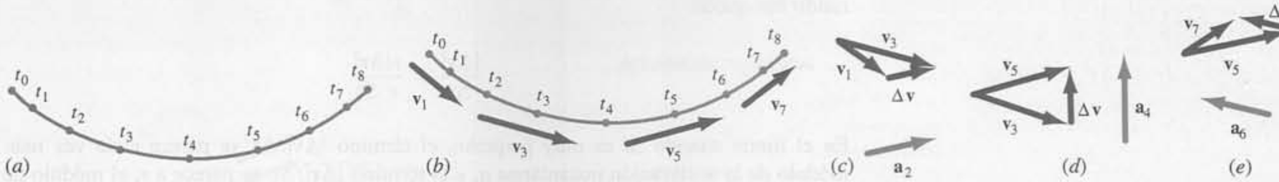


Figura 3.33

Planteamiento del problema Cuando la masa desciende aumenta la velocidad y cambia su dirección. La aceleración está relacionada con el cambio de la velocidad mediante $\mathbf{a} \approx \Delta\mathbf{v}/\Delta t$. La dirección de la aceleración en un punto puede estimarse dibujando el diagrama de adición de vectores para la relación $\mathbf{v_i} + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v_f}$, de donde se encuentra la dirección de $\Delta\mathbf{v}$ y, por lo tanto, la dirección del vector aceleración.

(a) 1. La figura 3.33 muestra la representación de una oscilación completa de izquierda a derecha de la masa del péndulo. La distancia entre los puntos es mayor en los puntos más bajos de la trayectoria ya que en ellos la velocidad es mayor.

2. Para un punto determinado, se determina la diferencia entre la velocidad en el punto inmediatamente anterior y en el punto inmediatamente posterior. Nótese que los vectores velocidad se dibujan tangentes a la trayectoria y que su longitud es proporcional a la velocidad.

3. Se representa la expresión gráfica de la relación $\mathbf{v_i} + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v_f}$ y el vector aceleración, ya que dado que $\mathbf{a} \approx \Delta\mathbf{v}/\Delta t$, $\mathbf{a}$ va en la misma dirección que $\Delta\mathbf{v}$.

(b) Se repiten los pasos 2 y 3 para el punto más bajo de la trayectoria.

(c) Se repiten los pasos 2 y 3 para un punto en la porción ascendente de la trayectoria.

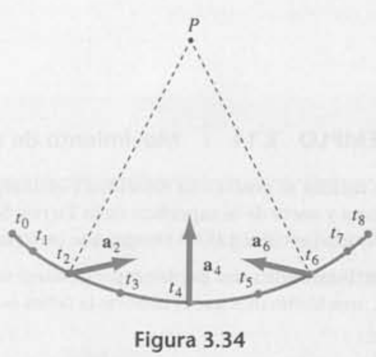


Figura 3.34

Observación En el punto más bajo de la trayectoria el vector aceleración tiene la dirección vertical, hacia arriba (figura 3.34), hacia el centro del círculo *P*. Cuando la velocidad aumenta (en la porción descendente), la aceleración tiene una componente dirigida hacia delante y otra componente dirigida hacia *P*. Cuando la aceleración disminuye tiene una componente dirigida hacia atrás y otra que apunta a *P*.

Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria circular, la dirección que desde la partícula señala el centro de la trayectoria se denomina **dirección centrípeta.** En el ejemplo 3.13 se ha visto que la aceleración en el punto más bajo de la trayectoria de la masa del péndulo va en la dirección centrípeta. En otros puntos la aceleración tiene una componente centrípeta y una componente tangencial.

Movimiento circular uniforme

El movimiento en un círculo a velocidad escalar constante se denomina **movimiento circular uniforme**. Usaremos el método del ejemplo 3.13 para determinar la dirección de la aceleración a fin de encontrar la expresión de la aceleración de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad constante. Los vectores posición y velocidad de una partícula que se está moviendo en un círculo a velocidad constante se muestran en la figura 3.35. El ángulo $\Delta\theta$ entre $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ es el mismo que entre $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t + \Delta t)$, ya que los vectores posición y velocidad deben girar el mismo ángulo para conservar su perpendicularidad mutua. Con los dos vectores velocidad y con $\Delta\mathbf{v}$ se forma un primer triángulo isósceles. El segundo triángulo isósceles se forma con los dos vectores posición y con $\Delta\mathbf{r}$. Para encontrar la dirección del vector aceleración examinamos el triángulo formado por los dos vectores velocidad y $\Delta\mathbf{v}$. La suma de los ángulos de un triángulo es 180° y los ángulos de la base de cualquier triángulo isósceles son iguales. En el límite en que Δt es muy pequeño, $\Delta\theta$ también es muy pequeño por lo que en este límite los dos ángulos de la base se aproximan a 90°. Esto significa que $\Delta\mathbf{v}$ es perpendicular a la velocidad. Si $\Delta\mathbf{v}$ se dibuja en la posición de la partícula señala en la dirección centrípeta.

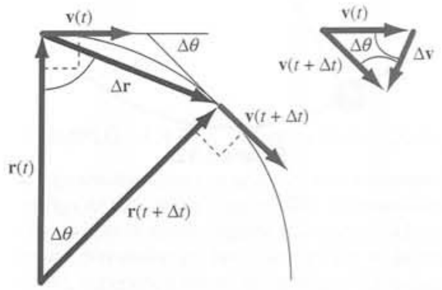


Figura 3.35 Vectores posición y velocidad de una partícula que se mueve en un círculo a velocidad escalar constante.

Los dos triángulos son semejantes, por lo que $|\Delta\mathbf{v}|/v = |\Delta\mathbf{r}|/r$ (dado que las longitudes de formas semejantes son proporcionales). Dividiendo los dos términos por Δt y reorganizando nos queda

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v|\Delta\mathbf{r}|}{r\,\Delta t}$$

En el límite cuando Δt es muy pequeño, el término $|\Delta\mathbf{v}|/\Delta t$ se parece cada vez más al módulo de la aceleración instantánea a, y el término $|\Delta\mathbf{r}|/\Delta t$ se parece a v, el módulo de la velocidad instantánea. Si sustituimos estas igualdades en el límite,

$$a = a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (3.24)$$

ACELERACIÓN CENTRÍPETA

Habitualmente se describe el movimiento de una partícula en un círculo con velocidad constante a partir del tiempo T requerido para realizar una vuelta completa, magnitud que se denomina **periodo**. Durante un periodo, la partícula se mueve una distancia $2\pi r$ (donde r es el radio del círculo), por lo que la velocidad de la misma está relacionada con r y con T mediante la expresión

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (3.25)$$

EJEMPLO 3.14 | Movimiento de un satélite

Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor del centro de la Tierra y cerca de la superficie de la Tierra. Si su aceleración es $g = 9{,}81$ m/s², determinar (*a*) su velocidad escalar y (*b*) el tiempo que invierte en una revolución completa.

Planteamiento del problema Como el satélite tiene su órbita cerca de la superficie de la Tierra, consideraremos que el radio de la órbita es el radio de la Tierra, $r = 6370$ km.

(a) La aceleración centrípeta v^2/r se iguala a g y se despeja v:

$$a = \frac{v^2}{r} = g \quad \text{o}$$

$$v = \sqrt{rg} = \sqrt{(6370\text{ km})(9{,}81\text{ m/s}^2)} = \boxed{7{,}91\text{ km/s}}$$

(b) Para calcular el valor del periodo T se usa la ecuación 3.25:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6370\text{ km})}{7{,}91\text{ km/s}} = \boxed{5060\text{ s} = 84{,}3\text{ min}}$$

Observación La órbita real de los satélites se sitúa unos pocos centenares de kilómetros por encima de la superficie terrestre, es decir, r excede ligeramente el radio terrestre (6370 km). En consecuencia la aceleración centrípeta es algo inferior a 9,81 m/s2 a causa del descenso de la fuerza gravitatoria con respecto a la distancia del centro de la Tierra. Muchos satélites están en estas órbitas y sus periodos son de unos 90 minutos.

Ejercicio Un coche va a 48 km/h y sigue una curva de 40 m de radio. ¿Cuál es su aceleración centrípeta? (*Respuesta* 4,44 m/s^2)

Una partícula que se mueve en un círculo con *velocidad variable* tiene una componente de la aceleración tangente a la trayectoria, dv/dt, y una componente según el radio, la aceleración centrípeta, v^2/r. Al analizar, en general, el movimiento de una partícula a lo largo de una curva, la trayectoria se puede dividir en arcos de circunferencia (figura 3.36). La partícula en cada uno de estos arcos de circunferencia tiene una aceleración centrípeta v^2/r dirigida hacia el centro de curvatura y, si varía la velocidad, tiene además una aceleración tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad (3.26)$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL

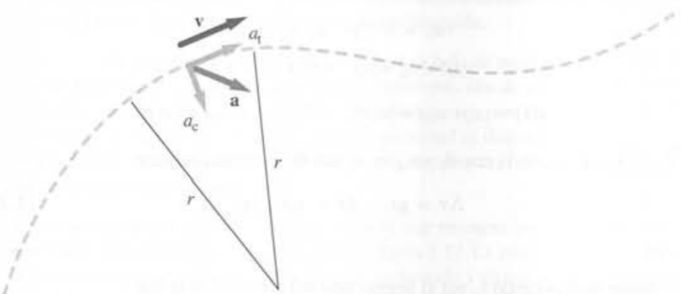


Figura 3.36 Cuando una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva se considera que cada pequeño intervalo de tiempo se mueve siguiendo un arco de circunferencia distinto. El vector aceleración instantánea tiene una componente $a_c = v^2/r$ dirigida hacia el centro de curvatura del arco y una componente $a_t = dv/dt$ tangencial a la curva.

Resumen

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES
1. Vectores	
Definición	Los vectores son magnitudes que tienen módulo y dirección. Se suman como los desplazamientos.
Componentes	La componente de un vector a lo largo de una línea en el espacio es su proyección sobre dicha línea. Si **A** forma un ángulo θ con el eje x, sus componentes x e y son
	$Ax = A \cos \theta$ **(3.2)**
	$Ay = A \text{ sen } \theta$ **(3.3)**
Módulo	$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ **(3.5a)**
Suma gráfica de vectores	Dos vectores cualesquiera cuyos módulos poseen las mismas unidades pueden sumarse gráficamente situando la cola de la flecha que representa a uno de ellos en el extremo o cabeza del otro.
Suma de vectores mediante componentes	Si **C** = **A** + **B**, entonces
	$C_x = A_x + B_x$ **(3.6a)**

y

$$C_y = A_y + B_y \tag{3.6b}$$

Vectores unitarios — Un vector **A** puede escribirse en función de los vectores unitarios **i**, **j** y **k** de módulo unidad dirigidos respectivamente a lo largo de los ejes x, y y z

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \tag{3.7}$$

Vector posición — El vector posición **r** apunta desde el origen del sistema de coordenadas a la posición de la partícula.

Vector velocidad instantánea — El vector velocidad **v** es la variación del vector posición respecto al tiempo. Su módulo es la velocidad y su dirección es la del movimiento.

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{3.12}$$

Vector aceleración instantánea

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{3.16}$$

---

2. Velocidad relativa

Si una partícula se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\mathrm{pA}}$ respecto a un sistema de coordenadas A, el cual a su vez se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{\mathrm{AB}}$ respecto a otro sistema de coordenadas B, la velocidad de la partícula respecto a B es

$$\mathbf{v}_{\mathrm{pB}} = \mathbf{v}_{\mathrm{pA}} + \mathbf{v}_{\mathrm{AB}} \tag{3.14}$$

---

3. Movimientos de proyectiles

En las ecuaciones de esta sección se considera que la dirección positiva del eje x es horizontal y que la dirección positiva del eje y es vertical dirigida hacia arriba.

Independencia del movimiento — En el movimiento de proyectiles, los movimientos horizontal y vertical son independientes. Así,

$$a_x = 0 \quad \text{y} \quad a_y = -g.$$

Dependencia con el tiempo

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t \tag{2.14}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2, \quad y(t) = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \tag{2.16}$$

donde $a_x = 0$, $a_y = -g$, $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ y $v_{0y} = v_0$ sen θ_0. Alternativamente,

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{g}t, \quad \Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2 \tag{3.20c, 3.21c}$$

donde $\mathbf{g} = -g\mathbf{j}$

Alcance — El alcance se obtiene multiplicando v_x por el tiempo total del proyectil en el aire.

---

4. Movimiento circular

Aceleración centrípeta

$$a_c = \frac{v^2}{r} \tag{3.24}$$

Aceleración tangencial

$$a_t = \frac{dv}{dt} \tag{3.26}$$

donde v es la velocidad escalar

Periodo

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{3.25}$$

Problemas

- • Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- •• Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- ••• Desafiante, para alumnos avanzados.
- SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.
- iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.
- iSOLVE ✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Vectores y suma de vectores

1 • SSM ¿Puede el módulo del desplazamiento de una partícula ser menor que la distancia recorrida por la partícula a lo largo de su trayectoria? ¿Puede su módulo ser mayor que la distancia recorrida? Razonar la respuesta.

2 • Dar un ejemplo en el cual la distancia recorrida es una magnitud significativa, mientras que el correspondiente desplazamiento es nulo.

3 • ¿Cuál es la velocidad media aproximada de los bólidos que participan en la prueba de Indianápolis 500?

4 • iSOLVE Verdadero o falso: El módulo de la suma de dos vectores *debe ser* mayor que el módulo de cada vector.

5 • ¿Puede una componente de un vector tener un módulo mayor que el módulo del propio vector? ¿En qué circunstancias la componente de un vector puede tener un módulo igual al módulo del propio vector?

6 • SSM ¿Puede un vector ser igual a cero y, sin embargo, tener una o más componentes distintas de cero?

7 • iSOLVE ¿Son las componentes de **C** = **A** + **B** necesariamente superiores a las correspondientes componentes de **A** o **B**?

8 • SSM Verdadero o falso: El vector velocidad instantánea siempre señala en la dirección del movimiento.

9 • Si un objeto se mueve hacia el oeste, ¿en qué dirección acelera? (*a*) Norte, (*b*) Este, (*c*) Oeste, (*d*) Sur, (*e*) Puede ser cualquier dirección.

10 • iSOLVE Un jugador de golf golpea con fuerza la bola de modo que ésta describe un largo arco. Cuando la bola está en el punto más alto de su vuelo, (*a*) su velocidad y aceleración se anulan, (*b*) su velocidad es cero pero su aceleración no se anula, (*c*) su aceleración es cero pero su velocidad es distinta de cero, (*d*) su velocidad y su aceleración son ambas distintas de cero, (*e*) falta información para contestar correctamente.

11 • La velocidad de una partícula se dirige hacia el este mientras que su aceleración se dirige hacia el noroeste como muestra la figura 3.37. La partícula, (*a*) está acelerando y girando hacia el norte, (*b*) está acelerando y girando hacia el sur, (*c*) está frenando y girando hacia el norte, (*d*) está frenando y girando hacia el sur, (*e*) mantiene constante su velocidad y gira hacia el sur.

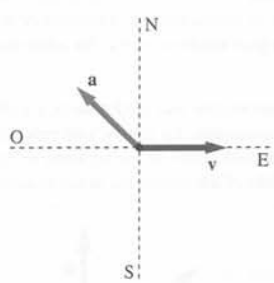


Figura 3.37 Problema 11

12 • SSM Si se conocen los vectores posición de una partícula en dos puntos de su trayectoria, el tiempo que tarda en moverse de un punto a otro y se supone que la aceleración es constante, se puede calcular (*a*) la velocidad media de la partícula, (*b*) la aceleración media de la partícula, (*c*) la velocidad instantánea de la partícula, (*d*) la aceleración instantánea de la partícula, (*e*) no se dispone de la información suficiente para describir el movimiento de la partícula.

13 •• Considere la trayectoria de una partícula en su movimiento por el espacio. (*a*) ¿Cómo se relaciona geométricamente el vector velocidad con la trayectoria de la partícula? (*b*) Esquematice una trayectoria y dibuje el vector velocidad de la partícula para distintas posiciones a lo largo de la trayectoria.

14 • La aceleración de un vehículo es nula cuando (*a*) gira hacia la derecha a velocidad constante, (*b*) sube por una carretera pendiente y recta a velocidad constante, (*c*) corona la cima de una colina a velocidad constante, (*d*) llega a la parte más baja de un valle a velocidad constante, (*e*) aumenta su velocidad cuando baja a lo largo de una pendiente recta.

15 • SSM Dar algunos ejemplos de movimiento en los cuales las direcciones de los vectores velocidad y posición las (*a*) opuestas, (*b*) las mismas y (*c*) mutuamente perpendiculares.

16 • iSOLVE ¿Cómo es posible que una partícula que se mueva a velocidad escalar constante tenga una aceleración constante? ¿Puede una partícula con velocidad constante estar, a la vez, acelerando?

17 •• Un dardo se lanza verticalmente hacia arriba. Cuando sale de la mano del lanzador, pierde velocidad uniformemente a medida que gana altura hasta que se clava en el techo de la habitación. (*a*) Dibujar el vector velocidad en los tiempos t_1 y t_2, en donde $\Delta t = t_2 - t_1$ es un intervalo pequeño. A partir del dibujo determinar la dirección del cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y con ello la dirección del vector aceleración. (*b*) Poco después de chocar con el techo, el dardo cae y acelera hasta que llega al suelo. Repita el apartado (*a*) para encontrar la dirección del vector aceleración durante la caída. (*c*) Ahora imagine que tira el dardo horizontalmente. ¿Cuál es la dirección del vector aceleración después que haya dejado su mano pero antes que golpee el suelo?

18 •• SSM Una gimnasta salta sobre una plataforma elástica y cuando se aproxima al punto más bajo de su caída pierde velocidad. Suponiendo que cae verticalmente, haga un diagrama del movimiento para escontrar la dirección de su vector aceleración, dibujando los vectores velocidad de la saltadora en los tiempos t_1 y t_2, siendo pequeño el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y con ello, la dirección del vector aceleración.

19 •• La saltadora del problema 18, después de alcanzar el punto más bajo de su salto en el tiempo t_{bajo}, comienza a moverse hacia arriba aumentando su velocidad durante un corto tiempo hasta que la gravedad domina de nuevo su movimiento. Dibujar los vectores velocidad en los tiempos t_1 y t_2, en donde $\Delta t = t_2 - t_1$ es un pequeño intervalo y $t_1 < t_{\text{bajo}} < t_2$. Deducir del dibujo la dirección del cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y con ello, la dirección del vector aceleración.

20 • Un río de orillas rectas y paralelas tiene una anchura de 0,76 km (véase la figura 3.38). La corriente del río baja a 4,0 km/h y es paralela a los márgenes. El barquero que conduce una barcaza que puede alcanzar una velocidad máxima de 4,0 km/h en aguas quietas desea ir de A a B, donde AB es perpendicular a la orilla. El barquero debe (*a*) dirigir la barca directamente a través del río, perpendicular a la orilla siguiendo AB, (*b*) poner un rumbo de 53° dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (*c*) poner un rumbo de 37° dirigido hacia aguas arriba respecto la dirección AB, (*d*) renunciar ya que es imposible ir de A hasta B con una nave de estas características, (*e*) ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

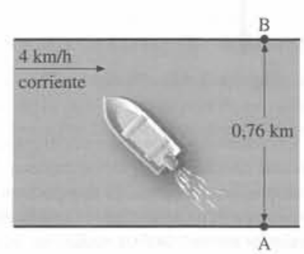


Figura 3.38 Problema 20

21 • SSM Verdadero o falso: Cuando un proyectil se dispara horizontalmente, invierte el mismo tiempo en caer que un proyectil soltado en reposo desde la misma altura. Ignórese los efectos de la resistencia del aire.

22 ● Un proyectil se lanza con un ángulo de tiro de 35° por encima de la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria, su velocidad es de 200 m/s. La velocidad inicial tenía una componente horizontal de (*a*) 0, (*b*) 200 cos (35°) m/s, (*c*) 200 sen (53°) m/s, (*d*) (200 m/s)/cos 35°, (*e*) 200 m/s. No considere los efectos de la resistencia del aire.

23 ● La figura 3.39 representa la trayectoria parabólica de una bola que va de *A* a *E*. ¿Cuál es la dirección de la aceleración en el punto *B*? (*a*) Hacia arriba y hacia la derecha. (*b*) Hacia bajo y hacia la izquierda. (*c*) Verticalmente hacia arriba. (*d*) Verticalmente hacia abajo. (*e*) La aceleración de la bola es cero.

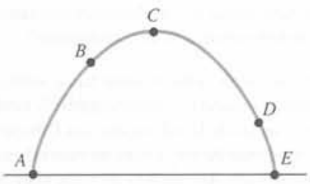


Figura 3.39 Problemas 23 y 24

24 ● (*a*) ¿En qué punto(s) de la figura 3.39 el módulo de la velocidad es el mayor de todos? (*b*) ¿En qué punto(s) el módulo de la velocidad es el menor de todos? (*c*) ¿En qué dos puntos el módulo de la velocidad es el mismo? ¿Es el vector velocidad el mismo en esos puntos?

25 ● Verdadero o falso:

(*a*) Si el módulo de la velocidad es constante, la aceleración debe ser cero.
(*b*) Si la aceleración es cero, el módulo de la velocidad debe ser constante.

26 ● Las velocidades inicial y final de un objeto son las indicadas en la figura 3.40. Indicar la dirección de la velocidad media.

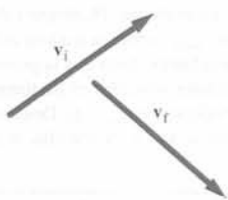


Figura 3.40 Problema 26

27 ● Las velocidades de los objetos A y B se muestran en la figura 3.41. Dibujar un vector que represente la velocidad de **B** relativa a **A**.

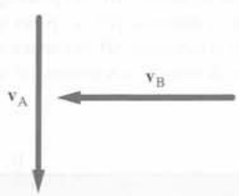


Figura 3.41 Problema 27

28 ●● SSM Un vector $\mathbf{A}(t)$ tiene un módulo constante, pero su dirección cambia. (*a*) Encontrar $d\mathbf{A}/dt$ de la siguiente manera: dibujar los vectores $\mathbf{A}(t + \Delta t)$ y $\mathbf{A}(t)$ para un pequeño intervalo de tiempo Δt y determinar gráficamente la diferencia $\Delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(t + \Delta t) - \mathbf{A}(t)$. ¿Cuál es la dirección de $\Delta\mathbf{A}$ respecto a **A** para pequeños intervalos de tiempo? (*b*) Interpretar este resultado para los casos especiales en que **A** representa la posición de una partícula con respecto a un sistema de coordenadas. (*c*) ¿Puede **A** representar un vector velocidad? Explicarlo.

29 ●● La figura 3.42 muestra la trayectoria de un automóvil, formada por segmentos rectilíneos y arcos de circunferencias. El coche parte del reposo en el punto *A*. Después que alcanza el punto *B* marcha con velocidad constante hasta que alcanza el punto *E*. Acaba en reposo en el punto *F*. (*a*) En el medio de cada segmento (AB, BC, CD, DE, y EF), ¿cuál es la dirección del vector velocidad? (*b*) ¿En qué puntos el automóvil tiene aceleración? En estos casos, ¿cuál es la dirección de la aceleración? (*c*) ¿Qué relación tienen los módulos de la aceleración en los tramos BC y DE?

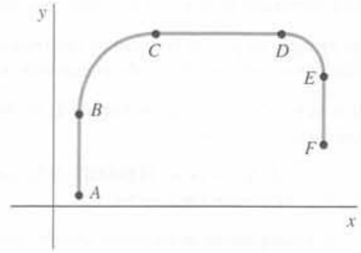


Figura 3.42 Problema 29

30 ●● SSM Dos cañones están situados uno frente a otro, como muestra la figura 3.43. Cuando disparen las balas seguirán las trayectorias que se muestran, siendo P el punto donde las trayectorias se cruzan. Si se quiere que las balas choquen, ¿hay que disparar primero el cañón A, el cañón B o bien hay que disparar los dos cañones simultáneamente? Ignórense los efectos de la resistencia del aire.

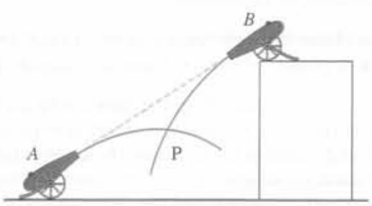


Figura 3.43 Problema 30

31 ●● Galileo en su obra "Diálogo respecto los dos sistemas del mundo" escribió: " Enciérrese … en el camarote principal situado bajo la cubierta de un barco grande y … cuelgue una botella que se vacíe, gota a gota, en un recipiente situado debajo. Después de observar cuidadosamente el fenómeno ... y de que el barco haya seguido cualquier velocidad, siempre y cuando el movimiento haya sido uniforme y no fluctuante, las gotas siempre caen como antes sin que, en ningún caso, se dirijan hacia la dirección de la popa del buque, aunque el barco recorra un gran trecho mientras las gotas están en el aire". Explique esta cita.

32 ● Una persona mueve una piedra atada a una cuerda en un círculo horizontal a velocidad constante. La figura 3.44 representa la trayectoria del objeto visto desde arriba. (*a*) ¿Cuál de los vectores de la figura representan la velocidad de la piedra? (*b*) ¿Cuál representa la aceleración?

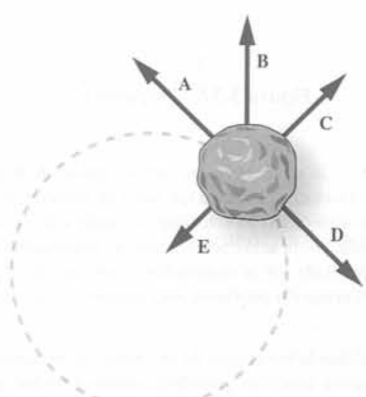


Figura 3.44 Problema 32

33 ● Verdadero o falso: Un objeto no se mueve en una trayectoria circular si no está acelerado.

34 ●● Usando un esquema del movimiento, encontrar la dirección de la aceleración de la masa de un péndulo cuando la masa está en el punto donde cambia el sentido de su movimiento.

35 ● Con un bate de béisbol se golpea una pelota a 177 km/h. Supongamos que la pelota es bateada con un ángulo de 35°, que es un valor muy corriente en este deporte. Usando la ecuación 3.23 para calcular la distancia que alcanza una bola golpeada en las condiciones anteriormente mencionadas se obtiene que la pelota llega hasta 232 m pero, en realidad, la pelota apenas alcanzará los 80 m. Argumente porqué la ecuación 3.23 da una predicción tan mala en este caso. Si puede, considere el concepto de *velocidad terminal* o *velocidad límite*.

Aproximaciones y estimaciones

36 ●● SSM Estimar qué distancia alcanza una pelota si se lanza (*a*) horizontalmente desde el suelo, (*b*) con un ángulo de 45° desde el suelo, (*c*) horizontalmente desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel de la calle, (*d*) con un ángulo de 45° desde la azotea de un edificio situada 12 m por encima del nivel del suelo.

37 ●● En 1978, Geoff Capes del Reino Unido, lanzó un ladrillo pesado una distancia horizontal de 44,5 m. Determinar la velocidad aproximada del ladrillo en el punto más alto de su trayectoria, sin considerar los efectos de la resistencia del aire.

Vectores, suma de vectores y sistemas de coordenadas

38 ● La aguja de los minutos de un reloj de pared tiene 0,5 m de longitud y la de las horas tiene 0,25 m. Considerando el centro del reloj como origen y eligiendo un sistema de coordenadas apropiado, escríbase la posición de las agujas de las horas y de los minutos con vectores cuando el reloj señala (*a*) 12:00, (*b*) 3:30, (*c*) 6:30, (*d*) 7:15. (*e*) Si **A** es la posición del extremo de la aguja de los minutos y **B** es la posición del extremo de la aguja de las horas, calcular **A**-**B** para las horas dadas en los apartados (*a*)-(*d*) anteriores.

39 ● SSM Un oso se mueve 12 m hacia el nordeste y 12 m hacia el este. Muéstrese gráficamente cada desplazamiento y determínese gráficamente el desplazamiento total, como en el ejemplo 3.2(*a*).

40 ● ✓ Un arco circular está centrado en $x = 0$ e $y = 0$. (*a*) Una estudiante se mueve por el arco circular desde la posición $x = 5$ m, $y = 0$ hasta la posición final $x = 0$, $y = 5$ m. ¿Cuál es su desplazamiento? (*b*) Un segundo estudiante se mueve desde la misma posición inicial siguiendo el eje x hasta el origen para seguir después a lo largo del eje y hasta $y = 5$ m y $x = 0$. ¿Cuál es su desplazamiento?

41 ● SSM ✓ En el caso de los dos vectores **A** y **B** indicados en la figura 3.45, hallar gráficamente como en el ejemplo 3.2(a): (*a*) **A** + **B**, (*b*) **A** − **B**, (*c*) 2**A** + **B**, (*d*) **B** − **A**, (*e*) 2**B** − **A**.

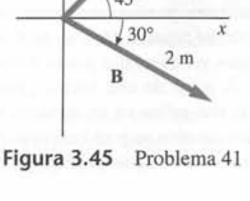
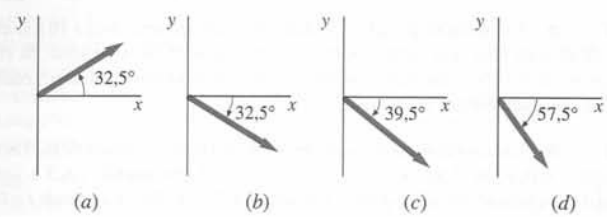


Figura 3.45 Problema 41

42 ● Un muchacho explorador pasea 2,4 km hacia el este del campamento, luego se desvía hacia su izquierda y recorre 2,4 km a lo largo de un arco de círculo centrado en el campamento. (*a*) ¿A qué distancia del campamento se encuentra finalmente el muchacho? (*b*) ¿Cuál es la dirección de la posición del muchacho medida desde el campamento? (*c*) ¿Cuál es el cociente entre el desplazamiento final y la distancia total recorrida?

43 ● Un vector velocidad tiene una componente x de + 5,5 m/s y una componente y de − 3,5 m/s. ¿Qué diagrama de la figura 3.46 representa la dirección del vector?



(*e*) Ninguno de los anteriores.

Figura 3.46 Problema 43

44 ● Tres vectores **A**, **B**, y **C** tienen las siguientes componentes x e y: $A_x = 6$, $A_y = -3$; $B_x = -3$, $B_y = 4$; $C_x = 2$, $C_y = 5$. La magnitud de **A** + **B** + **C** es (*a*) 3,3, (*b*) 5,0, (*c*) 11, (*d*) 7,8, (*e*) 14.

45 ● Hallar las componentes rectangulares de los vectores **A**, que están comprendidas en el plano xy y forman un ángulo θ con el eje x, como se ve en la figura 3.47, para los siguientes valores de A y θ: (*a*) $A = 10$ m, $\theta = 30°$; (*b*) $A = 5$ m, $\theta = 45°$; (*c*) $A = 7$ km, $\theta = 60°$; (*d*) $A = 5$ km, $\theta = 90°$; (*e*) $A = 15$ km/s, $\theta = 150°$; (*f*) $A = 10$ m/s, $\theta = 240°$; y (*g*) $A = 8$ m/s^2, $\theta = 270°$.

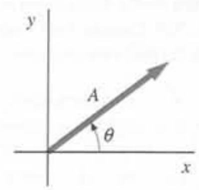


Figura 3.47 Problema 45

46 ● SSM Un vector **A** tiene el módulo de 8 m y forma un ángulo de 37° con el eje x; el vector **B** = (3 m) **i** − (5 m) **j**; el vector **C** = (−6 m) **i** + (3 m) **j**. Determinar los siguientes vectores: (*a*) **D** = **A** + **C**; (*b*) **E** = **B** − **A**; (*c*) **F** = **A** − 2**B** + 3**C**; (*d*) un vector **G** tal que **G** − **B** = **A** + 2**C** + 3**G**.

47 ●● Hallar el módulo y la dirección de los siguientes vectores: (*a*) **A** = 5**i** + 3**j**; (*b*) **B** = 10**i** − 7**j**; y (*c*) **C** = −2**i** − 3**j** + 4**k**.

48 ● Hallar el módulo y dirección de **A**, **B** y **C** = **A** + **B** en los casos (*a*) **A** = −4**i** − 7**j**; **B** = 3**i** − 2**j**; y (*b*) **A** = 1**i** − 4**j**, **B** = 2**i** + 6**j**.

49 ● Describir los vectores siguientes utilizando los vectores unitarios **i** y **j**: (*a*) una velocidad de 10 m/s con un ángulo de elevación de 60°; (*b*) un vector **A** de módulo $A = 5$ m y $\theta = 225°$; y (*c*) un desplazamiento desde el origen al punto $x = 14$ m, $y = -6$ m.

50 ● En el caso del vector **A** = 3**i** + 4**j**, hallar otros tres vectores cualesquiera **B** que estén también comprendidos en el plano xy y que tengan la propiedad de que $A = B$, pero **A** ≠ **B**. Escribir los vectores en función de sus componentes y dibujarlos gráficamente.

51 ●● SSM Un cubo de arista 3 m tiene sus caras paralelas a los planos coordenados y un vértice en el origen. Una mosca situada en el origen se mueve a lo largo de tres aristas hasta llegar al vértice opuesto. Escribir el vector desplazamiento de la mosca utilizando los vectores **i**, **j** y **k**, y hallar el módulo de su desplazamiento.

52 • SSM Un barco en alta mar recibe señales de radio emitidas desde dos transmisores A y B que están separados 100 km, uno al sur del otro. El localizador de direcciones detecta que la transmisión desde A está 30° al sudeste, mientras que la transmisión de B procede del este. Calcular la distancia entre el barco y el transmisor B.

Vectores velocidad y aceleración

53 • Un operador de radar fijo determina que un barco está a 10 km al sur de él. Una hora más tarde el mismo barco está a 20 km al sudeste. Si el barco se movió con velocidad constante siempre en la misma dirección, ¿cuál era su velocidad durante ese tiempo?

54 • Las coordenadas de posición de una partícula (x, y) son (2 m, 3 m) cuando $t = 0$; (6 m, 7 m) cuando $t = 2$ s; y (13 m, 14 m) cuando $t = 5$ s. (*a*) Hallar la velocidad media v_m desde $t = 0$ hasta $t = 2$ s. (*b*) Hallar v_m desde $t = 0$ hasta $t = 5$ s.

55 • SSM iSOLVE ✓ Una partícula que se mueve a 4,0 m/s en la dirección x positiva experimenta una aceleración de 3,0 m/s^2 en la dirección y positiva durante 2,0 s. La velocidad final de la partícula es (*a*) –2,0 m/s, (*b*) 7,2 m/s, (*c*) 6,0 m/s, (*d*) 10 m/s, (*e*) Ninguna de las anteriores.

56 • Inicialmente una partícula se mueve hacia el oeste con una velocidad de 40 m/s y 5 s después se está moviendo hacia el norte a 30 m/s. (*a*) ¿Cuál ha sido el cambio del módulo de las velocidades de la partícula durante este tiempo? (*b*) ¿Cuál ha sido la variación de la dirección de la velocidad? (*c*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de $\Delta\mathbf{v}$ en este intervalo? (*d*) ¿Cuáles son el módulo y dirección de $\mathbf{a}_m$ en este intervalo?

57 • Cuando $t = 0$ una partícula situada en el origen tiene una velocidad de 40 m/s con $\theta = 45°$. Para $t = 3$ s, la partícula está en $x = 100$ m, $y = 80$ m con velocidad de 30 m/s y $\theta = 50°$. Calcular (*a*) la velocidad media y (*b*) la aceleración media de la partícula durante este intervalo.

58 •• SSM iSOLVE ✓ Una partícula se mueve en un plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $x = 4$ m, $y = 3$ m y posee la velocidad $\mathbf{v} = (2\text{ m/s})\,\mathbf{i} + (-9\text{ m/s})\,\mathbf{j}$. La aceleración viene dada por el valor $\mathbf{a} = (4\text{ m/s}^2)\,\mathbf{i} + (3\text{ m/s}^2)\,\mathbf{j}$. (*a*) Determinar el vector velocidad en el instante $t = 2$ s. (*b*) Calcular el vector posición a $t = 4$ s. Expresar el módulo y la dirección del vector posición.

59 •• iSOLVE El vector posición de una partícula viene dado por $\mathbf{r} = (30t)\,\mathbf{i} + (40t - 5t^2)\,\mathbf{j}$, en donde r se expresa en metros y t en segundos. Determinar los vectores velocidad instantánea y aceleración instantánea en función del tiempo t.

60 •• Una partícula tiene una aceleración constante $\mathbf{a} = (6\text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (4\text{ m/s}^2)\mathbf{j}$. En el instante $t = 0$, la velocidad es cero y el vector de posición es $\mathbf{r}_0 = (10\text{ m})\mathbf{i}$. (*a*) Hallar los vectores posición y velocidad en un instante cualquiera t. (*b*) Hallar la ecuación de la trayectoria en el plano xy y hacer un esquema de la misma.

61 ••• iSOLVE Cuando sale del muelle, una barca fuera borda pone rumbo hacia el *norte* durante 20 s con una aceleración de 3 m/s^2. Posteriormente la barca vira hacía el *oeste* y se mueve durante 10 s con la velocidad adquirida durante los 20 s anteriores. (*a*) ¿Cuál es la velocidad media de la barca durante los 30 segundos de movimiento? (*b*) ¿Cuál es la aceleración media en el mismo intervalo de tiempo?, (*c*) ¿Cuál es el desplazamiento de la barca desde su salida del muelle hasta pasados 30 s de iniciado el movimiento?

62 ••• SSM María y Roberto deciden encontrarse en el lago Michigan. María parte en su lancha de Petoskey a las 9:00 a.m. y viaja hacia el norte a 8 mi/h. Roberto sale de su casa sobre la costa de Beaver Island, situada a 26 mi y 30° al oeste del norte de Petoskey a las 10:00 a.m. y viaja a una velocidad constante de 6 mi/h. ¿En qué dirección debe poner su rumbo Roberto para interceptar a María y dónde y cuándo se verificará el encuentro?

Velocidad relativa

63 •• Un avión vuela a la velocidad de 250 km/h respecto al aire en reposo. Un viento sopla a 80 km/h en dirección noreste (es decir, en dirección 45° al este del norte). (*a*) ¿En qué dirección debe volar el avión para que su rumbo sea norte? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del avión respecto al suelo?

64 •• iSOLVE ✓ Una nadadora intenta cruzar perpendicularmente un río nadando con una velocidad de 1,6 m/s respecto al agua tranquila. Sin embargo llega a la otra orilla en un punto que está 40 m más lejos en la dirección de la corriente. Sabiendo que el río tiene una anchura de 80 m (*a*) ¿cuál es la velocidad de la corriente del río? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la nadadora respecto a la orilla? (*c*) ¿En qué dirección debería nadar para llegar al punto directamente opuesto al punto de partida?

65 •• SSM Un pequeño avión sale del punto *A* y se dirige a un aeropuerto en el punto *B*, a 520 km en dirección norte. La velocidad del avión respecto al aire es de 240 km/h y existe un viento uniforme de 50 km/h que sopla del noroeste al sureste. Determinar el rumbo que debe tomar el avión y el tiempo de vuelo.

66 •• iSOLVE ✓ Dos embarcaderos están separados 2,0 km uno del otro sobre la misma orilla de un río, cuyas aguas fluyen a 1,4 km/h. Una lancha a motor hace el recorrido de ida y vuelta entre los dos embarcaderos en 50 min. ¿Cuál es la velocidad de la lancha respecto al agua?

67 •• Un concurso de aeromodelismo tiene las siguientes normas: Cada avión debe volar hasta un punto situado a 1 km de la salida y regresar de nuevo. El vencedor será el avión que realice el circuito completo en el tiempo más corto. Los competidores tienen la libertad de escoger el recorrido que desean, siempre que el avión se aleje 1 km de la salida y después regrese. El día del concurso, un viento uniforme sopla del norte a 5 m/s. Uno de los modelos puede mantener una velocidad respecto al aire de 15 m/s y se considera que los tiempos de arranque, parada y giro son despreciables. Se plantea la cuestión siguiente: ¿debe planearse el vuelo a favor del viento y contra el viento en el circuito o con viento cruzado este y oeste? Analícese el plan sobre estas dos alternativas: (1) El avión vuela 1 km al norte y después regresa; (2) el avión recorre 1 km hacia el este al arrancar y después regresa.

68 • iSOLVE El piloto de un pequeño avión mantiene una velocidad con respecto al aire de 150 nudos (un nudo corresponde a la velocidad de una milla náutica por hora) y quiere volar hacia el norte (000°) con respecto a la Tierra. Si sopla un viento de 30 nudos del este (090°), calcular que rumbo (acimut) debe tomar el piloto.

69 •• SSM El coche A se mueve hacia el este a 20 m/s y se dirige a un cruce. Cuando A cruza la intersección, el coche B parte del reposo 40 m al norte del cruce y se mueve hacia el sur con una aceleración constante de 2 m/s^2. (*a*) ¿Qué posición ocupa B respecto a A 6 segundos después de que A cruza la intersección? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de B respecto a A cuando $t = 6$ s? (*c*) ¿Cuál es la aceleración de B respecto a A para $t = 6$ s?

70 ••• SSM Una pelota está por encima de una raqueta de tenis colocada en posición horizontal. Al soltar la pelota, ésta rebota en las cuerdas de la raqueta alcanzando el 64% de su altura inicial. (*a*) Encontrar la expresión para la velocidad de la pelota, después de rebotar, en función de la velocidad de la pelota justo antes del choque con la raqueta. (*b*) La misma pelota y la misma raqueta se utilizan para jugar un partido de tenis. Un jugador, al sacar, golpea la pelota (que supuestamente tiene una velocidad inicial nula) moviendo la raqueta a 25 m/s. ¿Con qué velocidad impulsa el jugador la bola? *(Sugerencia): Use el resultado del apartado (a) y calcule la velocidad de la bola en el sistema de referencia de la raqueta para, posteriormente, calcular la velocidad de ésta en el sistema de referencia del jugador.* (*c*) Una bien conocida ley de la física nos dice que nunca podemos ver como una pelota rebota hasta una altura superior de donde ha salido. A partir de este hecho, ¿puede encontrar un límite superior a la velocidad de una pelota en un servicio, independientemente del diseño de la raqueta? (Esta cuestión se podrá explicar más adelante en un contexto diferente: la idea de la *conservación del ímpetu*).

Movimiento circular y aceleración centrípeta

71 • ¿Cuál es la aceleración del extremo de la aguja que señala los minutos en el reloj del problema 38? Expresarla como una fracción del módulo de la aceleración de la caída libre g.

72 • Una centrifugadora gira a 15.000 rev/min. (*a*) Calcular la aceleración centrípeta en un tubo con una muestra situado a 15 cm del eje de rotación. (*b*) Para conseguir la velocidad máxima de rotación, la centrifugadora acelera durante 1 min. y 15 s. Calcular el *módulo* de la aceleración tangencial mientras acelera, suponiendo que ésta sea constante.

73 • Un objeto situado en reposo en el ecuador experimenta una aceleración dirigida hacia el centro de la Tierra debido al movimiento rotacional de la Tierra alrededor de su eje y una aceleración dirigida hacia el Sol debida al movimiento orbital de la Tierra. Calcular los módulos de ambas aceleraciones y expresarlos como una fracción de la aceleración de caída libre de los cuerpos g. Usar los valores de los datos físicos que se incluye al final de este libro.

74 •• SSM Determine la aceleración que experimenta la Luna debida a la Tierra, usando para ello los valores de la distancia media y del periodo orbital que aparecen en la tabla de datos físicos al final del libro. Suponga que la órbita es circular. Exprese esta aceleración como una fracción del módulo de la aceleración de caída libre.

75 • Un muchacho hace girar una bola atada a una cuerda en un círculo horizontal de 0,8 m de radio. ¿Cuántas revoluciones por minuto realiza la bola si el módulo de su aceleración centrípeta es g (el módulo de la aceleración de caída libre)?

Proyectiles

76 • Un lanzador de béisbol lanza una pelota a 140 km/h hacia la base, que está a 18,4 m de distancia. Despreciando la resistencia del aire (no sería una buena cosa para el bateador), determinar cuánto ha descendido la pelota por causa de la gravedad en el momento en que alcanza la base.

77 • Se lanza un proyectil con velocidad de módulo v_0 y ángulo θ_0 respecto a la horizontal. Hallar una expresión que dé la altura máxima que alcanza por encima de su punto de partida en función de v_0, θ_0 y g.

78 •• SSM Un proyectil se dispara con una velocidad inicial v_0 bajo un ángulo de tiro de 30° sobre la horizontal desde una altura de 40 m por encima del suelo. El proyectil choca contra el suelo a una velocidad de 1,2 v_0. Determinar v_0.

79 •• En la figura 3.48, si x es 50 m y h = 10 m, ¿cuál es la velocidad mínima inicial del dardo para que choque contra el mono antes de llegar éste al suelo que está a 11,2 m por debajo de la posición inicial del mono?

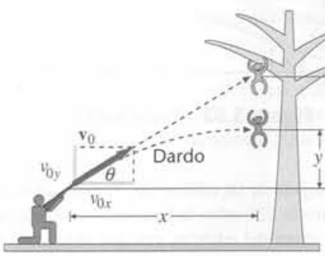


Figura 3.48 Problema 79

80 •• Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 53 m/s. Determinar el ángulo de proyección necesario para que la altura máxima del proyectil sea igual a su alcance horizontal.

81 •• Una bola lanzada al aire llega al suelo a una distancia de 40 m al cabo de 2,44 s. Determinar el módulo y la dirección de la velocidad inicial.

82 •• SSM iSOLVE Demostrar que si un objeto se lanza con velocidad v_0 bajo un ángulo de tiro θ por encima de la horizontal, el módulo de la velocidad a cierta altura h, $v(h)$, es independiente de θ.

83 •• A la mitad de su altura máxima, la velocidad de un proyectil es 3/4 de su velocidad inicial. ¿Qué ángulo forma el vector velocidad inicial con la horizontal?

84 • iSOLVE ✓ Un avión de transporte vuela horizontalmente a una altura de 12 km con una velocidad de 900 km/h cuando un carro de combate se desprende de la rampa trasera de carga. (*a*) ¿Cuánto tiempo tarda el tanque en chocar contra el suelo? (*b*) ¿A qué distancia horizontal del punto donde cayó se encuentra el tanque cuando choca contra el suelo? (*c*) ¿A qué distancia está el tanque respecto al avión cuando choca contra el suelo, suponiendo que el avión sigue volando con velocidad constante?

85 •• SSM iSOLVE Dos personajes de dibujos animados responden a su argumento habitual y uno persigue al otro. El coyote Wiley (*Carnivorous hungribilous*) intenta cazar de nuevo al Correcaminos (*Speedibus cantcatchmi*). Ambos, en su frenética carrera llegan al borde de un profundo barranco de 15 m de ancho y 100 m de profundidad. El Correcaminos salta con un ángulo de 15° por encima de la horizontal y aterriza al otro lado del barranco sobrándole 1,5 m. (*a*) ¿Cuál era la velocidad del Correcaminos antes de iniciar el salto? Ignore la resistencia del aire. (*b*) El Coyote, con el mismo objetivo de superar el obstáculo, salta también con la misma velocidad inicial, pero con distinto ángulo de salida. Para su desgracia, le faltan 0,5 m para poder alcanzar el otro lado del barranco. ¿Con qué ángulo saltó? (Supóngase que éste fue inferior a 15°.)

86 • Un cañón se ajusta con un ángulo de tiro de 45°. Dispara una bala con una velocidad de 300 m/s. (*a*) ¿A qué altura llegará la bala? (*b*) ¿Cuánto tiempo estará en el aire? (*c*) ¿Cuál es el alcance horizontal del cañón?

87 •• Una piedra lanzada horizontalmente desde lo alto de una torre choca contra el suelo a una distancia de 18 m de su base. (*a*) Sabiendo que la altura de la torre es de 24 m, calcular la velocidad con que fue lanzada la piedra. (*b*) Calcular la velocidad de la piedra justo antes de que ésta golpee el suelo.

88 •• iSOLVE Se dispara un proyectil al aire desde la cima de una montaña a 200 m por encima de un valle (figura 3.49). Su velocidad inicial es de 60 m/s a 60° respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, ¿dónde caerá el proyectil?

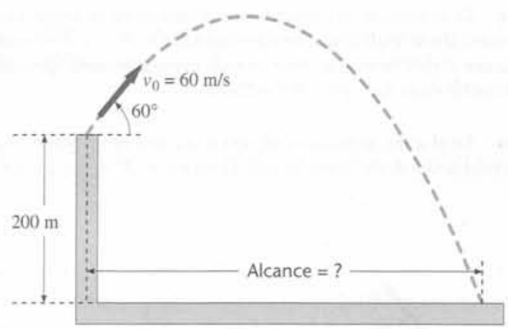


Figura 3.49 Problema 88

89 •• El alcance de un proyectil disparado horizontalmente desde lo alto de un monte es igual a la altura de éste. ¿Cuál es la dirección del vector velocidad cuando el proyectil choca contra el suelo?

90 • Se dispara un proyectil con un ángulo de 60° por encima de la horizontal y con una velocidad inicial de 300 m/s. Calcular (*a*) la distancia horizontal recorrida por el proyectil y (*b*) la distancia vertical alcanzada después de transcurridos los primeros 6 s.

91 ●● Una bala de cañón se dispara con una velocidad inicial de 42,2 m/s, desde una altura de 40 m y con un ángulo de 30º por encima de la horizontal. Encontrar el alcance de la bala.

92 ●● SSM Un arco lanza flechas con una velocidad del orden de 45 m/s. (*a*) Un arquero Tártaro sentado a horcajadas en su caballo dispara una flecha elevando el arco 10º por encima de la horizontal. Si el arco está 2,25 m por encima del suelo, ¿cuál es el alcance de la flecha? Supóngase que el suelo está nivelado y no considere la resistencia del aire. (*b*) Supóngase ahora que el caballo se mueve a galope tendido en la misma dirección en que se dispara la flecha y que el arquero coloca el arco de la misma forma que en el apartado anterior. Si la velocidad del caballo es de 12 m/s, ¿cuál es ahora el alcance de la flecha?

93 ● Con el uso de un cañón de patatas (instrumento medio juguete medio real), Chuck lanza patatas horizontalmente con una velocidad inicial de 50 m/s. (*a*) Si Chuck mantiene el aparato 1 m por encima del suelo, ¿cuánto tiempo está el tubérculo en el aire después de su lanzamiento? (*b*) ¿Hasta dónde llega antes de tocar el suelo? (Se puede obtener información sobre los cañones de patata en Internet buscando *potato cannons*.)

94 ●● Calcular $dR/d\theta$ a partir de $R = (v_0^2/g)\,\mathrm{sen}(2\theta_0)$ y mostrar que poniendo $dR/d\theta = 0$ nos da que para el ángulo $\theta = 45°$ se obtiene el máximo alcance.

95 ● SSM En un corto relato de ciencia ficción escrito durante los años 1970, Ben Bova describió un conflicto entre dos hipotéticas colonias en la Luna – una fundada por los Estados Unidos y la otra fundada por la Unión Soviética. En la historia, los colonos de cada colonia empiezan a dispararse entre ellos hasta que se dan cuenta, con horror, que sus armas dan suficiente velocidad inicial a las balas para que éstas se sitúen en órbita. (*a*) Si el módulo de la aceleración de la gravedad en la Luna es 1,67 m/s^2, ¿cuál es el alcance máximo de una bala cuya velocidad inicial es de 900 m/s? (Supóngase que la curvatura de la superficie de la Luna es despreciable.) (*b*) ¿Cuál debería ser la velocidad inicial de una bala disparada en la superficie de la Luna para que ésta pudiera situarse en órbita alrededor del satélite? (Hay que buscar el radio de la Luna.)

96 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\mathrm{sen}(2\theta_0)$. Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la aceleración de la gravedad viene dado por $\Delta R/R = -\Delta g/g$.

97 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\mathrm{sen}(2\theta_0)$. Demostrar que el cambio en el alcance causado por una pequeña variación de la velocidad inicial viene dado por $\Delta R/R = 2\Delta v_0/v_0$.

98 ●●● En el texto, se ha calculado que el alcance de un proyectil cuando cae a la misma altura desde la que ha sido disparado es $R = (v_0^2/g)\,\mathrm{sen}(2\theta_0)$.

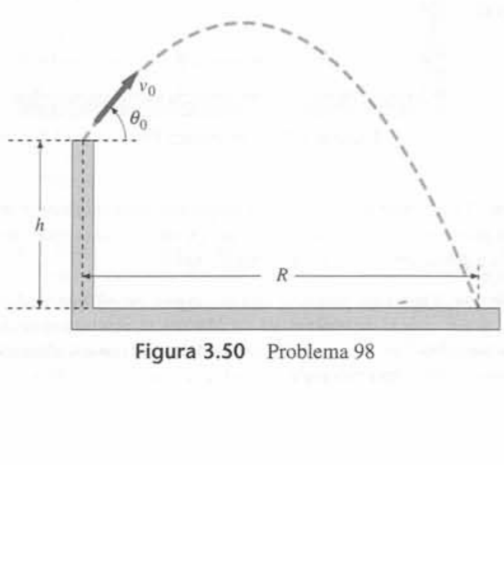


Figura 3.50 Problema 98

Demostrar que el alcance para un problema más general como el que se muestra en la figura 3.50 donde $\Delta y \neq 0$ viene dado por

$$R = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\theta_0}}\right)\frac{v_0^2}{2g}\,\mathrm{sen}\,2\theta_0$$

99 ●● SSM Un proyectil se dispara con un ángulo de elevación θ. Un observador situado junto a la rampa de lanzamiento sitúa la posición del proyectil midiendo el ángulo de elevación ϕ que se muestra en la figura 3.51 cuando éste está en su máxima elevación. Demostrar que $\phi = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\ \theta$.

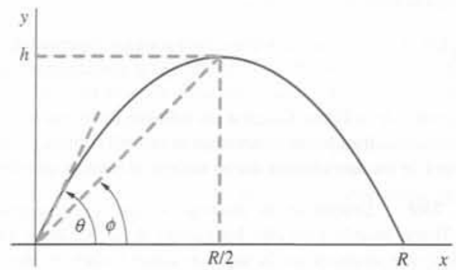


Figura 3.51 Problema 99

100 ● Un proyectil se dispara con una velocidad inicial desconocida y aterriza, 20 s más tarde, en la ladera de una colina situada a una distancia horizontal de 3000 m y a 450 m por encima del punto desde donde se ha realizado el disparo. (*a*) ¿Cuál es la componente vertical de su velocidad inicial? (*b*) ¿Cuál es la componente horizontal de su velocidad inicial?

101 ●● SSM Una piedra se lanza horizontalmente desde lo alto de una cuesta que forma un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial de la piedra es v_0, ¿a qué distancia caerá sobre la cuesta?

102 ●●● Un cañón de juguete se coloca en una rampa que tiene una pendiente con un ángulo ϕ. (*a*) Si la bala se proyecta hacia arriba por una colina con un ángulo de θ_0 por encima de la horizontal (figura 3.52) y tiene una velocidad inicial v_0, demostrar que el alcance R (medido a lo largo de la rampa) viene dado por

$$R = \frac{2v_0^2\cos^2\theta_0(\mathrm{tg}\ \theta_0 - \mathrm{tg}\ \phi)}{g\cos\phi}$$

Ignorar la resistencia del aire.

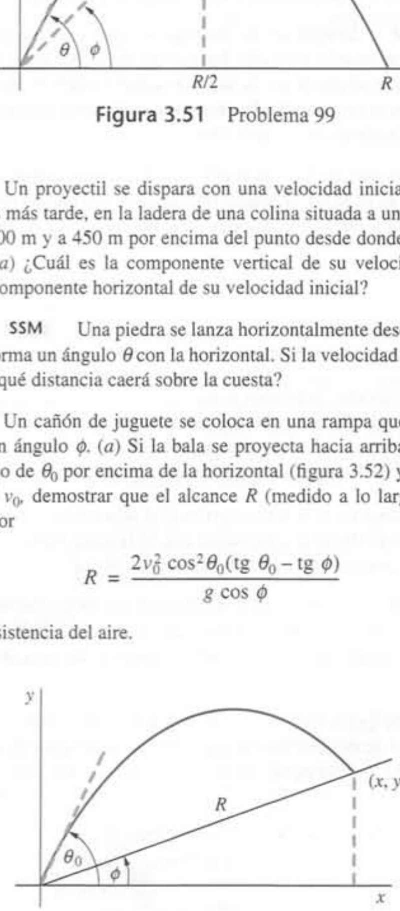


Figura 3.52 Problema 102

103 ●● Desde el tejado de un edificio de 20 m de altura se lanza una piedra con un ángulo de tiro de 53° sobre la horizontal. Si el alcance horizontal de la piedra es igual a la altura del edificio, con qué velocidad se lanzó la roca? ¿Cuál es la velocidad de ésta justo antes de chocar contra el suelo?

104 ●● Una muchacha que está a 4 m de una pared vertical lanza contra ella una pelota (figura 3.53). La pelota sale de su mano a 2 m por encima del suelo con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (10\ \mathrm{m/s})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ o $10\sqrt{2}$ m/s a 45°. Cuando la pelota choca en la pared, se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que permanece sin variar su componente vertical. ¿Dónde caerá la pelota al suelo? *Sugerencia: Se puede considerar que la pared actúa como un espejo. Determinar el alcance, sin considerar la pared, y una vez conocido, considerar la reflexión especular en la pared.*

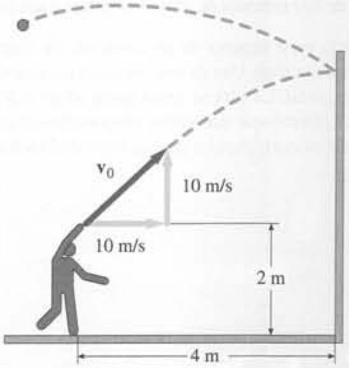


Figura 3.53 Problema 104

Tiro al blanco y problemas relacionados

105 ● Un muchacho utiliza un tirachinas para lanzar una piedra desde la altura del hombro a un blanco situado a 40 m de distancia. El muchacho observa que para hacer diana debe apuntar a 4,85 m por encima del blanco. Determinar la velocidad de la piedra cuando sale del tirachinas y el tiempo de vuelo.

106 ●● SSM La distancia del puesto del lanzador de béisbol a la base es de 18,4 m. El terraplén donde se sitúa el lanzador está 0,2 m sobre el nivel del campo. Al lanzar una pelota con una velocidad inicial de 37,5 m/s, ésta sale de la mano del lanzador a una altura de 2,3 m sobre el terraplén. ¿Qué ángulo debe formar **v** y la horizontal para que la pelota cruce la base a 0,7 m por encima del suelo? (Despreciar la interacción con el aire.)

107 ●● Supongamos que un disco de hockey se lanza de tal modo que justamente sobrepasa la pared de plexiglás cuando se encuentra a su altura máxima $h = 2{,}80$ m. Determinar v_{0y}, el tiempo t que tarda en salvar la pared y v_{0x}, v_0 y θ_0 para este caso. Suponga que la distancia horizontal es $x_1 = 12{,}0$ m.

108 ●● Un muchacho se aproxima con su motocicleta al lecho de un riachuelo de 7 m de anchura. Se ha construido una rampa con una inclinación de 10° para la gente atrevida que quiera saltar la zanja. El muchacho circula a su máxima velocidad, 40 km/h. (*a*) ¿Debería el muchacho intentar el salto o pisar los frenos con energía? (*b*) ¿Cuál es la velocidad mínima que debe llevar la motocicleta para dar este salto? (Suponer la misma elevación en los dos lados del obstáculo.)

109 ●●● Si una bala que sale por la boca del arma a 250 m/s ha de chocar contra un blanco situado a 100 m de distancia y la misma altura que el arma, ésta debe apuntar a un punto por encima del blanco. ¿Qué distancia debe haber entre el blanco y este punto?

Problemas generales

110 ● Los vectores desplazamiento **A** y **B** de la figura 3.54 tienen ambos una magnitud de 1 m. (*a*) Determinar sus componentes x e y. (*b*) Determinar las componentes, módulo y dirección de la suma **A** + **B**. (*c*) Determinar las componentes, módulo y dirección de la diferencia **A** – **B**.

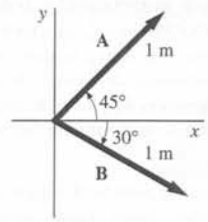


Figura 3.54 Problema 110

111 ● SSM Un plano está inclinado un ángulo de 30° con la horizontal. Escoger el eje x apuntando hacia abajo según la pendiente del plano y el eje y perpendicular al plano. Determinar las componentes x e y de la aceleración de la gravedad, cuya magnitud es 9,81 m/s^2 y apunta verticalmente hacia abajo.

112 ● Dos vectores **A** y **B** corresponden al plano xy. ¿En qué condiciones la relación $A/B = A_x/B_x$?

113 ● El vector de posición de una partícula viene dado por $\mathbf{r} = (5\text{ m/s})t\,\mathbf{i} + (10\text{ m/s})t\,\mathbf{j}$, en donde t está en segundos y **r** en metros. (*a*) Dibujar la trayectoria de la partícula en el plano xy. (*b*) Hallar **v** en forma de sus componentes y calcular su módulo.

114 ●● iSOLVE Un albañil situado en el tejado de una casa deja caer involuntariamente su martillo, y éste resbala por el tejado con una velocidad constante de 4 m/s. El tejado forma un ángulo de 30° con la horizontal y su punto más bajo está a 10 m de altura sobre el suelo. ¿Qué distancia horizontal recorrerá el martillo después de abandonar el tejado de la casa y antes de que choque contra el suelo?

115 ●● En 1940, Emanuel Zacchini voló 53 m como un obús humano, récord que todavía no ha sido superado. Su velocidad inicial fue 24,2 m/s bajo un ángulo de tiro θ. Determinar θ y la altura máxima, h, alcanzada por Emanuel durante este vuelo. Ignore los efectos de la resistencia del aire.

116 ●● Una partícula se mueve en el plano xy con aceleración constante. Para $t = 0$, la partícula se encuentra en la posición $\mathbf{r}_1 = (4\text{ m})\,\mathbf{i} + (3\text{ m})\,\mathbf{j}$, con velocidad $\mathbf{v}_1$. Para $t = 2$ s, la partícula se ha desplazado a la posición $\mathbf{r}_2 = (10\text{ m})\,\mathbf{i} - (2\text{ m})\,\mathbf{j}$ y su velocidad ha cambiado a $\mathbf{v}_2 = (5\text{ m/s})\,\mathbf{i} - (6\text{ m/s})\,\mathbf{j}$. (*a*) Determinar $\mathbf{v}_1$. (*b*) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? (*c*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en función del tiempo? (*d*) ¿Cuál es el vector posición de la partícula en función del tiempo?

117 ●● SSM Una pequeña bola de acero se proyecta horizontalmente desde la parte superior de una escalera de escalones rectangulares. La velocidad inicial de la bola es de 3 m/s. Cada escalón tiene 0,18 m de altura y 0,3 m de ancho. ¿Con cuál escalón chocará primeramente la bola?

118 ●● Una persona lanza una pelota a la distancia x_0 cuando está de pie sobre un terreno nivelado. ¿A qué distancia lanzará la misma pelota desde lo alto de un edificio de altura h si lo hace con ángulos de inclinación (*a*) 0°? (*b*) 30°? (*c*) 45°?

119 ●●● Darlen es una motorista acróbata de un circo ambulante. Para dar más emoción a su actuación, salta desde una rampa que posee una inclinación θ y sobrepasa una zanja con llamas de anchura x y alcanza el otro extremo sobre una plataforma elevada (altura h respecto del lado inicial) (figura 3.55). (*a*) Para

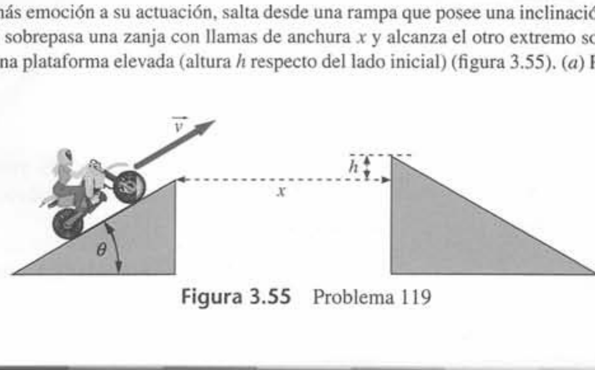


Figura 3.55 Problema 119