MOVIMIENTO EN DOS O EN TRES DIMENSIONES

3

? Si un automóvil toma una curva con rapidez constante, ¿está acelerando? Si es así, ¿en qué dirección acelera?

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo representar la posición de un cuerpo en dos o en tres dimensiones usando vectores.
- Cómo determinar el vector velocidad de un cuerpo conociendo su trayectoria.
- Cómo obtener el vector aceleración de un cuerpo, y por qué un cuerpo puede tener una aceleración aun cuando su rapidez sea constante.
- Cómo interpretar las componentes de la aceleración de un cuerpo paralela y perpendicular a su trayectoria.
- Cómo describir la trayectoria curva que sigue un proyectil.
- Las ideas clave detrás del movimiento en una trayectoria circular, con rapidez constante o con rapidez variable.
- Cómo relacionar la velocidad de un cuerpo en movimiento visto desde dos marcos de referencia distintos.

Cuando un bate golpea una pelota de béisbol, ¿qué determina dónde cae la pelota? ¿Cómo describimos el movimiento de un carro de montaña rusa en una curva o el vuelo de un halcón alrededor de un campo abierto? Si lanzamos un globo lleno de agua horizontalmente desde una ventana, ¿tardará el mismo tiempo en llegar al suelo que si sólo lo dejamos caer?

No podemos contestar estas preguntas usando las técnicas del capítulo 2, donde consideramos que las partículas se movían sólo en línea recta. En vez de ello, necesitamos extender nuestras descripciones del movimiento a situaciones en dos y en tres dimensiones. Seguiremos empleando las cantidades vectoriales de desplazamiento, velocidad y aceleración; sin embargo, ahora no estarán todas en una misma línea. Veremos que muchos movimientos importantes se dan sólo en dos dimensiones, es decir, en un *plano*, y pueden describirse con dos componentes de posición, velocidad y aceleración.

También necesitamos considerar cómo describen el movimiento de una partícula observadores diferentes que se mueven unos con respecto a otros. El concepto de *velocidad relativa* desempeñará un papel importante más adelante en este libro, cuando estudiemos colisiones, exploraremos los fenómenos electromagnéticos, y cuando presentemos la teoría especial de la relatividad de Einstein.

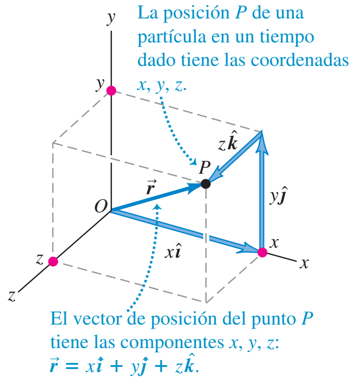
En este capítulo se conjunta el lenguaje de vectores que vimos en el capítulo 1 con el lenguaje de la cinemática del capítulo 2. Como antes, nos interesa describir el movimiento, no analizar sus causas. No obstante, el lenguaje que aprenderemos aquí resultará indispensable más adelante, al estudiar la relación entre fuerza y movimiento.

3.1 Vectores de posición y velocidad

Para describir el *movimiento* de una partícula en el espacio, primero tenemos que describir *su posición*. Considere una partícula que está en el punto P en cierto instante. El **vector de posición** $\vec{r}$ de la partícula en ese instante es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto P (figura 3.1). Las coordenadas cartesianas x, y y z de P son las componentes x, y y z de $\vec{r}$. Usando los vectores unitarios que presentamos en la sección 1.9, podemos escribir

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \qquad \text{(vector de posición)} \tag{3.1}$$

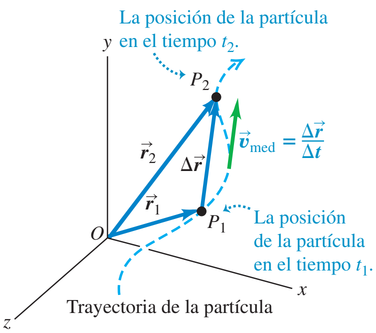
3.1 El vector de posición $\vec{r}$ del origen al punto P tiene componentes x, y y z. La trayectoria que la partícula sigue en el espacio es en general una curva (figura 3.2).



Durante un intervalo de tiempo Δt, la partícula se mueve de P_1, donde su vector de posición es $\vec{r}_1$, a P_2, donde su vector de posición es $\vec{r}_2$. El cambio de posición (el desplazamiento) durante este intervalo es $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}$. Definimos la **velocidad media** $\vec{v}_{med}$ durante este intervalo igual que en el capítulo 2 para movimiento rectilíneo, como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \text{(vector de velocidad media)} \tag{3.2}$$

3.2 La velocidad media $\vec{v}_{med}$ entre los puntos P_1 y P_2 tiene la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{r}$.



Dividir un vector entre un escalar es realmente un caso especial de *multiplicar* un vector por un escalar, que se describió en la sección 1.7; la velocidad media $\vec{v}_{med}$ es igual al vector de desplazamiento $\Delta\vec{r}$ multiplicado por $1/\Delta t$, el recíproco del intervalo de tiempo. Observe que la componente x de la ecuación (3.2) es $v_{med\text{-}x} = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1) = \Delta x/\Delta t$. Esto es precisamente la ecuación (2.2), la expresión para la velocidad media que dedujimos en la sección 2.1 para el movimiento unidimensional.

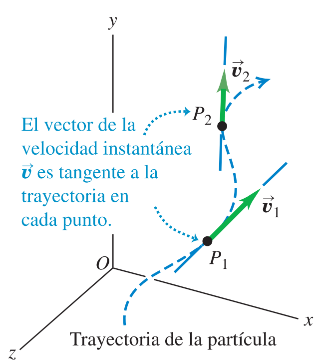
Aquí definimos la **velocidad instantánea** igual que en el capítulo 2: como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo se aproxima a 0, y es la tasa instantánea de cambio de posición con el tiempo. La diferencia clave es que tanto la posición $\vec{r}$ como la velocidad instantánea $\vec{v}$ ahora son vectores:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(vector de velocidad instantánea)} \tag{3.3}$$

La *magnitud* del vector $\vec{v}$ en cualquier instante es la *rapidez* v de la partícula en ese instante. La *dirección* de $\vec{v}$ en cualquier instante es la dirección en que la partícula se mueve en ese instante.

Observe que conforme $\Delta t \to 0$, P_1 y P_2 de la figura 3.2 se acercan cada vez más. En el límite, $\Delta\vec{r}$ se vuelve tangente a la trayectoria. La dirección de $\Delta\vec{r}$ en el límite también es la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$. Esto conduce a una conclusión importante: *en cualquier punto de la trayectoria, el vector de velocidad instantánea es tangente a la trayectoria en ese punto* (figura 3.3).

3.3 Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son las velocidades instantáneas en los puntos P_1 y P_2, como se muestra en la figura 3.2.



A menudo es más sencillo calcular el vector de velocidad instantánea empleando componentes. Durante cualquier desplazamiento $\Delta\vec{r}$, los cambios Δx, Δy y Δz en las tres coordenadas de la partícula son las *componentes* de $\Delta\vec{r}$. Por lo tanto, las componentes v_x, v_y y v_z de la velocidad instantánea $\vec{v}$ son simplemente las derivadas en el tiempo de x, y y z. Es decir,

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \qquad \text{(componentes de la velocidad instantánea)} \tag{3.4}$$

La componente x de $\vec{v}$ es $v_x = dx/dt$, que es la ecuación (2.3): la expresión para la velocidad instantánea en movimiento rectilíneo que obtuvimos en la sección 2.2.

Por lo tanto, la ecuación (3.4) es una extensión directa de la idea de velocidad instantánea al movimiento en tres dimensiones.

Podemos obtener este mismo resultado derivando la ecuación (3.1). Los vectores unitarios $\hat{\boldsymbol{\imath}}$, $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ y $\hat{\boldsymbol{k}}$ tienen magnitud y dirección constantes, así que sus derivadas son cero; entonces,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} \tag{3.5}$$

Esto muestra otra vez que las componentes de $\vec{v}$ son dx/dt, dy/dt y dz/dt.

La magnitud del vector de velocidad instantánea $\vec{v}$, esto es, la rapidez, está dada en términos de las componentes v_x, v_y y v_z aplicando el teorema de Pitágoras

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{3.6}$$

La figura 3.4 muestra la situación cuando la partícula se mueve en el plano xy. Aquí, z y v_z son cero, y la rapidez (la magnitud de $\vec{v}$) es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

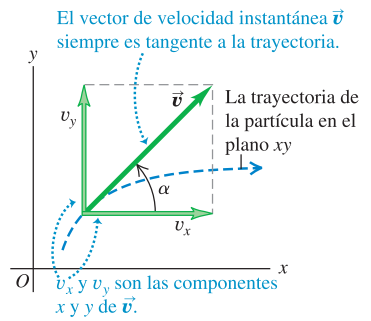
y la dirección de la velocidad instantánea $\vec{v}$ está dada por el ángulo α de la figura. Vemos que

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.7}$$

(Siempre usamos letras griegas para los ángulos. Utilizamos α para la dirección del vector de la velocidad instantánea para evitar confusiones con la dirección θ del vector de *posición* de la partícula.)

El vector de velocidad instantánea suele ser más interesante y útil que el de la velocidad media. De ahora en adelante, al usar el término "velocidad", siempre nos referiremos al vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ (no al vector de velocidad media). Usualmente ni nos molestaremos en llamar vector a $\vec{v}$; el lector debe recordar que la velocidad es una cantidad vectorial con magnitud y dirección.

3.4 Las dos componentes de velocidad para movimiento en el plano xy.



Ejemplo 3.1 Cálculo de velocidad media e instantánea

Se está usando un vehículo robot para explorar la superficie de Marte. El módulo de descenso es el origen de coordenadas; en tanto que la superficie marciana circundante está en el plano xy. El vehículo, que representamos como un punto, tiene coordenadas x y y que varían con el tiempo:

$$x = 2.0\ \text{m} - (0.25\ \text{m/s}^2)t^2$$
$$y = (1.0\ \text{m/s})t + (0.025\ \text{m/s}^3)t^3$$

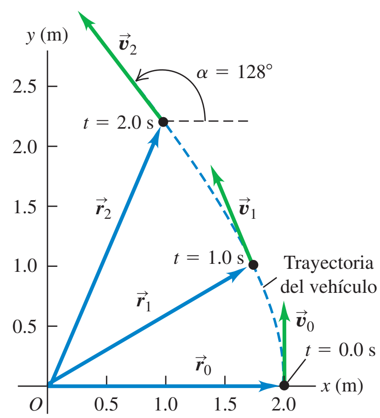
a) Obtenga las coordenadas del vehículo y su distancia con respecto al módulo en $t = 2.0$ s. *b*) Obtenga los vectores de desplazamiento y velocidad media del vehículo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s. *c*) Deduzca una expresión general para el vector de velocidad instantánea del vehículo. Exprese la velocidad instantánea en $t = 2.0$ s en forma de componentes y además en términos de magnitud y dirección.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema implica movimiento en una trayectoria bidimensional (es decir, en un plano). Por lo tanto, deberemos usar las expresiones para los *vectores* de desplazamiento, velocidad media y velocidad instantánea que obtuvimos en esta sección. (En las expresiones más sencillas de las secciones 2.1 y 2.2 no intervienen vectores, y sólo son válidas para movimiento rectilíneo.)

PLANTEAR: La trayectoria del vehículo se muestra en la figura 3.5. Usaremos la ecuación (3.1) para la posición $\vec{r}$, la expresión $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ para el desplazamiento, la ecuación (3.2) para la velocidad media y las ecuaciones (3.5) y (3.6) para la velocidad instantánea y su dirección. Las incógnitas se indican en el enunciado del problema.

3.5 En $t = 0$ el vehículo tiene vector de posición $\vec{r}_0$ y velocidad instantánea $\vec{v}_0$. Asimismo, $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$, son los vectores en $t = 1.0$ s; $\vec{r}_2$ y $\vec{v}_2$ son los vectores en $t = 2.0$ s.



continúa

EJECUTAR: *a*) En el instante $t = 2.0$ s las coordenadas del vehículo son

$$x = 2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s})^2 = 1.0\text{ m}$$
$$y = (1.0\text{ m/s})(2.0\text{ s}) + (0.025\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^3 = 2.2\text{ m}$$

La distancia del vehículo al origen en este instante es

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1.0\text{ m})^2 + (2.2\text{ m})^2} = 2.4\text{ m}$$

b) Para obtener el desplazamiento y la velocidad media, expresamos el vector de posición $\vec{r}$ en función del tiempo *t*. De la ecuación (3.1):

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}\\ &= [2.0\text{ m} - (0.25\text{ m/s}^2)t^2]\hat{\imath}\\ &\quad + [(1.0\text{ m/s})t + (0.025\text{ m/s}^3)t^3]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el instante $t = 0.0$ s el vector de posición $\vec{r}_0$ es

$$\vec{r}_0 = (2.0\text{ m})\hat{\imath} + (0.0\text{ m})\hat{\jmath}$$

Del inciso *a*) sabemos que, en $t = 2.0$ s, el vector de posición $\vec{r}_2$ es

$$\vec{r}_2 = (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, el desplazamiento entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0 &= (1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath} - (2.0\text{ m})\hat{\imath}\\ &= (-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Durante el intervalo entre $t = 0.0$ s y $t = 2.0$ s, el vehículo se movió 1.0 m en la dirección $-x$ y 2.2 m en la dirección $+y$. La velocidad media en este intervalo es el desplazamiento dividido entre el tiempo transcurrido (ecuación 3.2):

$$\begin{aligned}\vec{v}_{\text{med}} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1.0\text{ m})\hat{\imath} + (2.2\text{ m})\hat{\jmath}}{2.0\text{ s} - 0.0\text{ s}}\\ &= (-0.50\text{ m/s})\hat{\imath} + (1.1\text{ m/s})\hat{\jmath}\end{aligned}$$

Las componentes de esta velocidad media son

$$v_{\text{med-}x} = -0.50\text{ m/s} \qquad v_{\text{med-}y} = 1.1\text{ m/s}$$

c) Por la ecuación (3.4), las componentes de la velocidad instantánea son las derivadas de las coordenadas respecto a *t*:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\text{ m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\text{ m/s} + (0.025\text{ m/s}^3)(3t^2)$$

Así, podemos escribir el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ como

$$\begin{aligned}\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} &= (-0.50\text{ m/s}^2)t\hat{\imath}\\ &\quad + [1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}\end{aligned}$$

En el tiempo $t = 2.0$ s, las componentes de la velocidad instantánea son

$$v_x = (-0.50\text{ m/s}^2)(2.0\text{ s}) = -1.0\text{ m/s}$$
$$v_y = 1.0\text{ m/s} + (0.075\text{ m/s}^3)(2.0\text{ s})^2 = 1.3\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad instantánea (es decir, la rapidez) en $t = 2.0$ s es

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1.0\text{ m/s})^2 + (1.3\text{ m/s})^2}\\ &= 1.6\text{ m/s}\end{aligned}$$

Su dirección con respecto al eje $+x$ está dada por el ángulo α, donde, por la ecuación (3.7),

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1.3\text{ m/s}}{-1.0\text{ m/s}} = -1.3 \qquad \text{así} \qquad \alpha = 128°$$

Una calculadora mostraría que la tangente inversa de -1.3 es $-52°$. No obstante, como vimos en la sección 1.8, hay que examinar un dibujo del vector para decidir su dirección. La figura 3.5 muestra que la respuesta correcta para α es $-52° + 180° = 128°$.

EVALUAR: Tómese un momento para comparar las componentes de la velocidad *media* que obtuvimos en el inciso *b*) para el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s ($v_{\text{med-}x} = -0.50$ m/s, $v_{\text{med-}y} = 1.1$ m/s) con las componentes de la velocidad *instantánea* en $t = 2.0$ s que obtuvimos en el inciso *c*) ($v_x = -1.0$ m/s, $v_y = 1.3$ m/s). En general, la comparación muestra que, igual que en una sola dimensión, el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante un intervalo *no* es igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo (véase el ejemplo 2-1).

Usted debería calcular el vector de posición, el vector de velocidad instantánea, la rapidez y dirección del movimiento en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. Los vectores de posición $\vec{r}$ y velocidad instantánea $\vec{v}$ en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s se muestran en la figura 3.5. Observe que en todos los puntos el vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria. La magnitud de $\vec{v}$ aumenta al avanzar el vehículo, lo que indica que la rapidez del vehículo está aumentando.

Evalúe su comprensión de la sección 3.1 ¿En cual de las siguientes situaciones el vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ en un intervalo *sería* igual a la velocidad instantánea $\vec{v}$ al final del intervalo? i) Un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva a rapidez constante; ii) un cuerpo que se mueve en una trayectoria curva y aumenta su rapidez; iii) un cuerpo que se mueve en línea recta a rapidez constante; iv) un cuerpo que se mueve en línea recta y aumenta su rapidez.

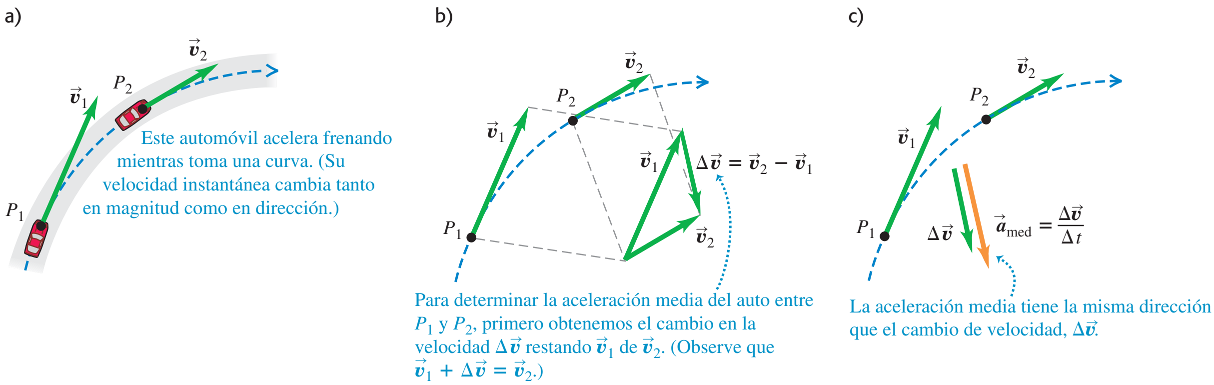
MP

3.2 El vector de aceleración

Consideremos ahora la *aceleración* de una partícula que se mueve en el espacio. Al igual que en el movimiento rectilíneo, la aceleración describe el cambio en la velocidad de la partícula; no obstante, aquí la trataremos como un vector para describir los cambios tanto en la magnitud de la velocidad (es decir, la rapidez) *como* en la dirección de la velocidad (esto es, la dirección en que se mueve la partícula).

En la figura 3.6a, un automóvil (tratado como partícula) se mueve en una trayectoria curva. Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ representan las velocidades instantáneas del auto en el

3.6 a) Un automóvil se mueve por una curva de P_1 a P_2. b) Se obtiene $\Delta\vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1$ mediante resta de vectores. c) El vector $\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{med}} = \Delta\vec{\boldsymbol{v}}/\Delta t$ representa la aceleración media entre P_1 y P_2.



instante t_1, cuando el auto está en el punto P_1, y en t_2 cuando está en P_2. Las dos velocidades pueden diferir en magnitud y dirección. Durante el intervalo de t_1 a t_2, el *cambio vectorial de velocidad* es $\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1 = \Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ (figura 3.6b). Definimos la **aceleración media** $\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{med}}$ del auto en este intervalo como el cambio de velocidad dividido entre el intervalo $t_2 - t_1 = \Delta t$:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{\text{med}} = \frac{\vec{\boldsymbol{v}}_2 - \vec{\boldsymbol{v}}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} \quad \text{(vector de aceleración media)} \qquad (3.8)$$

La aceleración media es una cantidad *vectorial* en la misma dirección que el vector $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ (figura 3.6c). Observe que $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ es la resultante de la velocidad original $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ y el cambio $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ (figura 3.6b). La componente x de la ecuación (3.8) es $a_{\text{med-}x} = (v_{2x} - v_{1x})/(t_2 - t_1) = \Delta v_x/\Delta t$, que no es sino la ecuación (2.4) para la aceleración media en movimiento rectilíneo.

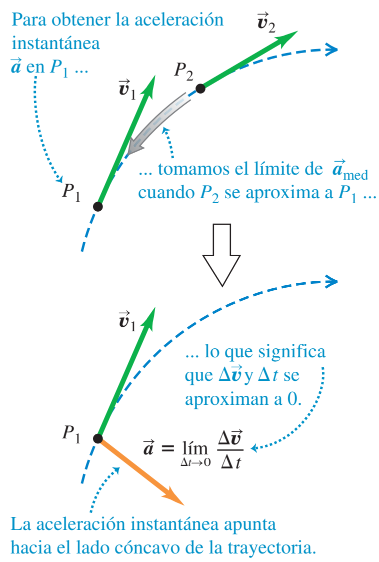
Al igual que en el capítulo 2, definimos la **aceleración instantánea** $\vec{\boldsymbol{a}}$ en el punto P_1 como el límite de la aceleración media cuando el punto P_2 se acerca a P_1 y $\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$ y Δt se acercan a cero. La aceleración instantánea también es igual a la tasa (variación) instantánea de cambio de velocidad con el tiempo. Como no estamos limitados a movimiento rectilíneo, la aceleración instantánea ahora es un vector:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\boldsymbol{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{v}}}{dt} \quad \text{(vector de aceleración instantánea)} \qquad (3.9)$$

El vector de velocidad $\vec{\boldsymbol{v}}$, como vimos, es tangente a la trayectoria de la partícula. No obstante, las figuras 3.6c y 3.7 muestran que si la trayectoria es curva, el vector de aceleración instantánea $\vec{\boldsymbol{a}}$ siempre apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria, es decir, hacia el interior de cualquier curva descrita por la partícula.

CUIDADO **Cualquier partícula que siga una trayectoria curva está acelerando** Si una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizá le parezca que esta conclusión es contraria a su intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para implicar que la velocidad aumenta. La definición más precisa de la ecuación (3.9) muestra que la aceleración no es cero cuando el vector de velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o ambas. ▮

3.7 La aceleración instantánea $\vec{\boldsymbol{a}}$ en el punto P_1 de la figura 3.6.



Para convencerse de que una partícula no tiene aceleración cero cuando se mueve en una trayectoria curva con rapidez constante, piense en lo que siente cuando viaja en automóvil. Si el auto acelera, usted tiende a moverse en dirección ?

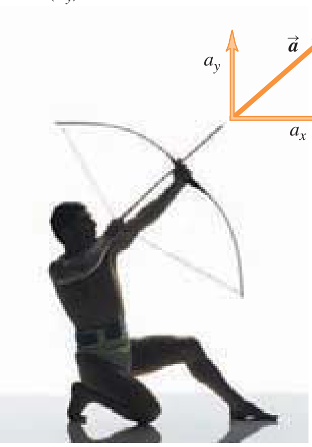
opuesta a la aceleración del vehículo. (Veremos por qué en el capítulo 4.) Así, tendemos a movernos hacia atrás cuando el auto acelera hacia adelante (aumenta su velocidad), y hacia el frente cuando el auto desacelera (frena). Si el auto da vuelta en un camino horizontal, tendemos a deslizamos hacia afuera de la curva; por lo tanto, el auto tiene una aceleración hacia adentro de la curva.

Normalmente nos interesará la aceleración instantánea, no la media. Por ahora, usaremos el término "aceleración" para referirnos al vector de aceleración instantánea, $\vec{a}$.

Cada componente del vector de aceleración es la derivada de la componente correspondiente de la velocidad:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad \text{(componentes de la aceleración instantánea)} \tag{3.10}$$

3.8 Cuando el arquero dispara la flecha, ésta acelera tanto hacia adelante como hacia arriba. Por lo tanto, su vector de aceleración tiene una componente horizontal (a_x) y también una componente vertical (a_y).



En términos de vectores unitarios,

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} \tag{3.11}$$

La componente x de las ecuaciones (3.10) y (3.11), $a_x = dv_x/dt$, es la expresión de la sección 2.3 para la aceleración instantánea en una dimensión, ecuación (2.5). La figura 3.8 muestra un ejemplo de vector de aceleración que tiene componentes tanto x como y.

Además, como cada componente de velocidad es la derivada de la coordenada correspondiente, expresamos las componentes a_x, a_y y a_z del vector aceleración $\vec{a}$ como

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad a_z = \frac{d^2z}{dt^2} \tag{3.12}$$

y el vector de aceleración $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k} \tag{3.13}$$

Ejemplo 3.2 Cálculo de aceleración media e instantánea

Veamos otra vez los movimientos del vehículo robot del ejemplo 3.1. Determinamos que las componentes de la velocidad instantánea en cualquier instante t son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = (-0.25\ \text{m/s}^2)(2t)$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = 1.0\ \text{m/s} + (0.025\ \text{m/s}^3)(3t^2)$$

y que el vector de velocidad es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \text{m/s}^2)t\hat{\imath} + [1.0\ \text{m/s} + (0.075\ \text{m/s}^3)t^2]\hat{\jmath}$$

a) Obtenga las componentes de la aceleración media en el intervalo de $t = 0.0$ s a $t = 2.0$ s. *b*) Determine la aceleración instantánea en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo utiliza la relación vectorial entre velocidad, aceleración media y aceleración instantánea.

PLANTEAR: En el inciso *a*), determinamos primero los valores de v_x y v_y al principio y al final del intervalo, y después usamos la ecuación (3.8) para calcular las componentes de la aceleración media. En el inciso *b*) determinamos las componentes de la aceleración instantánea en cualquier tiempo t derivando respecto al tiempo las componentes de la velocidad, como en la ecuación (3.10).

EJECUTAR: *a*) Si sustituimos $t = 0.0$ s, o bien, $t = 2.0$ s en las expresiones para v_x y v_y, veremos que al principio del intervalo ($t = 0.0$ s) las componentes de velocidad son

$$v_x = 0.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.0\ \text{m/s}$$

y que al final del intervalo ($t = 2.0$ s) las componentes son

$$v_x = -1.0\ \text{m/s} \qquad v_y = 1.3\ \text{m/s}$$

Los valores en $t = 2.0$ s son los mismos que obtuvimos en el ejemplo 3.1.) Así, las componentes de la aceleración media en el intervalo son

$$a_{\text{med-}x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-1.0\ \text{m/s} - 0.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = -0.5\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\text{med-}y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{1.3\ \text{m/s} - 1.0\ \text{m/s}}{2.0\ \text{s} - 0.0\ \text{s}} = 0.15\ \text{m/s}^2$$

b) Con la ecuación (3.10), obtenemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0.50\ \text{m/s}^2 \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = (0.075\ \text{m/s}^3)(2t)$$

Podemos escribir el vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ como

$$\vec{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} = (-0.50\ \mathrm{m/s^2})\hat{\imath} + (0.15\ \mathrm{m/s^3})t\hat{\jmath}$$

En el instante $t = 2.0$ s, las componentes de la aceleración instantánea son

$$a_x = -0.50\ \mathrm{m/s^2} \qquad a_y = (0.15\ \mathrm{m/s^3})(2.0\ \mathrm{s}) = 0.30\ \mathrm{m/s^2}$$

El vector de aceleración en este instante es

$$\vec{a} = (-0.50\ \mathrm{m/s^2})\hat{\imath} + (0.30\ \mathrm{m/s^2})\hat{\jmath}$$

La magnitud de la aceleración en este instante es

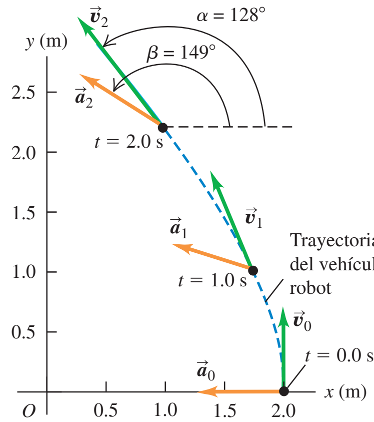
$$\begin{aligned} a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= \sqrt{(-0.50\ \mathrm{m/s^2})^2 + (0.30\ \mathrm{m/s^2})^2} = 0.58\ \mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

La dirección de $\vec{a}$ con respecto al eje x positivo está dada por el ángulo β, donde

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{a_y}{a_x} = \frac{0.30\ \mathrm{m/s^2}}{-0.50\ \mathrm{m/s^2}} = -0.60 \\ \beta &= 180° - 31° = 149° \end{aligned}$$

EVALUAR: Usted debería utilizar los resultados del inciso *b*) para calcular la aceleración instantánea en $t = 0.0$ s y $t = 1.0$ s. La figura 3.9 muestra la trayectoria y los vectores de velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s, 1.0 s y 2.0 s. Observe que $\vec{v}$ y $\vec{a}$ *no* están en la misma dirección en ningún momento. El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria, y el de aceleración $\vec{a}$ apunta hacia el lado cóncavo de ésta.

3.9 Trayectoria del vehículo robot que muestra la velocidad y aceleración en $t = 0.0$ s ($\vec{v}_0$ y $\vec{a}_0$), $t = 1.0$ s ($\vec{v}_1$ y $\vec{a}_1$) y $t = 2.0$ s ($\vec{v}_2$ y $\vec{a}_2$).



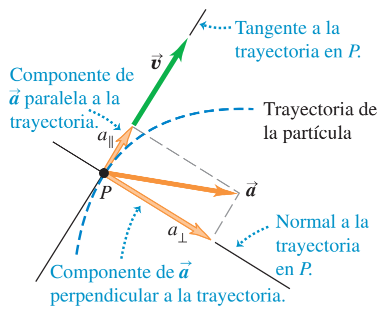
Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

El vector de aceleración $\vec{a}$ de una partícula puede describir cambios en la rapidez de ésta, en la dirección de su movimiento o en ambas. Resulta útil destacar que la componente de la aceleración *paralela* a la trayectoria de la partícula —esto es, paralela a la velocidad— nos indica acerca de los cambios en la *rapidez* de la partícula; en tanto que la componente de la aceleración *perpendicular* a la trayectoria —y por lo tanto, perpendicular a la velocidad— nos indica los cambios en la *dirección del movimiento* de la partícula. La figura 3.10 muestra estas componentes, que se denotan como $a_\parallel$ y $a_\perp$. Para ver por qué las componentes paralela y perpendicular de $\vec{a}$ tienen tales propiedades, consideremos dos casos especiales.

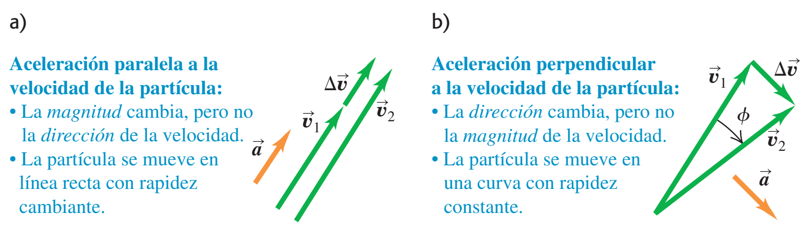
En la figura 3.11*a*, el vector de aceleración es *paralelo* a la velocidad $\vec{v}_1$, de manera que $\vec{a}$ tiene sólo una componente paralela $a_\parallel$ (es decir, $a_\perp = 0$). El cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ en un intervalo pequeño Δt tiene la misma dirección que $\vec{a}$ y, por lo tanto, que $\vec{v}_1$. La velocidad $\vec{v}_2$ al final de Δt, dada por $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, es un vector con la misma dirección que $\vec{v}_1$ pero de mayor magnitud. Es decir, durante el intervalo Δt la partícula de la figura 3.11a se movió en línea recta con rapidez creciente.

En la figura 3.11b, la aceleración es *perpendicular* a la velocidad, de manera que $\vec{a}$ tiene sólo una componente perpendicular $a_\perp$ (es decir, $a_\parallel = 0$). En un intervalo pequeño Δt, el cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$ es un vector casi perpendicular a $\vec{v}_1$. Otra vez, $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v}$, pero aquí $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen diferente dirección. Al aproximarse el intervalo

3.10 La aceleración puede descomponerse en una componente $a_\parallel$ paralela a la trayectoria (es decir, en la tangente a la trayectoria), y una componente $a_\perp$ perpendicular a la trayectoria (es decir, en la normal a la trayectoria).



3.11 El efecto de la aceleración con dirección a) paralela y b) perpendicular a la velocidad de la partícula.



Δt a cero, el ángulo ϕ en la figura también se acerca a cero, $\Delta\vec{v}$ se hace perpendicular *tanto* a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ tienen la misma magnitud. Dicho de otro modo, la rapidez de la partícula no cambia, pero la dirección del movimiento cambia y su trayectoria se curva.

En general, la aceleración $\vec{a}$ tiene componentes *tanto* paralela *como* perpendicular a la velocidad $\vec{v}$, como en la figura 3.10. Entonces, cambiarán *tanto* la rapidez de la partícula (descrita por la componente paralela $a_{\parallel}$) *como* su dirección (descrita por la componente perpendicular $a_{\perp}$), por lo que seguirá una trayectoria curva.

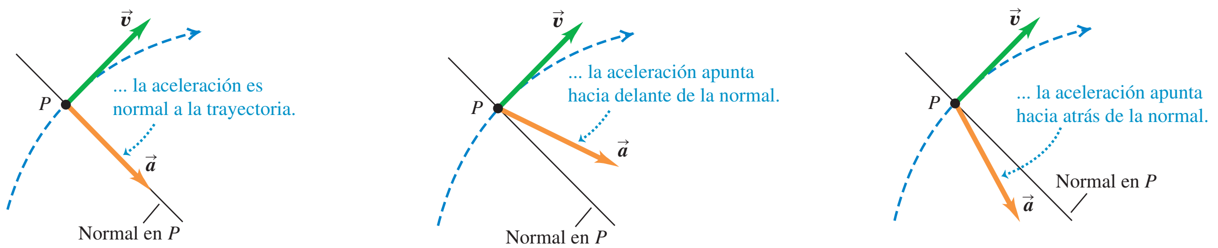
La figura 3.12 muestra una partícula que se mueve con trayectoria curva en tres situaciones distintas: rapidez constante, creciente y decreciente. Si la rapidez es constante, $\vec{a}$ es perpendicular, o *normal*, a la trayectoria y a $\vec{v}$ y apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (figura 3.12a). Si la rapidez aumenta, todavía hay una componente perpendicular de $\vec{a}$, pero también una paralela con la misma dirección que $\vec{v}$ (figura 3.12b). Entonces, $\vec{a}$, apunta hacia adelante de la normal a la trayectoria (como en el ejemplo 3.2). Si la rapidez disminuye, la componente paralela tiene dirección opuesta a $\vec{v}$ y $\vec{a}$, apunta hacia atrás de la normal a la trayectoria (figura 3.12c). Usaremos otra vez esas ideas en la sección 3.4 al estudiar el caso especial de movimiento en un círculo.

3.12 Vectores de velocidad y aceleración para una partícula que pasa por un punto P de una trayectoria curva con rapidez **a)** constante, **b)** creciente y **c)** decreciente.

a) Cuando la rapidez es constante en una trayectoria curva ...

b) Cuando la rapidez se incrementa en una trayectoria curva ...

c) Cuando la rapidez disminuye en una trayectoria curva ...



Ejemplo 3.3 Cálculo de las componentes paralela y perpendicular de la aceleración

Para el vehículo de los ejemplos 3.1 y 3.2, obtenga las componentes paralela y perpendicular de la aceleración en $t = 2.0$ s.

SOLUCIÓN

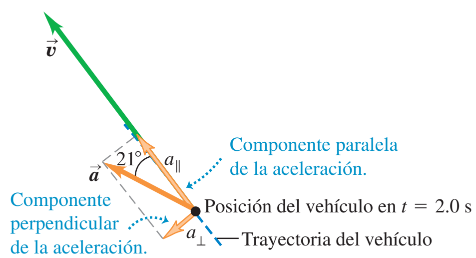
IDENTIFICAR: Queremos obtener las componentes del vector de aceleración $\vec{a}$ que sean paralela y perpendicular al vector de velocidad $\vec{v}$.

PLANTEAR: Obtuvimos las direcciones de $\vec{a}$ y $\vec{v}$ en los ejemplos 3.2 y 3.1, respectivamente, lo cual nos permite determinar el ángulo entre los dos vectores y, por lo tanto, las componentes de $\vec{a}$.

EJECUTAR: En el ejemplo 3.2 vimos que en $t = 2.0$ s la partícula tiene una aceleración de magnitud 0.58 m/s^2 con un ángulo de 149° con respecto al eje $+x$. Por el ejemplo 3.1, sabemos que en ese instante el vector de velocidad tiene un ángulo de 128° con respecto al eje $+x$. Así, la figura 3.9 muestra que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{v}$ es $149° - 128° = 21°$ (figura 3.13). Las componentes paralela y perpendicular de la aceleración son entonces

$$a_{\parallel} = a\cos 21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\cos 21° = 0.54\ \text{m/s}^2$$
$$a_{\perp} = a\,\text{sen}\,21° = (0.58\ \text{m/s}^2)\,\text{sen}\,21° = 0.21\ \text{m/s}^2$$

3.13 Componentes paralela y perpendicular de la aceleración del vehículo en $t = 2.0$ s.



EVALUAR: La componente paralela $a_{\parallel}$ tiene la misma dirección que $\vec{v}$, lo cual indica que la rapidez aumenta en este instante; el valor de $a_{\parallel} =$ 0.54 m/s^2 significa que la rapidez está aumentando a una tasa de 0.54 m/s por segundo. Como la componente perpendicular $a_{\perp}$ no es cero, se sigue que en este instante el vehículo cambia de dirección y sigue una trayectoria curva; en otras palabras, el vehículo está dando vuelta.

Ejemplo conceptual 3.4 Aceleración de una esquiadora

Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto, como se muestra en la figura 3.14a. La rampa es recta entre A y C, y es curva a partir de C. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente abajo de A a E, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector de aceleración en los puntos B, D, E y F.

SOLUCIÓN

La figura 3.14b muestra la solución. En el punto B, la esquiadora se mueve en línea recta con rapidez creciente, así que su aceleración apunta cuesta abajo, en la misma dirección que su velocidad.

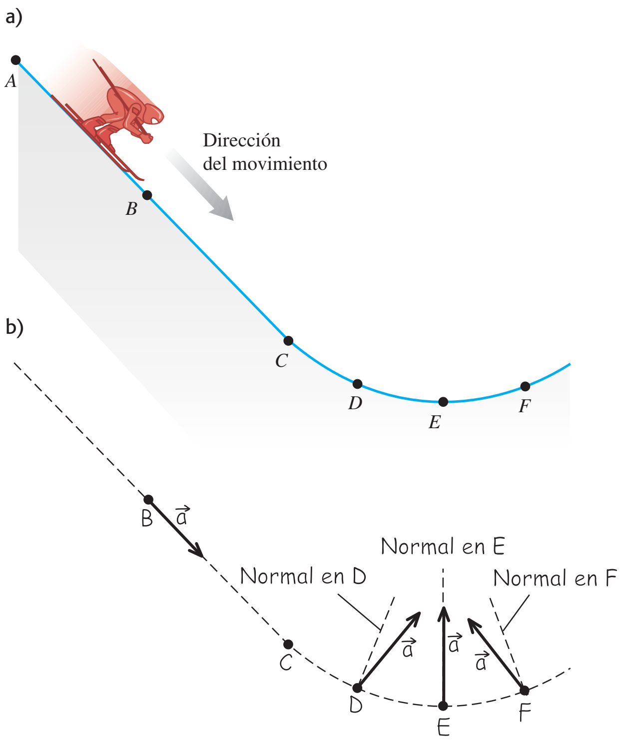
En D la esquiadora sigue una trayectoria curva, así que su aceleración tiene una componente perpendicular. También hay una componente en la dirección del movimiento porque su rapidez aún va en aumento en este punto. Por lo tanto, el vector de aceleración apunta *adelante* de la normal a su trayectoria en el punto D.

La rapidez de la esquiadora no cambia instantáneamente en E; la rapidez es máxima en este punto, así que su derivada es cero. Por lo tanto, no hay componente paralela de $\vec{a}$, y la aceleración es perpendicular al movimiento.

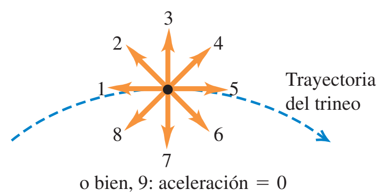
Por último, en F la aceleración tiene una componente perpendicular (porque la trayectoria es curva aquí) y una componente paralela *opuesta* a la dirección de su movimiento (porque la rapidez está disminuyendo). De manera que en este punto, el vector de aceleración apunta *hacia atrás* de la normal a la trayectoria.

En la siguiente sección examinaremos la aceleración de la esquiadora después de salir de la rampa.

3.14 a) La trayectoria de la esquiadora. b) Nuestra solución.



Evalúe su comprensión de la sección 3.2 Un trineo viaja por la cima de una montaña cubierta de nieve. El trineo disminuye su rapidez conforme asciende por un lado de la montaña y la aumenta cuando desciende por el otro lado. ¿Cuál de los vectores (1 a 9) en la figura muestra correctamente la dirección de la aceleración del trineo en la cima? (Considere el 9 como la aceleración cero.)



3.3 Movimiento de proyectiles

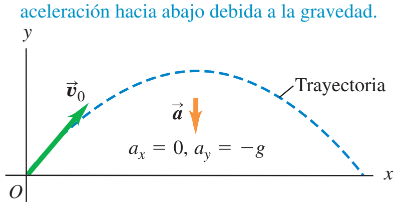
Un **proyectil** es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire. Una pelota bateada, un balón lanzado, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos proyectiles. El camino que sigue un proyectil es su **trayectoria**.

Para analizar este tipo de movimiento tan común, partiremos de un modelo idealizado que representa el proyectil como una partícula con aceleración (debida a la gravedad) constante tanto en magnitud como en dirección. Despreciaremos los efectos de la resistencia del aire, así como la curvatura y rotación terrestres. Como todos los modelos, éste tiene limitaciones. La curvatura de la Tierra debe considerarse en el vuelo de misiles de largo alcance; en tanto que la resistencia del aire es de importancia vital para un paracaidista. No obstante, podemos aprender mucho analizando este modelo sencillo. En el resto del capítulo, la frase “movimiento de proyectil” implicará que se desprecia la resistencia del aire. En el capítulo 5 veremos qué sucede cuando la resistencia no puede despreciarse.

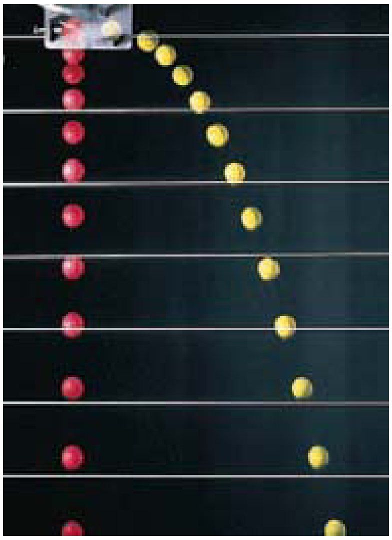
El movimiento de un proyectil siempre está limitado a un plano vertical determinado por la dirección de la velocidad inicial (figura 3.15). La razón es que la aceleración debida a la gravedad es exclusivamente vertical; la gravedad no puede mover un

3.15 La trayectoria de un proyectil.

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



3.16 La bola roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante dado, ambas bolas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferente posición x y velocidad x.



ActivPhysics ONLINE

3.1 Resolución de problemas de movimiento de proyectiles
3.2 Dos pelotas que caen
3.3 Cambio de la velocidad en x
3.4 Aceleraciones x y y de proyectiles

proyectil lateralmente. Por lo tanto, este movimiento es *bidimensional*. Llamaremos al plano de movimiento, el plano de coordenadas xy, con el eje x horizontal y el eje y vertical hacia arriba.

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que podemos tratar por separado las coordenadas x y y. La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a $-g$. (Por definición, g siempre es positiva, pero por las direcciones de coordenadas elegidas, a_y es negativa.) Así, *podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.* La figura 3.16 muestra dos proyectiles con diferente movimiento x, pero con idéntico movimiento y: uno se deja caer desde el reposo y el otro se proyecta horizontalmente, aunque ambos proyectiles caen la misma distancia en el mismo tiempo.

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes de $\vec{a}$ son

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)} \tag{3.14}$$

Dado que las aceleraciones x y y son constantes, podemos usar las ecuaciones (2.8), (2.12), (2.13) y (2.14) directamente. Por ejemplo, suponga que en $t = 0$ la partícula está en el punto (x_0, y_0) y que en este tiempo sus componentes de velocidad tienen los valores iniciales v_{0x} y v_{0y}. Las componentes de la aceleración son $a_x = 0$, $a_y = -g$. Considerando primero el movimiento x, sustituimos 0 por a_x en las ecuaciones (2.8) y (2.12). Obtenemos

$$v_x = v_{0x} \tag{3.15}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \tag{3.16}$$

Para el movimiento y, sustituimos y por x, v_y por v_x, v_{0y} por v_{0x} y $a_y = -g$ por a_x:

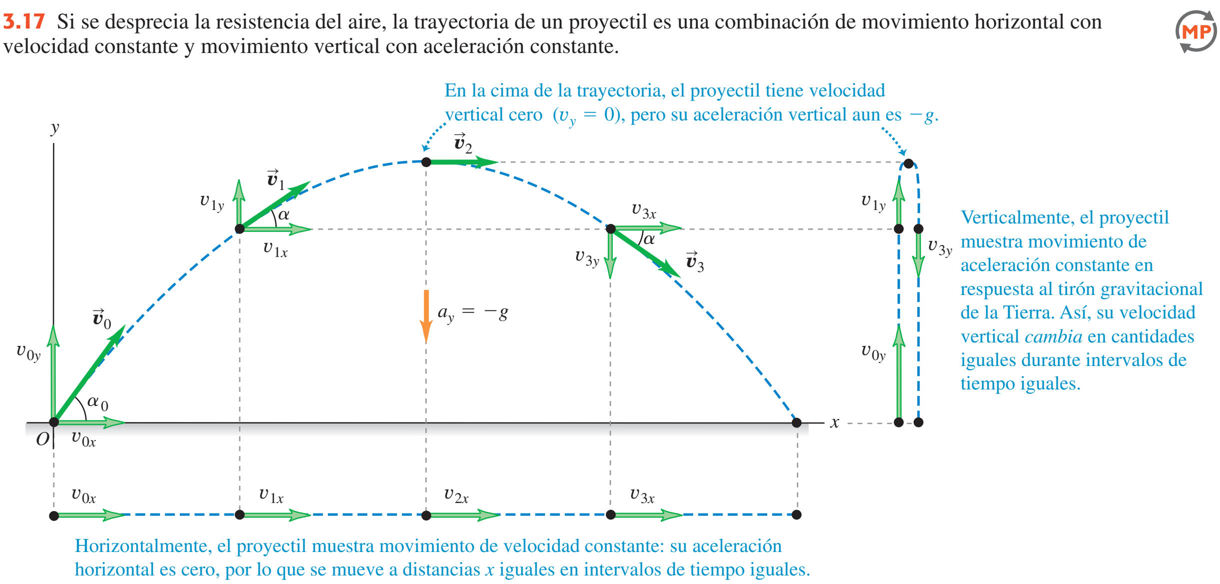
$$v_y = v_{0y} - gt \tag{3.17}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.18}$$

Por lo general, lo más sencillo es tomar la posición inicial (en $t = 0$) como origen; así, $x_0 = y_0 = 0$. Este punto podría ser la posición de una pelota cuando sale de la mano del lanzador, o la posición de una bala cuando sale del cañón de un arma.

La figura 3.17 muestra la trayectoria de un proyectil que parte de (o pasa por) el origen en el tiempo $t = 0$. La posición, la velocidad, las componentes de velocidad y

3.17 Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante.



aceleración se muestran en una serie de instantes equiespaciados. La componente x de la aceleración es 0, así que v_x es constante. La componente y de la aceleración es constante pero no cero, así que v_y cambia en cantidades iguales a intervalos de tiempo iguales, justo igual que si el proyectil fuera lanzado verticalmente con la misma velocidad y inicial. En el punto más alto de la trayectoria, $v_y = 0$.

También podemos representar la velocidad inicial $\vec{v}_0$ con su magnitud v_0 (la rapidez inicial) y su ángulo α_0 con el eje $+x$ (como se nuestra en la figura 3.18). En términos de estas cantidades, las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial son

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 \qquad v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \tag{3.19}$$

Usando estas relaciones en las ecuaciones (3.15) a (3.18) y haciendo $x_0 = y_0 = 0$, tenemos

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t \quad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.20}$$

$$y = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0 \cos\alpha_0 \quad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 - gt \quad \text{(movimiento de proyectil)} \tag{3.23}$$

Estas ecuaciones describen la posición y velocidad del proyectil de la figura 3.17 en cualquier instante t.

Podemos obtener mucha información de estas ecuaciones. Por ejemplo, en cualquier instante, la distancia r del proyectil al origen (la magnitud del vector de posición $\vec{r}$) está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.24}$$

La rapidez del proyectil (la magnitud de su velocidad) en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \tag{3.25}$$

La *dirección* de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje $+x$ (véase la figura 3.17), está dada por

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \tag{3.26}$$

El vector de velocidad $\vec{v}$ es tangente a la trayectoria en todos los puntos.

Podemos deducir una ecuación para la forma de la trayectoria en términos de x y y eliminando t. De las ecuaciones (3.20) y (3.21), que suponen $x_0 = y_0 = 0$, obtenemos $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ y

$$y = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}x^2 \tag{3.27}$$

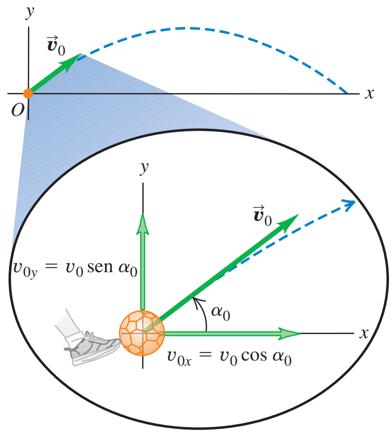
No se preocupe por los detalles de esta ecuación; lo importante es su forma general. Las cantidades v_0, $\tan\alpha_0$, $\cos\alpha_0$ y g son constantes, así que la ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2$$

donde b y c son constantes. Ésta es la ecuación de una *parábola*. En el movimiento de proyectiles, con nuestro modelo simplificado, la trayectoria siempre es una parábola (figura 3.19).

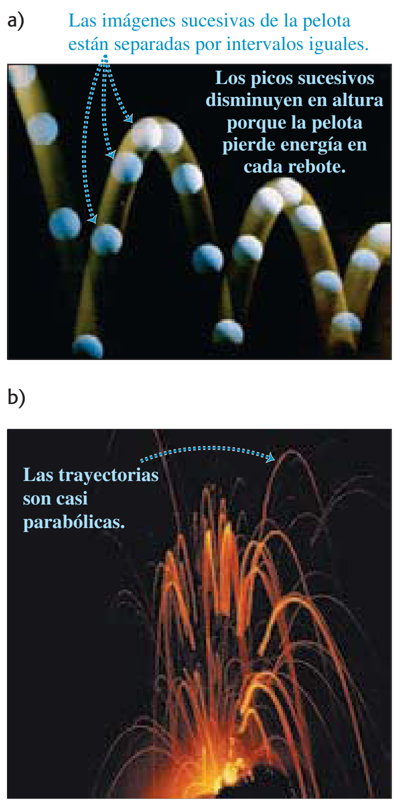
Cuando la resistencia del aire *no* es insignificante y debe incluirse, calcular la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen

3.18 Las componentes de la velocidad inicial v_{0x} y v_{0y} de un proyectil (como un balón de fútbol) se relacionan con la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial α_0.

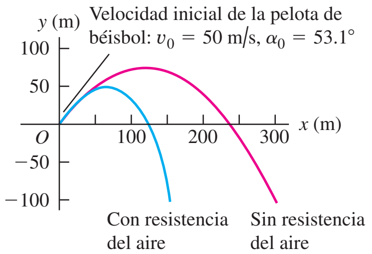


Activ Physics ONLINE
3.5 Componentes de la velocidad inicial
3.6 Práctica de tiro al blanco I
3.7 Práctica de tiro al blanco II

3.19 Las trayectorias casi parabólicas **a)** de una pelota que rebota y **b)** de borbotones de roca fundida expulsada de un volcán.



3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante. La figura 3.20 es una simulación computarizada de la trayectoria de una pelota de béisbol tanto sin resistencia del aire como con una resistencia proporcional al cuadrado de la rapidez de la pelota. Vemos que el efecto de la resistencia es muy grande, la altura máxima y el alcance se reducen, y la trayectoria ya no es parabólica. (Si usted observa cuidadosamente la figura 3.19b, se dará cuenta de que las trayectorias de los borbotones volcánicos se desvían de una manera similar de una forma parabólica.)

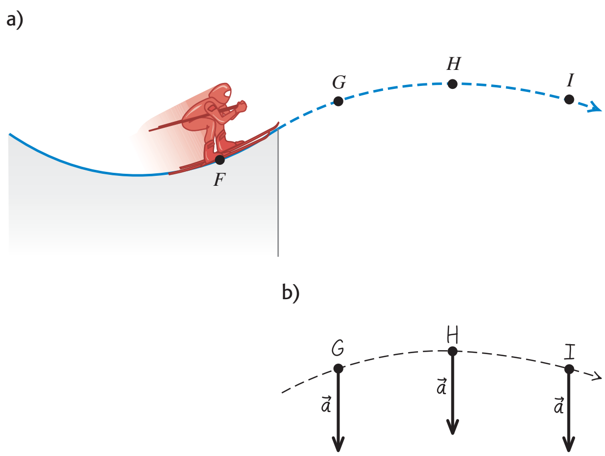
Ejemplo conceptual 3.5 Aceleración de una esquiadora, continuación

Consideremos de nuevo a la esquiadora del ejemplo conceptual 3.4. ¿Qué aceleración tiene en los puntos G, H e I de la figura 3.21a *después* de que sale de la rampa? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

La figura 3.21b muestra nuestra respuesta. La aceleración de la esquiadora cambió de un punto a otro mientras estaba en la rampa pero, apenas la esquiadora sale de la rampa, se convierte en un proyectil. Así, en los puntos G, H e I, y de hecho en *todos* los puntos después de salir de la rampa, la aceleración de la esquiadora apunta verticalmente hacia abajo y tiene magnitud g. Por más compleja que sea la aceleración de una partícula antes de convertirse en proyectil, su aceleración como proyectil está dada por $a_x = 0$, $a_y = -g$.

3.21 a) Trayectoria de la esquiadora durante el salto. b) Nuestra solución.



Estrategia para resolver problemas 3.1 Movimiento de proyectil

NOTA: Las estrategias que usamos en las secciones 2.4 y 2.5 para problemas de aceleración constante en línea recta también sirven aquí.

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* El concepto clave que debemos recordar es que durante todo el movimiento de un proyectil, la aceleración es hacia abajo y tiene magnitud constante g. Advierta que las ecuaciones para el movimiento de proyectiles no son válidas durante el lanzamiento de una pelota, porque ahí actúan sobre la pelota tanto la mano del lanzador como la gravedad. Las ecuaciones sólo se aplican una vez que la pelota sale de la mano del lanzador.

PLANTEAR *el problema con los siguientes pasos:*

1. Defina su sistema de coordenadas y dibuje sus ejes. Normalmente lo más sencillo es tomar el eje x como horizontal y el eje y hacia arriba y colocar el origen en la posición inicial ($t = 0$), donde el cuerpo se vuelve primero un proyectil (como donde la pelota sale de la mano del lanzador). Así, las componentes de la aceleración (constante) son $a_x = 0$, $a_y = -g$, y la posición inicial es $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$.

2. Haga una lista de las cantidades conocidas e incógnitas, y decida cuáles incógnitas son sus objetivos. Por ejemplo, en algunos problemas se da la velocidad inicial (ya sea las componentes, o la magnitud y dirección) y se pide obtener las coordenadas y componentes de velocidad en un instante posterior. En todo caso, usará las ecuaciones (3.20) a (3.23). (Algunas otras ecuaciones dadas en la sección 3.3 también podrían ser útiles.) Asegúrese de tener tantas ecuaciones como incógnitas por determinar.
3. Plantee el problema con palabras y luego tradúzcalo a símbolos. Por ejemplo, *¿cuándo* llega la partícula a cierto punto? (Es decir, ¿con qué valor de t?) *¿Dónde* está la partícula cuando la velocidad tiene cierto valor? (Es decir, ¿cuánto valen x y y cuando v_x o v_y tiene ese valor?) Puesto que $v_y = 0$ en el punto más alto de la trayectoria, la pregunta "¿cuándo alcanza el proyectil su punto más alto?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $v_y = 0$?" Asimismo, "¿cuándo vuelve el proyectil a su altura inicial?" se traduce a "¿cuánto vale t cuando $y = y_0$?"

EJECUTAR *la solución:* Use las ecuaciones (3.20) a (3.23) para obtener las incógnitas. Resista la tentación de dividir la trayectoria en segmentos y analizarlos individualmente. ¡No hay que volver a comenzar cuando el proyectil llega a su altura máxima! Lo más fácil suele ser usar los mismos ejes y escala de tiempo durante todo el problema. Utilice el valor $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

EVALUAR *la respuesta:* Como siempre, examine sus resultados para ver si son lógicos y si los valores numéricos son razonables.

Ejemplo 3.6 Cuerpo que se proyecta horizontalmente

Un acróbata en motocicleta se lanza del borde de un risco. Justo en el borde, su velocidad es horizontal con magnitud de 9.0 m/s. Obtenga la posición, distancia desde el borde y velocidad de la motocicleta después de 0.50 s.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Una vez que el acróbata sale del risco, se mueve como un proyectil. Por lo tanto, su velocidad en el borde del risco es su velocidad inicial.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.22. Elegimos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el borde del risco, donde la motocicleta se convierte en proyectil, así que $x_0 = 0$ y $y_0 = 0$. La velocidad inicial es puramente horizontal (es decir, $\alpha_0 = 0$), así que sus componentes son $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = 9.0\ \text{m/s}$ y $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = 0$. Para determinar la posición de la motocicleta en $t = 0.50$ s, usamos las ecuaciones (3.20) y (3.21), que dan x y y en función del tiempo. Dados estos valores, calcularemos la distancia del origen con la ecuación (3.24). Por último, usaremos las ecuaciones (3.22) y (3.23) para determinar las componentes de velocidad v_x y v_y en $t = 0.50$ s.

EJECUTAR: ¿Dónde está la motocicleta en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.20) y (3.21), las coordenadas x y y son

$$x = v_{0x}t = (9.0\ \text{m/s})(0.50\ \text{s}) = 4.5\ \text{m}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(9.8\ \text{m/s}^2)(0.50\ \text{s})^2 = -1.2\ \text{m}$$

El valor negativo de y indica que en este instante la motocicleta está debajo de su punto inicial.

¿A qué distancia está ahora la motocicleta del origen? Por la ecuación (3.24),

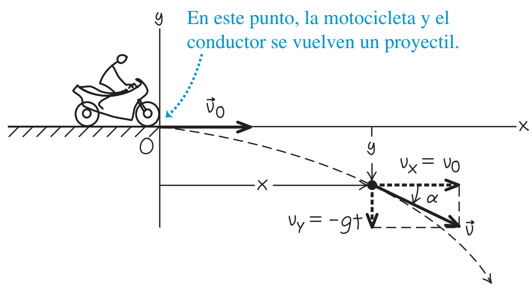
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4.5\ \text{m})^2 + (-1.2\ \text{m})^2} = 4.7\ \text{m}$$

¿Qué velocidad tiene en $t = 0.50$ s? Por las ecuaciones (3.22) y (3.23), las componentes de la velocidad en ese momento son

$$v_x = v_{0x} = 9.0\ \text{m/s}$$

$$v_y = -gt = (-9.8\ \text{m/s}^2)(0.50\ \text{s}) = -4.9\ \text{m/s}$$

3.22 Esquema para este problema.



La motocicleta tiene la misma velocidad horizontal v_x que cuando salió del risco en $t = 0$ pero, además, hay una velocidad vertical v_y hacia abajo (negativa). Si usamos vectores unitarios, la velocidad en $t = 0.50$ s es

$$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = (9.0\ \text{m/s})\hat{\imath} + (-4.9\ \text{m/s})\hat{\jmath}$$

También podemos expresar la velocidad en términos de magnitud y dirección. Por la ecuación (3.25), la rapidez (magnitud de la velocidad) en este instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$= \sqrt{(9.0\ \text{m/s})^2 + (-4.9\ \text{m/s})^2} = 10.2\ \text{m/s}$$

Por la ecuación (3.26), el ángulo α del vector de velocidad es

$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x} = \arctan\left(\frac{-4.9\ \text{m/s}}{9.0\ \text{m/s}}\right) = -29°$$

En este instante la velocidad está dirigida 29° por debajo de la horizontal.

EVALUAR: Al igual que en la figura 3.17, el aspecto horizontal del movimiento no cambia por la gravedad; la motocicleta se sigue moviendo horizontalmente a 9.0 m/s, cubriendo 4.5 m en 0.50 s. Dado que la motocicleta tiene cero velocidad inicial vertical, cae verticalmente igual que un objeto que se suelta desde el reposo y desciende una distancia de $\frac{1}{2}gt^2 = 1.2$ m en 0.50 s.

Ejemplo 3.7 Altura y alcance de un proyectil I: Una pelota de béisbol

Un bateador golpea una pelota de béisbol de modo que ésta sale del bate a una rapidez $v_0 = 37.0$ m/s con un ángulo $\alpha_0 = 53.1°$, en un lugar donde $g = 9.80$ m/s^2. *a*) Calcule la posición de la pelota y la magnitud y dirección de su velocidad cuando $t = 2.00$ s. *b*) Determine cuándo la pelota alcanza el punto más alto y su altura h en ese punto. *c*) Obtenga el *alcance horizontal* R, es decir, la distancia horizontal desde el punto de partida hasta donde la pelota cae al suelo.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como muestra la figura 3.20, los efectos de la resistencia del aire sobre el movimiento de una pelota de béisbol no son insignificantes; no obstante, por sencillez, los despreciaremos en este ejemplo y usaremos las ecuaciones del movimiento de proyectiles para describir el movimiento.

PLANTEAR: El esquema se muestra en la figura 3.23. Usaremos el mismo sistema de coordenadas que en las figuras 3.17 o 3.18. Así, podremos usar las ecuaciones (3.20) a (3.23) sin modificaciones. Las incógnitas son **1.** la posición y velocidad de la pelota 2.00 s después de perder contacto con el bate, **2.** el tiempo transcurrido entre que la pelota sale del bate y alcanza su altura máxima (cuando $v_y = 0$) y la coordenada y en ese momento, y **3.** la coordenada x en el momento en que la coordenada y es igual al valor inicial y_0.

La pelota sale del bate más o menos un metro sobre el suelo, pero ignoraremos esta distancia y supondremos que parte del nivel del suelo ($y_0 = 0$). La velocidad inicial de la pelota tiene componentes

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0 = (37.0\ \text{m/s})\cos 53.1° = 22.2\ \text{m/s}$$
$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 = (37.0\ \text{m/s})\operatorname{sen} 53.1° = 29.6\ \text{m/s}$$

EJECUTAR: *a*) Queremos obtener x, y, v_x y v_y en el instante $t = 2.00$ s. Por las ecuaciones (3.20) a (3.23),

$$x = v_{0x}t = (22.2\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) = 44.4\ \text{m}$$
$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (29.6\ \text{m/s})(2.00\ \text{s}) - \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})^2$$
$$= 39.6\ \text{m}$$
$$v_x = v_{0x} = 22.2\ \text{m/s}$$
$$v_y = v_{0y} - gt = 29.6\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)(2.00\ \text{s})$$
$$= 10.0\ \text{m/s}$$

La componente y de la velocidad es positiva, lo cual significa que la pelota todavía va en ascenso en este instante (figura 3.23). La magnitud y dirección de la velocidad se obtienen de las ecuaciones (3.25) y (3.26):

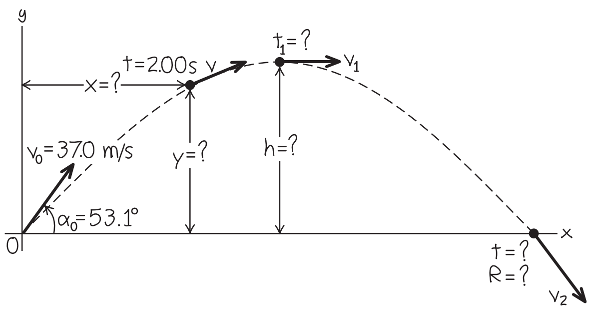
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(22.2\ \text{m/s})^2 + (10.0\ \text{m/s})^2}$$
$$= 24.3\ \text{m/s}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0\ \text{m/s}}{22.2\ \text{m/s}}\right) = \arctan 0.450 = 24.2°$$

La dirección de la velocidad (es decir, la dirección del movimiento) es 24.2° sobre la horizontal.

b) En el punto más alto, la velocidad vertical v_y es cero. ¿Cuándo sucede esto? Sea ese instante t_1; entonces,

$$v_y = v_{0y} - gt_1 = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{29.6\ \text{m/s}}{9.80\ \text{m/s}^2} = 3.02\ \text{s}$$

3.23 Esquema para este problema.



La altura h en este instante es el valor de y cuando $t = t_1 = 3.02$ s:

$$h = v_{0y}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$
$$= (29.6\ \text{m/s})(3.02\ \text{s}) - \frac{1}{2}(9.80\ \text{m/s}^2)(3.02\ \text{s})^2$$
$$= 44.7\ \text{m}$$

c) Obtendremos el alcance horizontal en dos pasos. Primero, *¿cuándo* cae la pelota al suelo? Esto ocurre cuando $y = 0$, digamos, en t_2; entonces,

$$y = 0 = v_{0y}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = t_2\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt_2\right)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en t_2. Con dos raíces:

$$t_2 = 0 \qquad \text{y} \qquad t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2(29.6\ \text{m/s})}{9.80\ \text{m/s}^2} = 6.04\ \text{s}$$

Hay dos instantes en los que $y = 0$; $t_2 = 0$ es cuando la pelota *sale* del suelo y $t_2 = 2v_{0y}/g = 6.04$ s es cuando regresa. Esto es exactamente el doble del tiempo que tarda en llegar al punto más alto que encontramos en el inciso *b*) $t_1 = v_{0y}/g = 3.02$ s, así que el tiempo de bajada es igual al tiempo de subida. Esto *siempre* sucede si los puntos inicial y final están a la misma altura y se puede despreciar la resistencia del aire.

El alcance horizontal R es el valor de x cuando la pelota vuelve al suelo, es decir, en $t = 6.04$ s:

$$R = v_{0x}t_2 = (22.2\ \text{m/s})(6.04\ \text{s}) = 134\ \text{m}$$

La componente vertical de la velocidad cuando la pelota toca el suelo es

$$v_y = v_{0y} - gt_2 = 29.6\ \text{m/s} - (9.80\ \text{m/s}^2)(6.04\ \text{s})$$
$$= -29.6\ \text{m/s}$$

Es decir, v_y tiene la misma magnitud que la velocidad vertical inicial v_{0y} pero dirección opuesta (hacia abajo). Dado que v_x es constante, el ángulo $\alpha = -53.1°$ (debajo de la horizontal) en este punto es el negativo del ángulo inicial $\alpha_0 = 53.1°$.

EVALUAR: A menudo es útil verificar los resultados obteniéndolos de una forma distinta. Por ejemplo, podemos verificar nuestra respuesta para la altura máxima del inciso *b*) aplicando la fórmula de aceleración constante, ecuación (2.13), al movimiento y:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0) = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$$

En el punto más alto, $v_y = 0$ y $y = h$. Al sustituirlos, junto con $y_0 = 0$, obtenemos

$$0 = v_{0y}^{\,2} - 2gh$$

$$h = \frac{v_{0y}^{\,2}}{2g} = \frac{(29.6\ \text{m/s})^2}{2(9.80\ \text{m/s}^2)} = 44.7\ \text{m}$$

que es la misma altura que obtuvimos en el inciso *b*).

Es interesante destacar que $h = 44.7$ m del inciso *b*) es comparable con la altura de 52.4 m del techo sobre el campo de juego en el Metrodomo Hubert H. Humphrey en Minneapolis, y el alcance horizontal $R = 134$ m del inciso *c*) es mayor que la distancia de 99.7 m entre home y la barda del jardín derecho en el Campo Safeco en Seatle. (La altura de la pelota cuando cruza la barda es más que suficiente para librarla, así que el batazo es un jonrón.)

En el mundo real, una pelota bateada con la rapidez y el ángulo iniciales que usamos aquí no alcanzará ni la altura ni la distancia que calculamos. (Si lo hiciera, los jonrones serían mucho más comunes y el béisbol sería un juego mucho menos interesante.) El motivo es que la resistencia del aire, que no se tomó en cuenta en este ejemplo, en realidad es un factor importante a las velocidades que suelen tener las pelotas lanzadas y bateadas (véase la figura 3.20).

Ejemplo 3.8 Altura y alcance de un proyectil II: Altura máxima, alcance máximo

Para un proyectil lanzado con rapidez v_0 y ángulo inicial α_0 (entre 0° y 90°), deduzca expresiones generales para la altura máxima h y el alcance horizontal R (figura 3.23). Para una v_0, dada, ¿qué valor de α_0 da la altura máxima? ¿Y qué valor da el alcance horizontal máximo?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Éste es realmente el mismo ejercicio que los incisos *b*) y *c*) del ejemplo 3.7. La diferencia es que buscamos expresiones generales para h y R. También nos interesan los valores de α_0 que dan los valores máximos de h y R.

PLANTEAR: En el inciso *b*) del ejemplo 3.7 vimos que el proyectil alcanza el punto máximo de su trayectoria (por lo que $v_y = 0$) en el tiempo $t_1 = v_{0y}/g$ y en el inciso *c*) del ejemplo 3.7 determinamos que el proyectil regresa a su altura inicial (por lo que $y = y_0$) en el tiempo $t_2 = 2v_{0y}/g$. (Como vimos en el ejemplo 3.7, $t_2 = 2t_1$.) Para determinar la altura h en el punto máximo de la trayectoria, usaremos la ecuación (3.21) para calcular la coordenada y en t_1. Para determinar R, sustituimos t_2 en la ecuación (3.20) para calcular la coordenada x en t_2. Expresaremos nuestras respuestas en términos de la rapidez de lanzamiento v_0 y el ángulo de disparo α_0 usando la ecuación (3.19).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.19), $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$ y $v_{0x} = v_0 \operatorname{sen} \alpha_0$. Por lo tanto, podemos escribir el tiempo t_1 en que $v_y = 0$ como

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Luego, por la ecuación (3.21), la altura en ese instante es

$$h = (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}\right)^2$$
$$= \frac{v_0^{\,2} \operatorname{sen}^2\alpha_0}{2g}$$

Para una rapidez de lanzamiento dada v_0, el valor máximo de h se da con sen $\alpha_0 = 1$ y $\alpha_0 = 90°$; es decir, cuando el proyectil se lanza verticalmente. Esto es lo que deberíamos esperar. Si se lanza horizontalmente, como en el ejemplo 3.6, $\alpha_0 = 0$ ¡y la altura máxima es cero!

El tiempo t_2 en que el proyectil regresa al suelo es

$$t_2 = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

El alcance horizontal R es el valor de x en el este instante. Por la ecuación (3.20),

$$R = (v_0 \cos\alpha_0)t_2 = (v_0 \cos\alpha_0)\frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha_0}{g}$$

Ahora podemos usar la identidad trigonométrica 2 sen α_0 cos α_0 = sen $2\alpha_0$ para rescribir esto como

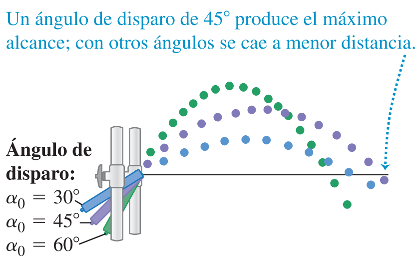
$$R = \frac{v_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\alpha_0}{g}$$

El valor máximo de sen $2\alpha_0$ es 1; esto ocurre cuando $2\alpha_0 = 90°$, o bien, $\alpha_0 = 45°$. Este ángulo da el alcance máximo para una rapidez inicial dada.

EVALUAR: La figura 3.24 se basa en una fotografía compuesta de tres trayectorias de una pelota proyectada desde un cañón de resorte con ángulos de 30, 45 y 60°. La rapidez inicial v_0 es aproximadamente igual en los tres casos. Los alcances horizontales son casi iguales con los ángulos de 30 y 60°, y el alcance de 45° es el mayor que ambos. ¿Puede demostrar que para una v_0 dada el alcance es igual para un ángulo inicial α_0 que para $90° - \alpha_0$?

CUIDADO **Altura y alcance de un proyectil** No recomendamos memorizar las expresiones anteriores para h y R; son aplicables sólo en las circunstancias especiales que describimos. En particular, la expresión para el alcance R *sólo* puede utilizarse cuando las alturas de lanzamiento y aterrizaje son iguales. En muchos de los problemas al final de este capítulo *no* deben aplicarse estas ecuaciones.

3.24 Un ángulo de disparo de 45° produce el alcance horizontal máximo. El alcance es menor con ángulos de 30 y 60°.



Ejemplo 3.9 Alturas inicial y final distintas

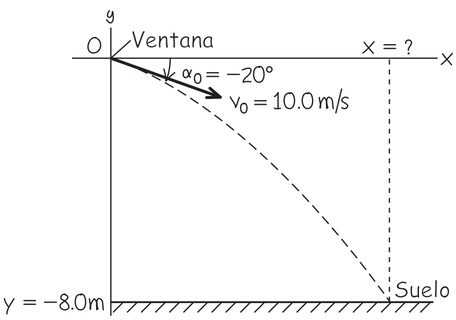
Usted lanza una pelota desde su ventana a 8.0 m del suelo. Cuando la pelota sale de su mano, se mueve a 10.0 m/s con un ángulo de 20° debajo de la horizontal. ¿A qué distancia horizontal de su ventana la pelota llegará al piso? Desprecie la resistencia del aire.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en nuestro cálculo del alcance horizontal en los ejemplos 3.7 y 3.8, estamos tratando de hallar la coordenada horizontal de un proyectil cuando está a un valor dado de y. La diferencia en este caso es que este valor de y *no* es igual a la coordenada y inicial.

PLANTEAR: Una vez más, elegimos el eje x como horizontal, y el eje y, hacia arriba. Colocamos el origen de coordenadas en el punto donde la pelota sale de su mano (figura 3.25). Así, tenemos $v_0 = 10.0$ m/s y $\alpha_0 = -20°$; el ángulo es negativo porque la velocidad inicial está debajo de la horizontal. Nuestra variable meta es el valor de x en el punto donde la pelota llega al suelo; es decir, cuando $y = -8.0$ m. Dado que las alturas inicial y final de la pelota son distintas, no podemos usar la expresión para el alcance horizontal del ejemplo 3.8. En vez de ello, usamos primero la ecuación (3.21) para hallar el instante t en que la pelota llega a $y = -8.0$ m y, después, calculamos el valor de x en ese instante con la ecuación (3.20).

3.25 Esquema para este problema.



EJECUTAR: Para determinar t, rescribimos la ecuación (3.21) en la forma estándar de una ecuación cuadrática en t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)t + y = 0$$

Las raíces de esta ecuación son

$$t = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{(-v_0 \operatorname{sen}\alpha_0)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)y}}{2\left(\frac{1}{2}g\right)}$$

$$= \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha_0 \pm \sqrt{v_0^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0 - 2gy}}{g}$$

$$= \frac{\left[\begin{array}{l}(10.0 \text{ m/s}) \operatorname{sen}(-20°) \\ \pm\sqrt{(10.0 \text{ m/s})^2 \operatorname{sen}^2(-20°) - 2(9.80 \text{ m/s}^2)(-8.0 \text{ m})}\end{array}\right]}{9.80 \text{ m/s}^2}$$

$$= -1.7 \text{ s} \quad \text{o} \quad 0.98 \text{ s}$$

Podemos desechar la raíz negativa, ya que se refiere a un tiempo previo al lanzamiento. La raíz positiva nos indica que la pelota tarda 0.98 s en llegar al suelo. Por la ecuación (3.20), la coordenada x en ese instante es

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t = (10.0 \text{ m/s})[\cos(-20°)](0.98 \text{ s})$$
$$= 9.2 \text{ m}$$

La pelota llega al suelo a una distancia horizontal de 9.2 m de la ventana.

EVALUAR: La raíz $t = -1.7$ s es un ejemplo de solución "ficticia" a una ecuación cuadrática. Ya vimos esto en el ejemplo 2.8 de la sección 2.5; le recomendamos repasarlo.

Con el origen que elegimos, teníamos alturas inicial y final $y_0 = 0$ y $y = -8.0$ m. ¿Puede demostrar, con las ecuaciones (3.16) y (3.18), que se obtienen los mismos valores de t y x si se coloca el origen en el suelo, inmediatamente abajo de donde la pelota sale de la mano?

Ejemplo 3.10 La cuidadora y el mono

Un mono escapa del zoológico y sube a un árbol. Como no logra atraerlo, la cuidadora apunta su rifle con un dardo sedante directamente hacia el mono y dispara (figura 3.26). El astuto mono se suelta en el instante en que el dardo sale del cañón del rifle, intentando caer al suelo y escapar. Demuestre que el dardo *siempre* golpea al mono, sea cual fuere la velocidad inicial del dardo (siempre que dé en el mono antes de que éste llegue al piso).

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este ejemplo, tenemos *dos* cuerpos que se mueven como proyectiles, el dardo sedante y el mono. Ambos tienen posición y velocidad iniciales distintas; sin embargo, entran en movimiento de proyectil al mismo tiempo. Para demostrar que el dardo golpea al mono, debemos probar que hay un instante en que el mono y el dardo tienen las mismas coordenadas x y y.

PLANTEAR: Elegimos las direcciones x y y acostumbradas, y colocamos el origen en el extremo del cañón del rifle (figura 3.26). Primero usaremos la ecuación (3.20) para encontrar el tiempo t en que las coordenadas x_{mono} y x_{dardo} sean iguales. Luego, usaremos la ecuación (3.21) para verificar si y_{mono} y y_{dardo} también son iguales en ese instante; si lo son, el dardo golpeará al mono.

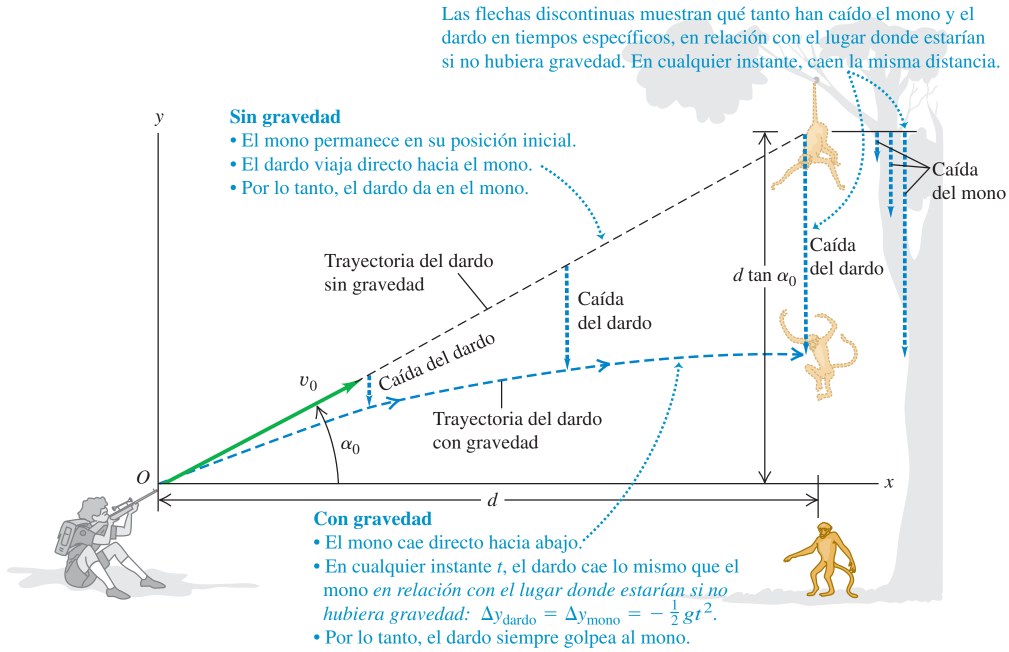
EJECUTAR: El mono cae verticalmente, así que $x_{mono} = d$ en *todo* momento. En el caso del dardo, la ecuación (3.20) nos indica que $x_{dardo} = (v_0 \cos \alpha_0)t$. Cuando las coordenadas x son iguales, $d = (v_0 \cos \alpha_0)t$, o bien,

$$t = \frac{d}{v_0 \cos\alpha_0}$$

Para que el dardo golpee al mono, debe cumplirse que $y_{mono} = y_{dardo}$ en este instante. El mono está en caída libre unidimensional; su posición en cualquier momento está dada por la ecuación (2.12) cambiando debidamente los símbolos. La figura 3.26 muestra que la altura inicial del mono es $d \tan \alpha_0$ (el cateto opuesto de un triángulo rectángulo con ángulo a_0 y cateto adyacente d), y obtenemos

$$y_{mono} = d\tan\alpha_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

3.26 El dardo con sedante golpea al mono que cae.



Para el dardo, usamos la ecuación (3.21):

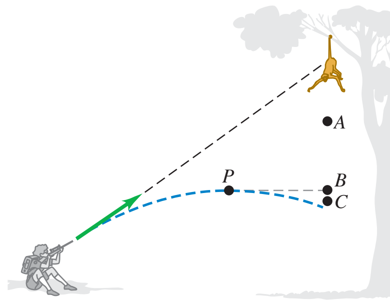
$$y_{\text{dardo}} = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vemos que si $d \tan \alpha_0 = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t$ cuando las dos coordenadas x son iguales, entonces $y_{\text{mono}} = y_{\text{dardo}}$, y el dardo habrá acertado. Para demostrar que esto sucede, sustituimos t por $d/(v_0 \cos \alpha_0)$, el instante en que $x_{\text{mono}} = x_{\text{dardo}}$; así,

$$(v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)t = (v_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\frac{d}{v_0 \cos \alpha_0} = d \tan \alpha_0$$

EVALUAR: Hemos demostrado que, cuando las coordenadas x son iguales, las y también lo son; un dardo dirigido a la posición inicial del mono *siempre* lo golpeará, sin importar v_0. Este resultado también es independiente de g, la aceleración debida a la gravedad. Sin gravedad ($g = 0$), el mono no se movería, y el dardo viajaría en línea recta para golpearlo. Con gravedad, ambos "caen" la misma distancia $\left(\frac{1}{2}gt^2\right)$ por debajo de sus posiciones con $g = 0$ y el dardo de todos modos golpea al mono (figura 3.26).

Evalúe su comprensión de la sección 3.3 En el ejemplo 3.10, suponga que el dardo sedante tiene una velocidad inicial relativamente baja, de modo que el dardo alcanza su altura máxima en un punto P antes de golpear al mono, como se indica en la figura. Cuando el dardo está en P, ¿el mono estará en i) el punto A (más alto que P), ii) en el punto B (a la misma altura que P) o iii) en el punto C (más abajo que P)? Desprecie la resistencia del aire.

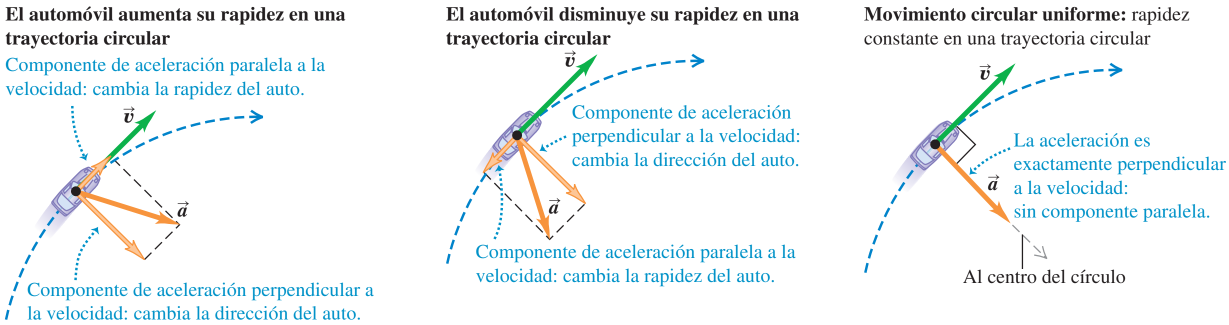


3.4 Movimiento en un círculo

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curva, la dirección de su velocidad cambia. Como vimos en la sección 3.2, esto implica que la partícula *debe* tener una componente de aceleración perpendicular a la trayectoria, incluso si la rapidez es constante (véase la figura 3.11b). En esta sección calcularemos la aceleración para el caso especial importante de movimiento en un círculo.

ActivPhysics Online
4.1 Magnitud de aceleración centrípeta

3.27 Un automóvil con movimiento circular uniforme. La rapidez es constante y la aceleración se dirige hacia el centro de la trayectoria circular.



Movimiento circular uniforme

Cuando una partícula se mueve en un círculo con *rapidez constante*, tiene un **movimiento circular uniforme**. Un automóvil que da vuelta a una curva de radio constante con rapidez constante, un satélite en órbita circular y un patinador que describe un círculo con rapidez constante son ejemplos de este movimiento (figura 3.27; compárela con la figura 3.12). No hay componente de aceleración paralela (tangente) a la trayectoria; si la hubiera, la rapidez cambiaría. El vector de aceleración es perpendicular (normal) a la trayectoria y, por lo tanto, se dirige hacia adentro (¡nunca hacia fuera!) al centro de la trayectoria circular. Esto causa el cambio en la dirección de la velocidad, sin cambiar la rapidez. Nuestro siguiente trabajo consiste en demostrar que la magnitud de la aceleración en el movimiento circular uniforme se relaciona de manera sencilla con la rapidez de la partícula y el radio del círculo.

La figura 3.28a muestra una partícula que se mueve con rapidez constante en una trayectoria circular de radio R con centro en O. La partícula se mueve de P_1 a P_2 en un tiempo Δt. El cambio vectorial en la velocidad $\Delta\vec{v}$ durante este tienpo se muestra en la figura 3.28b.

Los ángulos rotulados $\Delta\phi$ en las figuras 3.28a y 3.28b son iguales porque $\vec{v}_1$ es perpendicular a la línea OP_1 y $\vec{v}_2$ es perpendicular a la línea OP_2. Por lo tanto, los triángulos en las figuras 3.28a y 3.28b son *semejantes*. Los cocientes de lados correspondientes de triángulos semejantes son iguales, así que

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v_1} = \frac{\Delta s}{R} \qquad \text{o} \qquad |\Delta\vec{v}| = \frac{v_1}{R}\Delta s$$

La magnitud a_{med} de la aceleración media durante Δt es entonces

$$a_{\text{med}} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

La magnitud a de la aceleración *instantánea* $\vec{a}$ en el punto P_1 es el límite de esta expresión conforme P_2 se acerca a P_1:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_1}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

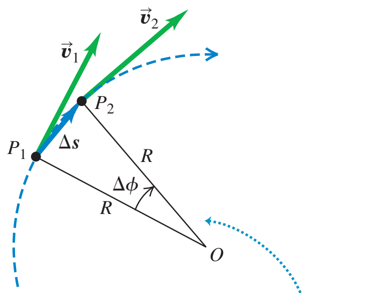
Sin embargo, el límite de $\Delta s/\Delta t$ es la rapidez v_1 en el punto P_1. Además, P_1 puede ser cualquier punto de la trayectoria, así que podemos omitir el subíndice y con v representar la rapidez en cualquier punto. Así,

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \qquad \text{(movimiento circular uniforme)} \qquad (3.28)$$

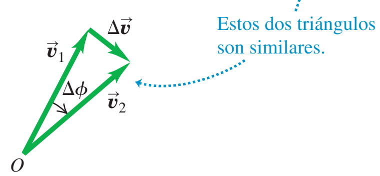
Agregamos el subíndice “rad” para recordar que la dirección de la aceleración instantánea siempre sigue un radio del círculo, hacia su centro. Como la rapidez es constan-

3.28 Determinación del cambio de velocidad $\Delta\vec{v}$, aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$, y aceleración instantánea $\vec{a}_{\text{rad}}$ de una partícula que se mueve en un círculo con rapidez constante.

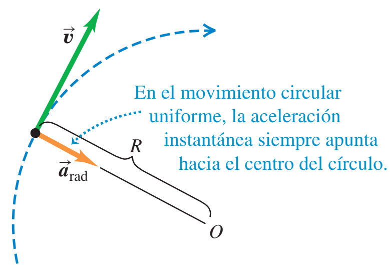
a) Un punto se mueve una distancia Δs a rapidez constante en una trayectoria circular



b) El cambio correspondiente en velocidad y aceleración media



c) La aceleración instantánea



te, la aceleración siempre es perpendicular a la velocidad instantánea. Esto se muestra en la figura 3.28c; compárela con la ilustración derecha de la figura 3.27.

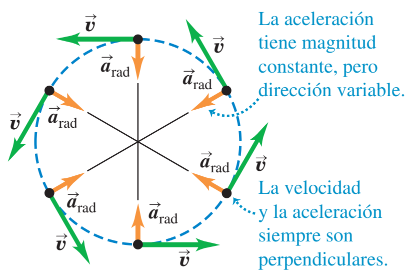
En conclusión, *en el movimiento circular uniforme, la magnitud a de la aceleración instantánea es igual al cuadrado de la velocidad v dividido entre el radio R del círculo; su dirección es perpendicular a* $\vec{v}$ *y hacia adentro sobre el radio*.

Puesto que la aceleración siempre apunta al centro del círculo, en ocasiones se le llama **aceleración centrípeta**. La palabra “centrípeta” significa “que busca el centro” en griego. La figura 3.29a muestra las direcciones de los vectores de velocidad y aceleración en varios puntos para una partícula con movimiento circular uniforme.

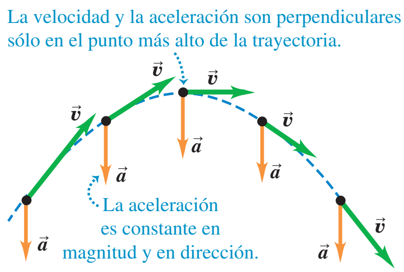
CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra movimiento de proyectiles** La aceleración en el movimiento circular uniforme tiene algunas similitudes con la aceleración en el movimiento de proyectiles que no enfrenta resistencia del aire, pero también existen algunas diferencias importantes entre ambas. Tanto en el movimiento circular uniforme (figura 3.29a) como en el movimiento de proyectiles (figura 3.29b) la *magnitud* de la aceleración siempre es la misma. Sin embargo, en el movimiento circular uniforme la *dirección* de $\vec{a}$ cambia continuamente, de manera que siempre apunta hacia el centro del círculo. (En la parte superior del círculo, la aceleración apunta hacia abajo; en la parte inferior del círculo, la aceleración apunta hacia arriba.) En contraste, en el movimiento de proyectiles la dirección de $\vec{a}$ es la misma en todo momento.

3.29 Aceleración y velocidad a) para una partícula con movimiento circular uniforma y b) para un proyectil sin resistencia del aire.

a) Movimiento circular uniforme



b) Movimiento del proyectil



También podemos expresar la magnitud de la aceleración en un movimiento circular uniforme en términos del **periodo** T del movimiento, el tiempo de una revolución (una vuelta completa al círculo). En un tiempo T, la partícula recorre una distancia igual a la circunferencia $2\pi R$ así que su rapidez es

$$v = \frac{2\pi R}{T} \tag{3.29}$$

Al sustituir esto en la ecuación (3.28), obtenemos la expresión alterna

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{(movimiento circular uniforme)} \tag{3.30}$$

Ejemplo 3.11 Aceleración centrípeta en un camino curvo

Un automóvil deportivo Aston Martin V8 Vantage tiene una “aceleración lateral” de $0.96g$, que es $(0.96)(9.8\ \text{m/s}^2) = 9.4\ \text{m/s}^2$. Ésta es la aceleración centrípeta máxima que puede lograr el auto sin salirse de la trayectoria circular derrapando. Si el auto viaja a 40 m/s (cerca de 89 mi/h o 144 km/h), ¿cuál es el radio mínimo de curva que puede describir? (Suponga que no hay peralte.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Puesto que el coche se mueve en una curva —es decir, un arco de círculo— con rapidez constante, podemos aplicar las ideas del movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Usamos la ecuación (3.28) para obtener la incógnita R (el radio de la curva) en términos de la aceleración centrípeta dada a_{rad} y la rapidez v.

EJECUTAR: Nos dan a_{rad} y v, así que despejamos R de la ecuación (3.28):

$$R = \frac{v^2}{a_{rad}} = \frac{(40\ \text{m/s})^2}{9.4\ \text{m/s}^2} = 170\ \text{m (aprox. 560 ft)}$$

EVALUAR: Nuestro resultado muestra que el radio de giro requerido R es proporcional al *cuadrado* de la rapidez. Por lo tanto, incluso una reducción pequeña en la rapidez puede reducir R considerablemente. Por ejemplo, si v disminuye en un 20% (de 40 a 32 m/s), R disminuirá en un 36% (de 170 m a 109 m).

Otra forma de reducir el radio requerido es *peraltar* la curva. Investigaremos esta opción en el capítulo 5.

Ejemplo 3.12 Aceleración centrípeta en un juego mecánico

En un juego mecánico, los pasajeros viajan con rapidez constante en un círculo de 5.0 m de radio, dando una vuelta completa cada 4.0 s. ¿Qué aceleración tienen?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La rapidez es constante, así que es un problema de movimiento circular uniforme.

PLANTEAR: Nos dan el radio $R = 5.0$ m y el periodo $T = 4.0$ s, así que podemos usar la ecuación (3.30) para calcular la aceleración. Como alternativa, podríamos calcular primero la rapidez v con la ecuación (3.29) y luego obtener la aceleración con la ecuación (3.28).

EJECUTAR: Por la ecuación (3.30),

$$a_{rad} = \frac{4\pi^2(5.0\text{ m})}{(4.0\text{ s})^2} = 12\text{ m/s}^2$$

Verificaremos esta respuesta usando la ecuación (3.28) después de calcular la rapidez v. Por la ecuación (3.29), la rapidez es la circunferencia dividida entre el periodo T:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(5.0\text{ m})}{4.0\text{ s}} = 7.9\text{ m/s}$$

La aceleración centrípeta es, entonces,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} = \frac{(7.9\text{ m/s})^2}{5.0\text{ m}} = 12\text{ m/s}^2$$

Obtenemos el mismo valor de a_{rad} con ambas estrategias.

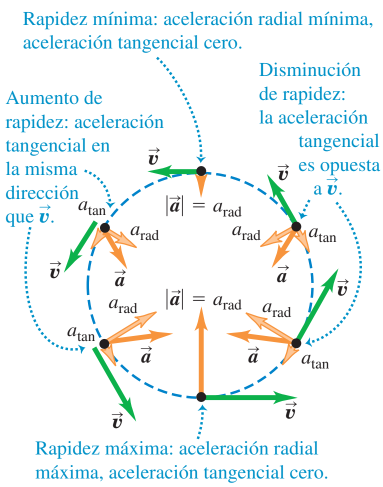
EVALUAR: Al igual que en el ejemplo anterior, la dirección de $\vec{a}$ siempre es hacia el centro del círculo. La magnitud de $\vec{a}$ es mayor que g, la aceleración debida a la gravedad, así que este juego mecánico sólo es para los audaces. (Algunas montañas rusas someten a sus pasajeros a aceleraciones de hasta $4g$.)

Movimiento circular no uniforme

En esta sección, hemos supuesto que la rapidez de la partícula es constante. Si la rapidez varía, tenemos un **movimiento circular no uniforme**. Un ejemplo es un carro de montaña rusa que frena y se acelera al moverse en un lazo vertical. En el movimiento circular no uniforme, la ecuación (3.28) nos sigue dando la componente *radial* de la aceleración $a_{rad} = v^2/R$, que siempre es *perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo. Sin embargo, dado que la rapidez v tiene diferentes valores en diferentes puntos del movimiento, a_{rad} no es constante. La aceleración radial (centrípeta) es mayor donde la rapidez es mayor.

En el movimiento circular no uniforme también hay una componente de aceleración *paralela* a la velocidad instantánea. Ésta es la componente $a_{\parallel}$ que vimos en la sección 3.2, y aquí la llamamos a_{tan} para destacar que es *tangente* al círculo. Por lo dicho al final de la sección 3.2, sabemos que la componente de aceleración tangencial a_{tan} es igual a la tasa de cambio de la *rapidez*. Entonces,

$$a_{rad} = \frac{v^2}{R} \quad \text{y} \quad a_{tan} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{(movimiento circular no uniforme)} \tag{3.31}$$



3.30 Partícula que se mueve en un lazo vertical, como un carrito de montaña rusa, con rapidez variable.

El vector de aceleración de una partícula que se mueve con rapidez variable en un círculo es la suma vectorial de las componentes de aceleración radial y tangencial. Esta última tiene la dirección de la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando (figura 3.30).

En el movimiento circular *uniforme*, la aceleración no tiene componente tangencial; no obstante, la componente radial es la magnitud de $d\vec{v}/dt$.

CUIDADO **Movimiento circular uniforme contra no uniforme** Observe que las dos cantidades

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{y} \quad \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right|$$

no son iguales. La primera, al igual que la aceleración tangencial, es la tasa de cambio de la rapidez; es igual a cero siempre que una partícula se mueve con rapidez constante, incluso cuando cambia la dirección de su movimiento (como en el movimiento circular *uniforme*). La segunda es la magnitud de la aceleración vectorial; es igual a cero cuando el vector de *aceleración* de la partícula es cero, es decir, cuando la partícula se mueve en línea recta con rapidez constante. En el movimiento circular *uniforme* $|d\vec{v}/dt| = a_{rad} = v^2/r$; en el movimiento circular *no uniforme* también existe una componente tangencial de la aceleración, de manera que $|d\vec{v}/dt| = \sqrt{a_{rad}^2 + a_{tan}^2}$.

Evalúe su comprensión de la sección 3.4 Suponga que, en la parte inferior del lazo, la partícula de la figura 3.30 experimenta una aceleración cuatro veces mayor que en la parte superior del mismo. En comparación con la parte superior del lazo, la rapidez de la partícula en la parte inferior es i) $\sqrt{2}$ veces mayor; ii) 2 veces mayor; iii) $2\sqrt{2}$ veces mayor; iv) 4 veces mayor; o v) 16 veces mayor.

3.5 Velocidad relativa

Sin duda usted ha observado que un automóvil que avanza lentamente parece moverse hacia atrás cuando usted lo rebasa. En general, si dos observadores miden la velocidad de un cuerpo, obtienen diferentes resultados si un observador se mueve en relación con el otro. La velocidad que un observador dado percibe es la velocidad *relativa* a él, o simplemente **velocidad relativa**. La figura 3.31 muestra una situación en la que se entiende que la velocidad relativa es muy importante.

Primero consideraremos la velocidad relativa en línea recta, y luego la generalizaremos a un plano.

3.31 Los pilotos de acrobacias aéreas enfrentan un complicado problema de velocidades relativas. Deben estar pendientes de su movimiento relativo al aire (para mantener un flujo de aire sobre las alas suficiente para la sustentación), su movimiento relativo a los otros aviones (para mantener una formación cerrada sin chocar) y su movimiento relativo al público (para que los espectadores no los pierdan de vista).

Velocidad relativa en una dimensión

Una mujer camina con una velocidad de 1.0 m/s por el pasillo de un vagón de ferrocarril que se mueve a 3.0 m/s (figura 3.32a). ¿Qué velocidad tiene la mujer? Es una pregunta sencilla, pero no tiene una sola respuesta. Para un pasajero sentado en el tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s. Para un ciclista parado junto al tren, la mujer se mueve a 1.0 m/s + 3.0 m/s = 4.0 m/s. Un observador en otro tren que va en la dirección opuesta daría otra respuesta. Debemos especificar quién es el observador y dar la velocidad *relativa* a él. La velocidad de la mujer relativa al tren es 1.0 m/s, relativa al ciclista es 4.0 m/s, etcétera. Cada observador, equipado en principio con un metro y un cronómetro, constituye lo que llamamos un **marco de referencia**. Así, un marco de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo.

Llamemos A al marco de referencia del ciclista (en reposo con respecto al suelo) y B al marco de referencia del tren en movimiento. En el movimiento rectilíneo, la posición de un punto P relativa al marco de referencia A está dada por $x_{P/A}$ (la posición de P con respecto a A), y la posición de P con respecto al marco B está dada por $x_{P/B}$ (véase la figura 3.32b). La distancia del origen de A al origen de B es $x_{B/A}$. La figura 3.32b muestra que

$$x_{P/A} = x_{P/B} + x_{B/A} \tag{3.32}$$

Esto nos dice que la distancia total del origen de A al punto P es la distancia del origen de B al punto P más la distancia del origen de A al origen de B.

La velocidad de P relativa al marco A, denotada con $v_{P/A\text{-}x}$, es la derivada de $x_{P/A}$ con respecto al tiempo. Las otras velocidades se obtienen de igual manera, así que la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.32) nos da la relación entre las velocidades:

$$\frac{dx_{P/A}}{dt} = \frac{dx_{P/B}}{dt} + \frac{dx_{B/A}}{dt} \qquad \text{o}$$

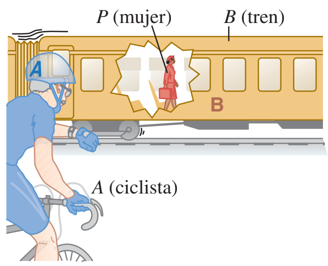
$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \quad \text{(velocidad relativa en una línea)} \tag{3.33}$$

Volviendo a la mujer en el tren de la figura 3.32, vemos que A es el marco de referencia del ciclista, B es el marco de referencia del tren, y el punto P representa a la mujer. Usando la notación anterior, tenemos

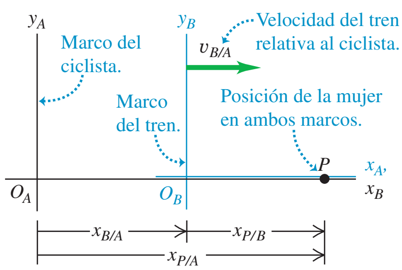
$$v_{P/B\text{-}x} = +1.0 \text{ m/s} \qquad v_{B/A\text{-}x} = +3.0 \text{ m/s}$$

3.32 a) Una mujer camina dentro de un tren. b) La posición de la mujer (partícula P) relativa al marco de referencia del ciclista y al marco de referencia del tren.

a)



b)



Por la ecuación (3.33), la velocidad $v_{P/A}$ de la mujer relativa al ciclista es

$$v_{P/A\text{-}x} = +1.0\ \text{m/s} + 3.0\ \text{m/s} = +4.0\ \text{m/s}$$

lo cual ya sabíamos.

En este ejemplo, ambas velocidades son a la derecha, e implícitamente tomamos esta dirección como positiva. Si la mujer camina a la *izquierda* relativa al tren, entonces, $v_{P/B\text{-}x} = -1.0$ m/s, y su velocidad relativa al ciclista es $v_{P/A\text{-}x} = -1.0$ m/s $+ 3.0$ m/s $= +2.0$ m/s. La suma de la ecuación (3.33) siempre es algebraica, y cualquiera o todas las velocidades pueden ser negativas.

Si la mujer se asoma por la ventana, le parecerá que el ciclista estacionario se mueve hacia atrás; llamamos $v_{A/P\text{-}x}$ a la velocidad del ciclista relativa a ella. Es evidente que ésta es el negativo de $v_{P/A\text{-}x}$. En general, si A y B son dos puntos o marcos de referencia cualesquiera,

$$v_{A/B\text{-}x} = -v_{B/A\text{-}x} \qquad (3.34)$$

Estrategia para resolver problemas 3.2 Velocidad relativa

MP

IDENTIFICAR *los conceptos importantes:* Siempre que lea la frase "velocidad relativa a" o "velocidad con respecto a", seguramente le resultarán útiles los conceptos de velocidad relativa.

PLANTEAR *el problema:* Rotule todos los marcos de referencia del problema. Cada cuerpo en movimiento tiene su propio marco de referencia; además, casi siempre será preciso incluir el marco de referencia de la superficie terrestre. (Frases como "el automóvil viaja al norte a 90 km/h" se refieren implícitamente a la velocidad del auto relativa a la superficie terrestre.) Use los rótulos para identificar la incógnita. Por ejemplo, si quiere obtener la velocidad de un auto (C) con respecto a un autobús (B), ésta es $v_{C/B\text{-}x}$.

EJECUTAR *la solución:* Despeje la incógnita empleando la ecuación (3.33). (Si las velocidades no tienen la misma dirección, será preciso usar la forma vectorial de esta ecuación, que deduciremos más adelante en esta misma sección.) Es importante observar el orden de los dobles subíndices en la ecuación (3.33): $v_{A/B\text{-}x}$ siempre significa "velocidad de A relativa a B". Estos subíndices obedecen un tipo interesante de álgebra, como muestra la ecuación (3.33). Si los consideramos cada uno como una fracción, la fracción del miembro izquierdo es el *producto* de las fracciones del miembro derecho: $P/A = (P/B)(B/A)$. Puede usar esta útil regla al aplicar la ecuación (3.33) a cualquier cantidad de marcos de referencia. Por ejemplo, si hay tres marcos de referencia distintos A, B y C, podemos escribir de inmediato

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/C\text{-}x} + v_{C/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x}$$

EVALUAR *la respuesta:* Esté pendiente de los signos menos en su respuesta. Si la incógnita es la velocidad de un automóvil relativa a un autobús ($v_{C/B\text{-}x}$), asegúrese de no haber calculado por equivocación la velocidad del *autobús* relativa al *automóvil* ($v_{B/C\text{-}x}$). Si cometió este error, la ecuación (3.34) le dará la respuesta correcta.

Ejemplo 3.13 Velocidad relativa en un camino recto

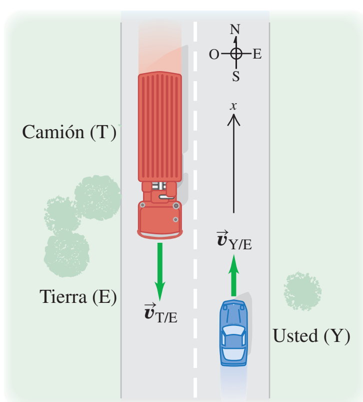
Imagine que viaja al norte en un camino recto de dos carriles a 88 km/h constantes. Un camión que viaja a 104 km/h constantes se acerca a usted (en el otro carril, por fortuna). *a)* ¿Qué velocidad tiene el camión relativa a usted? *b)* ¿Y la de usted relativa al camión? *c)* ¿Cómo cambian las velocidades relativas una vez que los dos vehículos se han pasado?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este ejemplo es sobre velocidades relativas en una recta.

PLANTEAR: Sea usted Y, el camión T y la superficie de la Tierra E, y sea el norte la dirección positiva (figura 3.33). Entonces, su velocidad relativa a la Tierra es $v_{Y/E\text{-}x} = +88$ km/h. En un principio, el camión se acerca a usted, así que debe ir hacia el sur, es decir, que su velocidad relativa a la Tierra es $v_{T/E\text{-}x} = -104$ km/h. La incógnita del inciso *a)* es $v_{T/Y\text{-}x}$; la incónita del inciso *b)* es $v_{Y/T\text{-}x}$. Obtendremos ambas respuestas utilizando la ecuación (3.33) para velocidad relativa.

3.33 Marcos de referencia para usted y el camión.



EJECUTAR: *a*) Para obtener $v_{Y/T\text{-}x}$, primero escribimos la ecuación (3.33) para los tres marcos, Y, T y E, y luego reacomodamos:

$$v_{T/E\text{-}x} = v_{T/Y\text{-}x} + v_{Y/E\text{-}x}$$
$$v_{T/Y\text{-}x} = v_{T/E\text{-}x} - v_{Y/E\text{-}x}$$
$$= -104 \text{ km/h} - 88 \text{ km/h} = -192 \text{ km/h}$$

El camión se mueve a 192 km/h en la dirección negativa (al sur) relativo a usted.

b) Por la ecuación (3.34),

$$v_{Y/T\text{-}x} = -v_{T/Y\text{-}x} = -(-192 \text{ km/h}) = +192 \text{ km/h}$$

Usted se mueve a 192 km/h en la dirección positiva (al norte) relativo al camión.

c) Las velocidades relativas *no* cambian después de que los vehículos se pasan. Las posiciones relativas de los cuerpos no importan. La velocidad del camión relativa a usted sigue siendo 192 km/h, pero ahora se aleja en vez de acercarse.

EVALUAR: Para comprobar su respuesta del inciso *b*), use la ecuación (3.33) directamente en la forma $v_{Y/T\text{-}x} = v_{Y/E\text{-}x} + v_{E/T\text{-}x}$. (Recuerde que la velocidad de la Tierra relativa al camión es opuesta a la velocidad del camión con respecto a la Tierra: $v_{E/T\text{-}x} = -v_{T/E\text{-}x}$.) ¿Obtiene el mismo resultado?

Velocidad relativa en dos o tres dimensiones

Podemos extender el concepto de velocidad relativa al movimiento en un plano o en el espacio, usando suma vectorial para combinar velocidades. Suponga que la mujer de la figura 3.32a camina no por el pasillo del vagón sino de un costado al otro, con rapidez de 1.0 m/s (figura 3.34a). También podemos describir su posición *P* en dos marcos de referencia distintos: *A* para el observador terrestre estacionario y *B* para el tren en movimiento; pero en vez de coordenadas *x* usamos vectores de posición [&*lcacc*{~bfit~r~normal~}{|Ararr|}&] porque el problema es bidimensional. Entonces, como muestra la figura 3.34b,

$$\vec{r}_{P/A} = \vec{r}_{P/B} + \vec{r}_{B/A} \qquad (3.35)$$

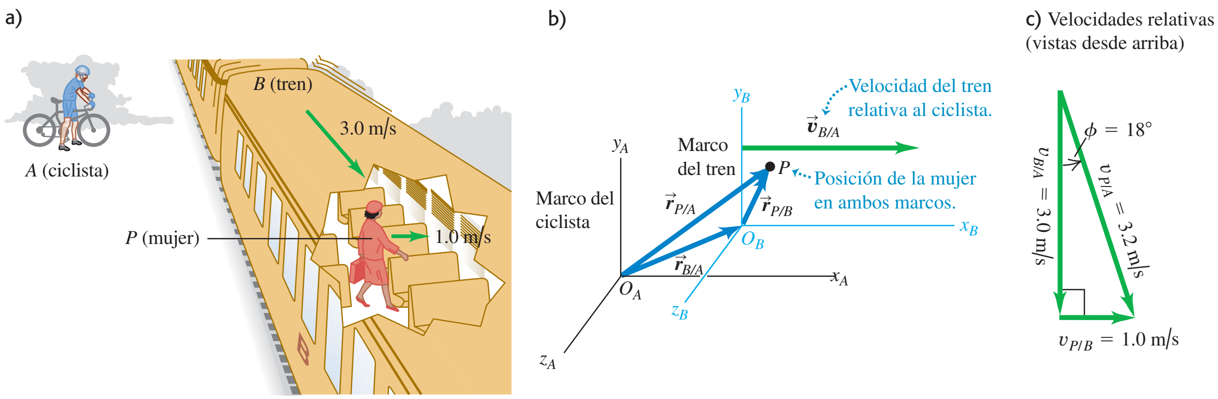
Igual que antes, derivamos con respecto al tiempo para obtener una relación entre las velocidades; la velocidad de *P* relativa a *A* es $\vec{v}_{P/A} = d\vec{r}_{P/A}/dt$, e igual para las demás velocidades. Obtenemos

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \qquad \text{(velocidad relativa en el espacio)} \qquad (3.36)$$

La ecuación (3.36) se conoce como *transformción galileana de la velocidad* y muestra que la velocidad de un cuerpo *P* con respecto al marco *A* y su velocidad con respecto al marco *B* ($\vec{v}_{P/A}$ y $\vec{v}_{P/B}$, respectivamente) están relacionadas con la velocidad del marco *B* con respecto al marco *A* $(\vec{v}_{B/A})$. Si las tres velocidades están en la misma línea, la ecuación (3.36) se reduce a la ecuación (3.33) para las componentes de las velocidades en esa línea.

Si la velocidad del tren relativa al suelo tiene magnitud $v_{B/A} = 3.0$ m/s y la velocidad de la mujer relativa al vagón tiene magnitud $v_{P/B} = 1.0$ m/s, su vector de velocidad

3.34 a) Mujer que camina a lo ancho de un vagón de ferrocarril. b) Posición de la mujer relativa al marco de referencia del ciclista y al marco del tren. c) Diagrama vectorial para la velocidad de la mujer relativa al suelo (el marco del ciclista), $\vec{v}_{P/A}$.



$\vec{v}_{P/A}$ relativo al suelo es como se muestra en la figura 3.34c. El teorema de Pitágoras nos da

$$v_{P/A} = \sqrt{(3.0\ \mathrm{m/s})^2 + (1.0\ \mathrm{m/s})^2} = \sqrt{10\ \mathrm{m^2/s^2}} = 3.2\ \mathrm{m/s}$$

La figura 3.34c también indica que la *dirección* del vector de velocidad de la mujer relativo al suelo forma un ángulo ϕ con el vector de velocidad del tren $\vec{v}_{B/A}$, donde

$$\tan\phi = \frac{v_{P/B}}{v_{B/A}} = \frac{1.0\ \mathrm{m/s}}{3.0\ \mathrm{m/s}} \qquad \text{y} \qquad \phi = 18°$$

Como en el caso del movimiento rectilíneo, tenemos la regla general de que si A y B son dos puntos o marcos de referencia *cualesquiera,*

$$\vec{v}_{A/B} = -\vec{v}_{B/A} \tag{3.37}$$

La velocidad de la mujer con respecto al tren es el negativo de la velocidad del tren con respecto a la mujer, etcétera.

A principios del siglo XX, en su teoría especial de la relatividad Albert Einstein demostró que la relación de suma de velocidades dada en la ecuación (3.36) se modifica cuando la rapidez se aproxima a la rapidez de la luz, que se denota con c. Resultó que si la mujer de la figura 3.32a pudiera caminar por el pasillo a $0.30c$ y el tren pudiera viajar a $0.90c$, entonces la rapidez de la mujer relativa al suelo no sería de $1.20c$ sino de $0.94c$. ¡Nada puede viajar más rápido que la luz! Regresaremos a la teoría especial de la relatividad en el capítulo 37.

Ejemplo 3.14 Vuelo con viento cruzado

La brújula de un avión indica que va al norte, y su velocímetro indica que vuela a 240 km/h. Si hay un viento de 100 km/h de oeste a este, ¿cuál es la velocidad del avión relativa a la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se trata de un problema de velocidad en dos dimensiones (hacia el norte y hacia el este), así que tenemos un problema de velocidad relativa usando vectores.

PLANTEAR: Nos dan la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa al aire (A), así como la magnitud y dirección de la velocidad del viento, que es la velocidad del aire (A) con respecto a la Tierra (E):

$$\vec{v}_{\mathrm{P/A}} = 240\ \mathrm{km/h} \qquad \text{al norte}$$
$$\vec{v}_{\mathrm{A/E}} = 100\ \mathrm{km/h} \qquad \text{al este}$$

Nuestras incógnitas son la magnitud y dirección de la velocidad del avión (P) relativa a la Tierra (E), $\vec{v}_{\mathrm{P/E}}$. Así, que las calcularemos usando la ecuación (3.36).

EJECUTAR: Usando la ecuación (3.36), tenemos

$$\vec{v}_{\mathrm{P/E}} = \vec{v}_{\mathrm{P/A}} + \vec{v}_{\mathrm{A/E}}$$

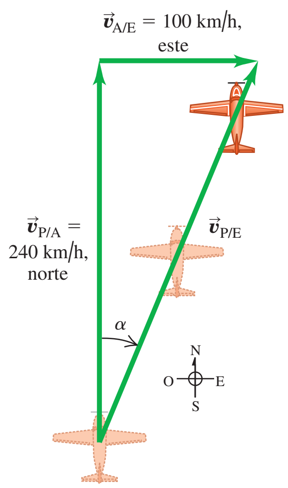
Las tres velocidades relativas y su relación se muestran en la figura 3.35; las incógnitas son la rapidez $v_{\mathrm{P/E}}$ y el ángulo α. Del diagrama obtenemos

$$v_{\mathrm{P/E}} = \sqrt{(240\ \mathrm{km/h})^2 + (100\ \mathrm{km/h})^2} = 260\ \mathrm{km/h}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{100\ \mathrm{km/h}}{240\ \mathrm{km/h}}\right) = 23°\ \text{E del N}$$

EVALUAR: El viento lateral aumenta la rapidez del avión relativa al suelo, pero al precio de desviarlo de su curso.

3.35 El avión apunta al norte, pero el viento sopla al este, dando la velocidad resultante $\vec{v}_{\mathrm{P/E}}$ relativa a la Tierra.



Ejemplo 3.15 Corrección por viento cruzado

En el ejemplo 3.14, ¿qué rumbo debería tomar el piloto para viajar al norte? ¿Cuál será su velocidad relativa a la tierra? (Suponga que su rapidez con respecto al aire y la velocidad del viento son las del ejemplo 3.14.)

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Al igual que en el ejemplo 3.14, éste es un problema de velocidad relativa con vectores.

PLANTEAR: La figura 3.36 ilustra la situación. Ahí, los vectores se acomodaron según la ecuación vectorial de velocidad relativa, ecuación (3.36):

$$\vec{v}_{P/E} = \vec{v}_{P/A} + \vec{v}_{A/E}$$

Como muestra la figura 3.36, el piloto apunta la nariz del avión con un ángulo β hacia el viento para compensar su efecto. Este ángulo, que nos da la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ (la velocidad del avión relativa al aire), es una de nuestras incógnitas. La otra es la rapidez del avión sobre el suelo, que es la magnitud del vector $\vec{v}_{P/E}$ (la velocidad del avión relativa a la Tierra). Veamos las cantidades que conocemos y las que desconocemos:

$\vec{v}_{P/E}$ = magnitud desconocida	al norte
$\vec{v}_{P/A}$ = 240 km/h	dirección desconocida
$\vec{v}_{A/E}$ = 100 km/h	al este

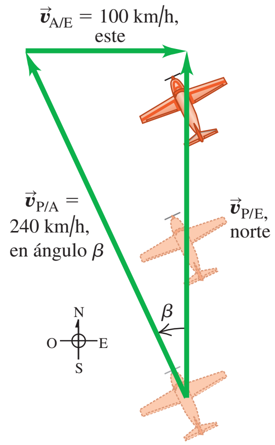
Podemos calcular las incógnitas empleando la figura 3.36 y trigonometría.

EJECUTAR: Por el diagrama, la rapidez $v_{P/E}$ y el ángulo β están dados por

$$v_{P/E} = \sqrt{(240\text{ km/h})^2 - (100\text{ km/h})^2} = 218\text{ km/h}^2$$

$$\beta = \text{arcsen}\left(\frac{100\text{ km/h}}{240\text{ km/h}}\right) = 25°$$

3.36 El piloto debe apuntar el avión en la dirección del vector $\vec{v}_{P/A}$ para viajar al norte relativo a la Tierra.



El piloto debería dirigirse 25° al oeste del norte, y su rapidez con respecto al suelo será entonces de 218 km/h.

EVALUAR: Observe que había dos incógnitas —la magnitud de un vector y la dirección de un vector— tanto en este ejemplo como en el ejemplo 3.14. La diferencia es que, en el ejemplo 3.14, la magnitud y dirección se referían al *mismo* vector ($\vec{v}_{P/E}$), mientras que en este ejemplo se refieren a vectores *distintos* ($\vec{v}_{P/E}$ y $\vec{v}_{P/A}$).

No es sorpresa que un viento de frente reduzca la rapidez de un avión relativa al suelo. Lo que este ejemplo demuestra es que un *viento cruzado* también frena los aviones: es una triste realidad de la industria aeronáutica.

Evalúe su comprensión de la sección 3.5 Suponga que la nariz del avión se apunta al este y que el avión tiene una velocidad de vuelo de 150 km/h. Debido al viento, el avión se mueve al *norte* relativo al suelo y su rapidez relativa al suelo es de 150 km/h. ¿Cuál es la velocidad del aire relativa a la Tierra? i) 150 km/h de este a oeste; ii) 150 km/h de sur a norte; iii) 150 km/h de sureste a noroeste; iv) 212 km/h de este a oeste; v) 212 km/h de sur a norte; vi) 212 km/h de sureste a noroeste; vii) no hay velocidad del aire posible que cause esto.

CAPÍTULO 3 RESUMEN

Vectores de posición, velocidad y aceleración: El vector de posición $\vec{r}$ de un punto P en el espacio es el vector del origen a P. Sus componentes son las coordenadas x, y y z.

El vector de velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante el intervalo Δt es el desplazamiento $\Delta\vec{r}$ (el cambio del vector de posición $\vec{r}$) dividido entre Δt. El vector de velocidad instantánea $\vec{v}$ es la derivada de $\vec{r}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de x, y y z con respecto al tiempo. La rapidez instantánea es la magnitud de $\vec{v}$. La velocidad $\vec{v}$ de una partícula siempre es tangente a la trayectoria de la partícula. (Véase el ejemplo 3.1.)

El vector de aceleración media $\vec{a}_{\text{med}}$ durante el intervalo de tiempo Δt es igual a $\Delta\vec{v}$ (el cambio en el vector de velocidad $\vec{v}$) dividido entre Δt. El vector de aceleración instantánea $\vec{a}$ es la derivada de $\vec{v}$, con respecto al tiempo, y sus componentes son las derivadas de v_x, v_y y v_z con respecto al tiempo. (Véase el ejemplo 3.2.)

La componente de aceleración paralela a la dirección de la velocidad instantánea afecta la rapidez; en tanto que la componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afecta la dirección del movimiento. (Véanse los ejemplos 3.3 y 3.4.)

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{3.1}$$

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3.2}$$

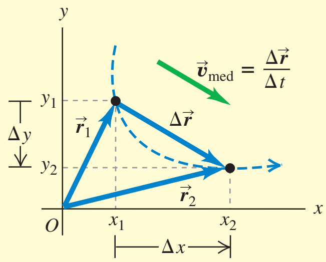
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{3.3}$$

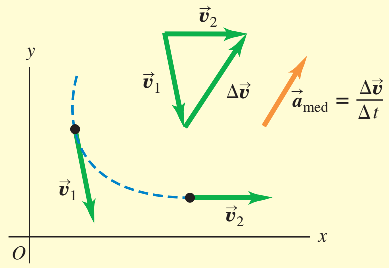
$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{3.4}$$

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \tag{3.8}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{3.9}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} \tag{3.10}$$





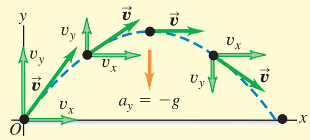
Movimiento de proyectiles: En el movimiento de proyectiles sin resistencia del aire, $a_x = 0$ y $a_y = -g$. Las coordenadas y componentes de la velocidad son funciones sencillas del tiempo, y la forma de la trayectoria siempre es una parábola. Por convención, colocamos el origen en la posición inicial del proyectil. (Véanse los ejemplos 3.5 a 3.10.)

$$x = (v_0\cos\alpha_0)t \tag{3.20}$$

$$y = (v_0\operatorname{sen}\alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3.21}$$

$$v_x = v_0\cos\alpha_0 \tag{3.22}$$

$$v_y = v_0\operatorname{sen}\alpha_0 - gt \tag{3.23}$$

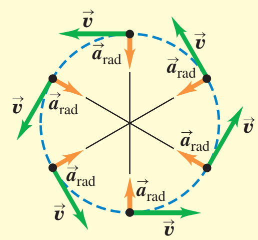


Movimiento circular uniforme y no uniforme: Cuando una partícula se mueve en una trayectoria circular de radio R con rapidez constante v (movimiento circular uniforme), su aceleración $\vec{a}$ está dirigida hacia el centro del círculo y es perpendicular a $\vec{v}$. La magnitud a_{rad} de la aceleración se puede expresar en términos de v y R, o en términos de R y el periodo T (el tiempo que tarda en dar una vuelta), donde $v = 2\pi R/T$. (Véanse los ejemplos 3.11 y 3.12.)

Aunque la rapidez en un movimiento circular no sea constante (movimiento circular no uniforme), habrá una componente radial de $\vec{a}$ dada por la ecuación (3.28) o la ecuación (3.30), pero también habrá una componente de $\vec{a}$ paralela (tangencial) a la trayectoria; esta componente tangencial es igual a la tasa de cambio de la rapidez, dv/dt.

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{R} \tag{3.28}$$

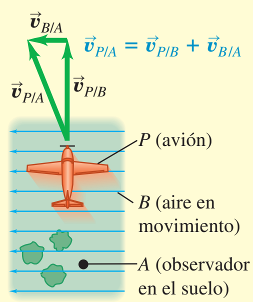
$$a_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{3.30}$$



Velocidad relativa: Cuando un cuerpo P se mueve relativo a un cuerpo (o marco de referencia) B, y B se mueve relativo a A, denotamos la velocidad de P relativa a B con $\vec{v}_{P/B}$, la velocidad de P relativa a A con $\vec{v}_{P/A}$, y la velocidad de B relativa a A con $\vec{v}_{B/A}$. Si todas estas velocidades están en la misma línea, sus componentes sobre la línea están relacionadas por la ecuación (3.33). De forma más general, estas velocidades están relacionadas por la ecuación (3.36). (Véanse los ejemplos 3.13 a 3.15.)

$$v_{P/A\text{-}x} = v_{P/B\text{-}x} + v_{B/A\text{-}x} \tag{3.33}$$
(velocidad relativa en una línea)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \tag{3.36}$$
(velocidad relativa en el espacio)



Términos clave

vector de posición, *72*
velocidad media, *72*
aceleración instantánea, *72*
aceleración media, *75*
velocidad instantánea, *75*
proyectil, *79*
trayectoria, *79*
movimiento circular uniforme, *88*
aceleración centrípeta, *89*
periodo, *89*
movimiento circular no uniforme, *90*
velocidad relativa, *91*
marco de referencia, *91*

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

Un automóvil que va por una curva a rapidez constante tiene una aceleración dirigida hacia el interior de la curva (véase la sección 3.2, en especial la figura 3.12a).

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

3.1 Respuesta: iii) Si la velocidad instantánea $\vec{v}$ es constante durante un intervalo, su valor en cualquier punto (incluyendo el final del intervalo) es igual a la velocidad media $\vec{v}_{\text{med}}$ durante el intervalo. En i) y ii) la dirección de $\vec{v}$ al final del intervalo es tangente a la trayectoria en ese punto; mientras que la dirección de $\vec{v}_{\text{med}}$ apunta desde el inicio de la trayectoria hasta el final (en la dirección del desplazamiento neto). En iv) $\vec{v}$ y $\vec{v}_{\text{med}}$ se encuentran a lo largo de la línea recta, aunque $\vec{v}$ tiene una magnitud mayor porque la rapidez ha ido en aumento.

3.2 Respuesta: vector 7 En el punto más alto de la trayectoria del trineo, la rapidez es mínima. En ese punto, la rapidez no aumenta ni disminuye, y la componente paralela de la aceleración (es decir, la componente horizontal) es cero. La aceleración sólo tiene una componente perpendicular hacia el interior de la trayectoria curva del trineo. Dicho de otro modo, la aceleración es hacia abajo.

3.3 Respuesta: i) Si no hubiera gravedad ($g = 0$), el mono no caería y el dardo seguiría una trayectoria recta (que se indica como línea discontinua). El efecto de la gravedad es hacer que tanto el mono como el dardo caigan la misma distancia $\frac{1}{2}gt^2$ abajo de sus posiciones con $g = 0$. El punto A está a la misma distancia abajo de la posición inicial del mono de la que el punto P está abajo de la recta discontinua, así que el punto A es donde encontraríamos al mono en el instante en cuestión.

3.4 Respuesta: ii) Tanto en la parte alta como en la baja del lazo, la aceleración es puramente radial y está dada por la ecuación (3.28). El radio R es el mismo en ambos puntos, así que la diferencia de aceleración se debe exclusivamente a diferencias de rapidez. Puesto que a_{rad} es proporcional al cuadrado de v, la rapidez deberá ser dos vece mayor en la parte baja del lazo que en su parte alta.

3.5 Respuesta: vi) El efecto del viento es anular el movimiento hacia el este del avión e imprimirle un movimiento hacia el norte. Así que la velocidad del aire en relación con el suelo (la velocidad del viento) debe tener una componente de 150 km/h hacia el oeste y una componente de 150 km/h hacia el norte. La combinación de ambas es un vector con magnitud $\sqrt{(150\text{ km/h})^2 + (150\text{ km/h})^2} = 212\text{ km/h}$ que apunta hacia el noroeste.

PROBLEMAS

Para la tarea asignada por el profesor, visite **www.masteringphysics.com**

Preguntas para análisis

P3.1. Un péndulo simple (una masa que oscila en el extremo de un cordel) oscila en un arco circular. ¿Qué dirección tiene su aceleración en los extremos del arco? ¿Y en el punto medio? En cada caso, explique cómo obtuvo su respuesta.

P3.2. Vuelva a dibujar la figura 3.11a como si $\vec{a}$ fuera antiparalela a $\vec{v}_1$. ¿La partícula se mueve en línea recta? ¿Qué pasa con la rapidez?

P3.3. Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay un punto donde $\vec{a}$ sea paralela a $\vec{v}$? ¿Y perpendicular a $\vec{v}$? Explique su respuesta.

P3.4. Cuando se dispara un rifle a un blanco lejano, el cañón no se apunta exactamente al blanco. ¿Por qué? ¿El ángulo de corrección depende de la distancia al blanco?

P3.5. En el instante que usted dispara una bala horizontalmente de una arma, suelta una bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo? Explique su respuesta.

P3.6. Un paquete se deja caer desde un avión que vuela en línea recta con altitud y rapidez constantes. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿qué trayectoria del paquete observaría el piloto? ¿Y una persona situada en el suelo?

P3.7. Dibuje las seis gráficas de las componentes x y y de posición, velocidad y aceleración contra el tiempo, para un movimiento de proyectil con $x_0 = y_0 = 0$ y $0 < \alpha_0 < 90°$.

P3.8. Se lanza un objeto directo hacia arriba sin que sufra resistencia del aire. ¿Cómo es posible que el objeto tenga aceleración cuando se detiene al llegar a su punto más alto?

P3.9. Si una rana puede saltar con la misma rapidez inicial sin importar la dirección (hacia adelante o hacia arriba), ¿qué relación hay entre la altura vertical máxima y el alcance horizontal máximo de su salto, $R_{\text{máx}} = v_0^2/g$?

P3.10. Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. Al llegar a su máxima altura, ¿cuáles son su vector de velocidad, su rapidez y su vector de aceleración?

P3.11. En el movimiento circular uniforme, ¿cuáles son la velocidad *media* y la aceleración *media* durante una revolución? Explique su respuesta.

P3.12. En el movimiento circular uniforme, ¿cómo cambia la aceleración cuando la rapidez aumenta al triple? ¿Y cuando el radio se reduce a la mitad?

P3.13. En el movimiento circular uniforme, la aceleración es perpendicular a la velocidad en todo instante. ¿Sigue siendo válido esto cuando el movimiento no es uniforme, es decir, cuando la rapidez no es constante?

P3.14. Incluso sin viento, las gotas de lluvia suelen dejar rayas diagonales en las ventanas laterales de un automóvil en movimiento. ¿Por qué? ¿Es la misma explicación para las rayas diagonales en el parabrisas?

P3.15. En una tormenta con viento fuerte, ¿qué determina la orientación óptima de un paraguas?

P3.16. Imagine que está en la ribera oeste de un río que fluye al norte a 1.2 m/s. Usted nada con rapidez de 1.5 m/s relativa al agua, y el río tiene 60 m de ancho. ¿Qué trayectoria relativa a tierra le permitirá cruzar el río en el menor tiempo? Explique su razonamiento.

P3.17. Cuando usted deja caer un objeto desde cierta altura, éste tarda un tiempo T en llegar al piso si no hay resistencia del aire. Si usted lo dejara caer desde una altura tres veces mayor, ¿cuánto tiempo tardaría el objeto (en términos de T) en llegar al suelo?

P3.18. Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se desprecia la resistencia del aire. ¿Cuál de las gráficas en la figura 3.37 describe mejor la *rapidez* v de la piedra en función del tiempo t mientras está en el aire?

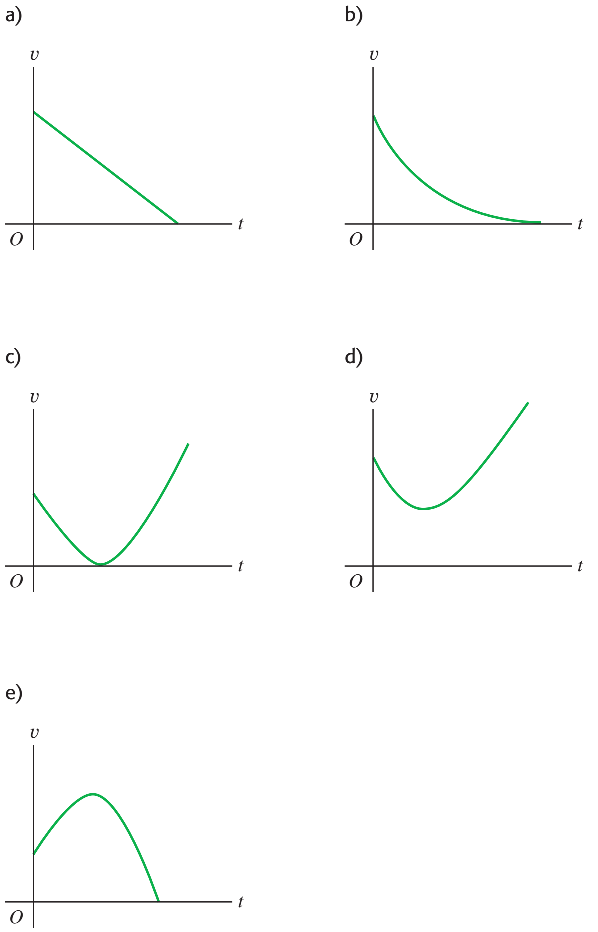


Figura 3.37 Pregunta P3.18.

Ejercicios

Sección 3.1 Vectores de posición y velocidad

3.1. Una ardilla tiene coordenadas x y y (1.1 m, 3.4 m) en $t_1 = 0$ y coordenadas (5.3 m, -0.5 m) en $t_2 = 3.0$ s. Para este intervalo, obtenga *a*) las componentes de la velocidad media, y *b*) la magnitud y dirección de esta velocidad.

3.2. Un rinoceronte está en el origen de las coordenadas en $t_1 = 0$. Para el intervalo de $t_1 = 0$ a $t_2 = 12.0$ s, la velocidad media del animal tiene componente x de -3.8 m/s y componente y de 4.9 m/s. En $t_2 = 12.0$ s, *a*) ¿qué coordenadas x y y tiene el rinoceronte? *b*) ¿Qué tan lejos está del origen?

3.3. Un diseñador de páginas Web crea una animación en la que un punto en una pantalla de computadora tiene una posición $\vec{r} = [4.0\text{ cm} + (2.5\text{ cm/s}^2)t^2]\hat{\imath} + (5.0\text{ cm/s})t\hat{\jmath}$. *a*) Determine la magnitud y dirección de la velocidad media del punto entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule la magnitud y dirección de la velocidad instantánea en $t = 0$, en $t = 1.0$ s y en $t = 2.0$ s. *c*) Dibuje la trayectoria del punto de $t = 0$ a $t = 2.0$ s, y muestre las velocidades calculadas en el inciso *b*).

3.4. Si $\vec{r} = bt^2\hat{\imath} + ct^3\hat{\jmath}$, donde b y c son constantes positivas, ¿cuándo el vector de velocidad forma un ángulo de 45° con los ejes x y y?

Sección 3.2 El vector de aceleración

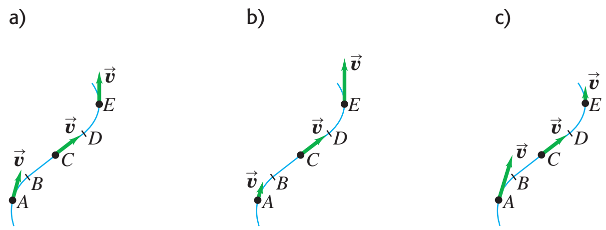
3.5. Un jet vuela a altitud constante. En el instante $t_1 = 0$, tiene componentes de velocidad $v_x = 90$ m/s, $v_y = 110$ m/s. En $t_2 = 30.0$ s, las componentes son $v_x = -170$ m/s, $v_y = 40$ m/s. *a*) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren? Para este intervalo, calcule *b*) las componentes de la aceleración media, y *c*) la magnitud y dirección de esta aceleración.

3.6. Un perro que corre en un campo tiene componentes de velocidad $v_x = 2.6$ m/s y $v_y = -1.8$ m/s en $t_1 = 10.0$ s. Para el intervalo de $t_1 = 10.0$ s a $t_2 = 20.0$ s, la aceleración media del perro tiene magnitud de 0.45 m/s^2 y dirección de 31.0° medida del eje $+x$ al eje $+y$. En $t_2 = 20.0$ s, *a*) ¿qué componentes x y y tiene la velocidad del perro? *b*) ¿Qué magnitud y dirección tiene esa velocidad? *c*) Dibuje los vectores de velocidad en t_1 y t_2. ¿En qué difieren?

3.7. Las coordenadas de un ave que vuela en el plano xy están dadas por $x(t) = \alpha t$ y $y(t) = 3.0\text{ m} - \beta t^2$, donde $\alpha = 2.4\text{ m/s}$ y $\beta = 1.2\text{ m/s}^2$. *a*) Dibuje la trayectoria del ave entre $t = 0$ y $t = 2.0$ s. *b*) Calcule los vectores de velocidad y aceleración en función de t. *c*) Obtenga la magnitud y dirección de la velocidad y aceleración del ave en $t = 2.0$ s. *d*) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 2.0$ s. En este instante, ¿el ave está acelerando, frenando o su rapidez no está cambiando instantáneamente? ¿Está dando vuelta? Si así es, ¿en qué dirección?

3.8. Una partícula sigue una trayectoria como se muestra en la figura 3.38. Entre B y D, la trayectoria es recta. Dibuje los vectores de aceleración en A, C y E si *a*) la partícula se mueve con rapidez constante, *b*) la partícula aumenta de rapidez continuamente; *c*) la rapidez de la partícula disminuye continuamente.

Figura 3.38 Ejercicio 3.8.



Sección 3.3 Movimiento de proyectiles

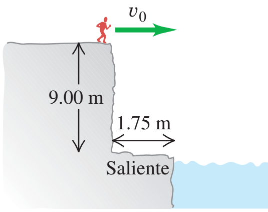
3.9. Un libro de física que se desliza sobre una mesa horizontal a 1.10 m/s cae al piso en 0.350 s. Ignore la resistencia del aire. Calcule *a*) la altura de la mesa; *b*) la distancia horizontal del borde de la mesa al punto donde cae el libro; *c*) las componentes horizontal y vertical, y la magnitud y dirección, de la velocidad del libro justo antes de tocar el piso. *d*) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.10. Un helicóptero militar está en una misión de entrenamiento y vuela horizontalmente con una rapidez de 60.0 m/s y accidentalmente suelta una bomba (desactivada, por suerte) a una altitud de 300 m. Puede despreciarse la resistencia del aire. *a*) ¿Qué tiempo tarda la bomba en llegar al suelo? *b*) ¿Qué distancia horizontal viaja mientras cae? *c*) Obtenga las componentes horizontal y vertical de su velocidad justo antes de llegar al suelo. *d*) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento de la bomba. *e*) ¿Dónde está el helicóptero cuando la bomba toca tierra, si la rapidez del helicóptero se mantuvo constante?

3.11. Dos grillos, Chirpy y Milada, saltan desde lo alto de un acantilado vertical. Chirpy simplemente se deja caer y llega al suelo en 3.50 s; en tanto que Milada salta horizontalmente con una rapidez inicial de 95.0 cm/s. ¿A qué distancia de la base del acantilado tocará Milada el suelo?

3.12. Una osada nadadora de 510 N se lanza desde un risco con un impulso horizontal, como se muestra en la figura 3.39. ¿Qué rapidez mínima debe tener al saltar de lo alto del risco para no chocar con la saliente en la base, que tiene una anchura de 1.75 m y está 9.00 m abajo del borde superior del risco?

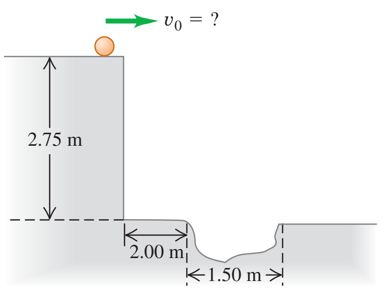
Figura 3.39 Ejercicio 3.12.



3.13. Salto del río I. Un automóvil llega a un puente durante una tormenta y el conductor descubre que las aguas se lo han llevado. El conductor debe llegar al otro lado, así que decide intentar saltar la brecha con su auto. La orilla en la que se encuentra está 21.3 m arriba del río, mientras que la orilla opuesta está a sólo 1.8 m sobre las aguas. El río es un torrente embravecido con una anchura de 61.0 m. *a*) ¿Qué tan rápido deberá ir el auto cuando llegue a la orilla para librar el río y llegar a salvo al otro lado? *b*) ¿Qué rapidez tendrá el auto justo antes de que aterrice en la orilla opuesta?

3.14. Una pequeña canica rueda horizontalmente con una rapidez v_0 y cae desde la parte superior de una plataforma de 2.75 m de alto, sin que sufra resistencia del aire. A nivel del piso, a 2.00 m de la base de la plataforma, hay una cavidad (figura 3.40). ¿En qué intervalo de rapideces v_0 la canica caerá dentro de la cavidad?

Figura 3.40 Ejercicio 3.14.



3.15. Dentro de una nave espacial en reposo sobre la Tierra, una pelota rueda desde la parte superior de una mesa horizontal y cae al piso a una distancia D de la pata de la mesa. Esta nave espacial ahora desciende en el inexplorado Planeta X. El comandante, el Capitán Curioso, hace rodar la misma pelota desde la misma mesa con la misma rapidez inicial que en la Tierra, y se da cuenta de que la pelota cae al piso a una distancia $2.76D$ de la pata de la mesa. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en el Planeta X?

3.16. Un mariscal de campo novato lanza un balón con una componente de velocidad inicial hacia arriba de 16.0 m/s y una componente de velocidad horizontal de 20.0 m/s. Ignore de la resistencia del aire. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará el balón en llegar al punto más alto de la trayectoria? *b*) ¿A qué altura está este punto? *c*) ¿Cuánto tiempo pasa desde que se lanza el balón hasta que vuelve a su nivel original? ¿Qué relación hay entre este tiempo y el calculado en el inciso *a*)? *d*) ¿Qué distancia horizontal viaja el balón en este tiempo? *e*) Dibuje gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.17. Se dispara un proyectil desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 80.0 m/s a 60.0° por encima de la horizontal sin que sufra resistencia del aire. *a*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad inicial del proyectil. *b*)¿Cuánto tarda el proyectil en alcanzar su punto más alto? *c*) Calcule su altura máxima por encima del suelo. *d*) ¿Qué tan lejos del punto de lanzamiento cae el proyectil al suelo? *e*) Determine las componentes horizontal y vertical de su aceleración y velocidad en el punto de su máxima altura.

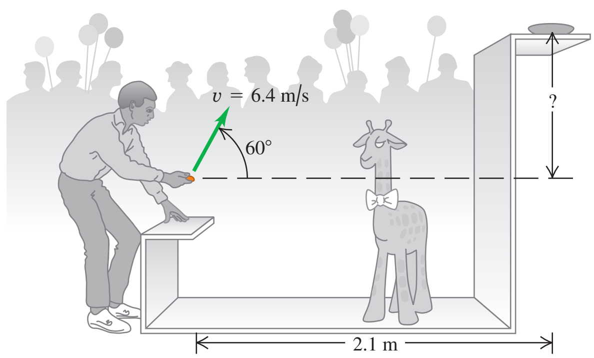
3.18. Una pistola que dispara una luz bengala le imprime una velocidad inicial de 125 m/s en un ángulo de 55.0° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. Si la bengala se dispara, obtenga su altura máxima y la distancia del punto de disparo al punto de caída, *a*) en los salares planos de Utah y *b*) en el Mar de la Tranquilidad en la Luna, donde $g = 1.67\ \text{m/s}^2$.

3.19. Un pelotero de grandes ligas batea una pelota de modo que sale del bate con una rapidez de 30.0 m/s y un ángulo de 36.9° sobre la horizontal. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿En cuáles *dos* instantes la pelota estuvo a 10.0 m sobre el punto en que se salió del bate? *b*) Obtenga las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la pelota en cada uno de los dos instantes calculados en el inciso *a*). *c*) ¿Qué magnitud y dirección tenía la velocidad de la pelota al regresar al nivel en el que se bateó?

3.20. Un atleta lanza la bala a cierta distancia sobre el suelo plano con velocidad de 12.0 m/s, 51.0° sobre la horizontal. La bola golpea el suelo 2.08 s después. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿Cuáles son las componentes de la aceleración de la bala en vuelo? *b*) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad de la bala al principio y el final de su trayectoria? *c*) A qué distancia horizontal llegó la bala? *d*) ¿Por qué la expresión para R del ejemplo 3.8 *no* da la respuesta correcta para el inciso *c*)? *e*) ¿A qué altura sobre el suelo se lanzó la bala? *f*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.21. Gane el premio. En una feria, se gana una jirafa de peluche lanzando una moneda a un platito, el cual está sobre una repisa más arriba del punto en que la moneda sale de la mano y a una distancia horizontal de 2.1 m desde ese punto (figura 3.41). Si lanza la moneda con velocidad de 6.4 m/s, a un ángulo de 60° sobre la horizontal, la moneda caerá en el platito. Ignore la resistencia del aire. *a*) ¿A qué altura está la repisa sobre el punto donde se lanza la moneda? *b*) ¿Qué componente vertical tiene la velocidad de la moneda justo antes de caer en el platito?

Figura 3.41 Ejercicio 3.21.



3.22. Suponga que el ángulo inicial α_0 de la figura 3.26 es de 42.0° y la distancia d es de 3.00 m. ¿Dónde se encontrarán el dardo y el mono, si la rapidez inicial del dardo es *a*) 12.0 m/s? *b*) ¿8.0 m/s? *c*) ¿Qué sucederá si la rapidez inicial del dardo es de 4.0 m/s? Dibuje la trayectoria en cada caso.

3.23. Un hombre está parado en la azotea de un edificio de 15.0 m y lanza una piedra con velocidad de 30.0 m/s en un ángulo de 33.0° sobre la horizontal. Puede despreciarse la resistencia del aire. Calcule *a*) la altura máxima que alcanza la piedra sobre la azotea; *b*) la magnitud de la velocidad de la piedra justo antes de golpear el suelo; y *c*) la distancia horizontal desde la base del edificio hasta el punto donde la roca golpea el suelo. *d*) Dibuje las gráficas x-t, y-t, v_x-t y v_y-t para el movimiento.

3.24. Los bomberos están lanzando un chorro de agua a un edificio en llamas, utilizando una manguera de alta presión que imprime al agua una rapidez de 25.0 m/s al salir por la boquilla. Una vez que sale de la manguera, el agua se mueve con movimiento de proyectil. Los bomberos ajustan el ángulo de elevación α. de la manguera hasta que el agua tarda 3.00 s en llegar a un edificio que está a 45.0 m de distancia. Ignore la resistencia del aire y suponga que la boquilla de la manguera está a nivel del suelo. *a*) Calcule el ángulo de elevación de α. *b*) Determine la rapidez y aceleración del agua en el punto más alto de su trayectoria. *c*) ¿A qué altura sobre el suelo incide el agua sobre el edificio, y con qué rapidez lo hace?

3.25. Un globo de 124 kg que lleva una canastilla de 22 kg desciende con rapidez constante hacia abajo de 20.0 m/s. Una piedra de 1.0 kg se lanza desde la canastilla con una velocidad inicial de 15.0 m/s perpendicular a la trayectoria del globo en descenso, medida relativa a una persona en reposo en la canasta. Esa persona ve que la piedra choca contra el suelo 6.00 s después de lanzarse. Suponga que el globo continúa su descenso a los 20.0 m/s constantes. *a*) ¿A qué altura estaba el globo cuando se lanzó la piedra? *b*) ¿Y cuando chocó contra el suelo? *c*) En el instante en que la piedra tocó el suelo, ¿a qué distancia estaba de la canastilla? *d*) Determine las componentes horizontal y vertical de la velocidad de la piedra justo antes de chocar contra el suelo, relativas a un observador i) en reposo en la canastilla; ii) en reposo en el suelo.

3.26. Un cañón, situado a 60.0 m de la base de un risco vertical de 25.0 m de altura, dispara un obús de 15 kg con un ángulo de 43.0° sobre la horizontal, hacia el risco. *a*) ¿Qué velocidad inicial mínima debe tener el obús para librar el borde superior del risco? *b*) El suelo en la parte superior del risco es plano, con una altura constante de 25.0 m sobre el cañón. En las condiciones del inciso *a*), ¿a qué distancia del borde del risco cae el obús?

3.27. Un avión vuela con una velocidad de 90.0 m/s a un ángulo de 23.0° arriba de la horizontal. Cuando está 114 m directamente arriba de un perro parado en suelo plano, se cae una maleta del compartimiento de equipaje. ¿A qué distancia del perro caerá la maleta? Ignore la resistencia del aire.

Sección 3.4 Movimiento en un círculo

3.28. Imagine que, en su primer día de trabajo para un fabricante de electrodomésticos, le piden que averigüe qué hacerle al periodo de rotación de una lavadora para triplicar la aceleración centrípeta, y usted impresiona a su jefa contestando inmediatamente. ¿Qué le contesta?

3.29. La Tierra tiene 6380 km de radio y gira una vez sobre su eje en 24 h. *a*) ¿Qué aceleración radial tiene un objeto en el ecuador? Dé su respuesta en m/s^2 y como fracción de g. *b*) Si a_{rad} en el ecuador fuera mayor que g, los objetos saldrían volando hacia el espacio. (Veremos por qué en el capítulo 5.) ¿Cuál tendría que ser el periodo de rotación para que esto sucediera?

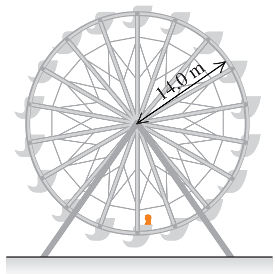
3.30. Un modelo de rotor de helicóptero tiene cuatro aspas, cada una de 3.40 m de longitud desde el eje central hasta la punta. El modelo se gira en un túnel de viento a 550 rpm. *a*) ¿Qué rapidez lineal tiene la punta del aspa en m/s? *b*) ¿Qué aceleración radial tiene la punta del aspa, expresada como un múltiplo de la aceleración debida a la gravedad, es decir, g?

3.31. En una prueba de un "traje g", un voluntario se gira en un círculo horizontal de 7.0 m de radio. ¿Con qué periodo de rotación la aceleración centrípeta tiene magnitud de *a*) $3.0g$? *b*) $¿10g$?

3.32. El radio de la órbita terrestre alrededor del Sol (suponiendo que fuera circular) es de 1.50×10^8 km, y la Tierra la recorre en 365 días. *a*) Calcule la magnitud de la velocidad orbital de la Tierra en m/s. *b*) Calcule la aceleración radial de la Tierra hacia el Sol en m/s^2. *c*) Repita los incisos *a*) y *b*) para el movimiento del planeta Mercurio (radio orbital $= 5.79 \times 10^7$ km, periodo orbital $= 88.0$ días).

3.33. Una rueda de la fortuna de 14.0 m de radio gira sobre un eje horizontal en el centro (figura 3.42). La rapidez lineal de un pasajero en el borde es constante e igual a 7.00 m/s. ¿Qué magnitud y dirección tiene la aceleración del pasajero al pasar *a*) por el punto más bajo de su movimiento circular? *b*) ¿Por el punto más alto de su movimiento circular? *c*) ¿Cuánto tarda una revolución de la rueda?

Figura 3.42 Ejercicios 3.33 y 3.34.



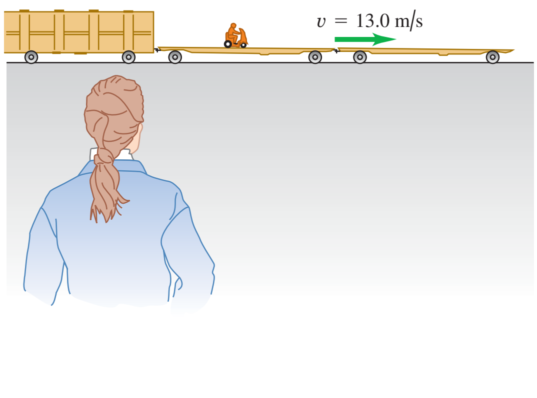
3.34. La rueda de la figura 3.42, que gira en sentido antihorario, se acaba de poner en movimiento. En un instante dado, un pasajero en el borde de la rueda que está pasando por el punto más bajo de su movimiento circular tiene una rapidez de 3.00 m/s, la cual está aumentando a razón de 0.500 m/s^2. *a*) Calcule la magnitud y la dirección de la aceleración del pasajero en este instante. *b*) Dibuje la rueda de la fortuna y el pasajero mostrando sus vectores de velocidad y aceleración.

3.35. Hipergravedad. En el Centro de Investigación Ames de la NASA, se utiliza el enorme centrifugador "20-G" para probar los efectos de aceleraciones muy elevadas ("hipergravedad") sobre los pilotos y los astronautas. En este dispositivo, un brazo de 8.84 m de largo gira uno de sus extremos en un plano horizontal, mientras el astronauta se encuentra sujeto con una banda en el otro extremo. Suponga que el astronauta está alineado en el brazo con su cabeza del extremo exterior. La aceleración máxima sostenida a la que los seres humanos se han sometido en esta máquina comúnmente es de 12.5 g. *a*) ¿Qué tan rápido debe moverse la cabeza del astronauta para experimentar esta aceleración máxima? *b*) ¿Cuál es la *diferencia* entre la aceleración de su cabeza y pies, si el astronauta mide 2.00 m de altura? *c*) ¿Qué tan rápido, en rpm (rev/min), gira el brazo para producir la aceleración sostenida máxima?

Sección 3.5 Velocidad relativa

3.36. Un vagón abierto de ferrocarril viaja a la derecha con rapidez de 13.0 m/s relativa a un observador que está parado en tierra. Alguien se mueve en motoneta sobre el vagón abierto (figura 3.43). ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la motoneta relativa al vagón abierto si su velocidad relativa al observador en el suelo es *a*) 18.0 m/s a la derecha? *b*) ¿3.0 m/s a la izquierda? *c*) ¿Cero?

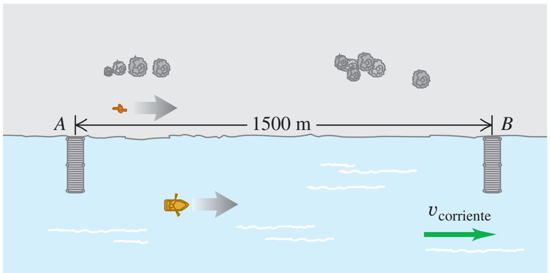
Figura 3.43 Ejercicio 3.36.



3.37. Una "banda móvil" de un aeropuerto se mueve a 1.0 m/s y tiene 35.0 m de largo. Si una mujer entra en un extremo y camina a 1.5 m/s relativa a la banda móvil, ¿cuánto tardará en llegar al otro extremo si camina *a*) en la misma dirección en que se mueve la banda? *b*) ¿Y en la dirección opuesta?

3.38. Dos muelles, *A* y *B*, están situados en un río; *B* está 1500 m río abajo de *A* (figura 3.44). Dos amigos deben ir de *A* a *B* y regresar. Uno rema un bote con rapidez constante de 4.00 km/h relativa al agua; el otro camina en tierra a 4.00 km/h constantes. La velocidad del río es 2.80 km/h en la dirección de *A* a *B*. ¿Cuánto tardará cada persona en hacer el viaje redondo?

Figura 3.44 Ejercicio 3.38.



3.39. Una canoa tiene una velocidad de 0.40 m/s al sureste, relativa a la Tierra. La canoa está en un río que fluye al este a 0.50 m/s relativa a la Tierra. Calcule la velocidad (magnitud y dirección) de la canoa relativa al río.

3.40. Un piloto desea volar al oeste. Un viento de 80.0 km/h (aprox. 50 mi/h) sopla al sur. *a*) Si la rapidez (en aire estacionario) del avión es de 320.0 km/h (aprox. 200 mi/h), ¿qué rumbo debe tomar el piloto? *b*) ¿Cuál es la rapidez del avión sobre el suelo? Ilustre con un diagrama vectorial.

3.41. Cruce del río I. Un río fluye al sur con rapidez de 2.0 m/s. Un hombre cruza el río en una lancha de motor con velocidad relativa al agua de 4.2 m/s al este. El río tiene 800 m de ancho. *a*) ¿Qué velocidad (magnitud y dirección) tiene la lancha relativa a la Tierra? *b*) ¿Cuánto tiempo tarda en cruzar el río? *c*) ¿A qué distancia al sur de su punto de partida llegará a la otra orilla?

3.42. Cruce del río II. *a*) ¿Qué dirección debería tomar la lancha del ejercicio 3.41, para llegar a un punto en la orilla opuesta directamente al este de su punto de partida? (La rapidez de la lancha relativa al agua sigue siendo 4.2 m/s.) *b*) ¿Qué velocidad tendría la lancha relativa a la Tierra? *c*) ¿Cuánto tardaría en cruzar el río?

3.43. La nariz de un avión ultraligero apunta al sur, y el velocímetro indica 35 m/s. Hay un viento de 10 m/s que sopla al suroeste relativo a la Tierra. *a*) Dibuje un diagrama de suma vectorial que muestre la relación de $\vec{v}_{\text{P/E}}$ (velocidad del avión relativa a la Tierra) con los dos vectores dados. *b*) Si *x* es al este y *y* al norte, obtenga las componentes de $\vec{v}_{\text{P/E}}$. *c*) Obtenga la magnitud y dirección de $\vec{v}_{\text{P/E}}$.

Problemas

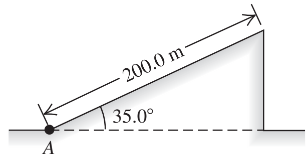
3.44. Un cohete de modelo defectuoso se mueve en el plano *xy* (la dirección $+y$ es vertical hacia arriba). La aceleración del cohete tiene componentes dadas por $a_x(t) = \alpha t^2$ y $a_y(t) = \beta - \gamma t$, donde $\alpha = 2.50\ \text{m/s}^4$, $\beta = 9.00\ \text{m/s}^2$ y $\gamma = 1.40\ \text{m/s}^3$. En $t = 0$ el cohete está en el origen y tiene velocidad inicial $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}$ con $v_{0x} = 1.00$ m/s y $v_{0y} = 7.00$ m/s. *a*) Calcule los vectores de velocidad y posición en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura máxima alcanza el cohete? *c*) Dibuje el camino que sigue el cohete. *d*) ¿Qué desplazamiento horizontal tiene el cohete al volver a $y = 0$?

3.45. Se realiza un lanzamiento en ángulo de un cohete desde la parte superior de una torre, cuya altura es $h_0 = 50.0$ m. A causa del diseño de los motores, sus coordenadas de posición tienen la forma $x(t) = A + Bt^2$ y $y(t) = C + Dt^3$, donde *A*, *B*, *C* y *D* son constantes. Además, la aceleración del cohete 1.00 s después del lanzamiento es $\vec{a} = (4.00\hat{\imath} + 3.00\hat{\jmath})\ \text{m/s}^2$. Considere que la base de la torre es el origen de las coordenadas. *a*) Determine las constantes *A*, *B*, *C* y *D*, incluyendo sus unidades en el SI. *b*) En el instante posterior al lanzamiento del cohete, ¿cuáles son sus vectores de aceleración y velocidad? *c*) ¿Cuáles son las componentes *x* y *y* de la velocidad del cohete 10.0 s después del lanzamiento, y qué tan rápido se mueve el cohete? *d*) ¿Cuál es el vector de posición del cohete 10.0 s después del lanzamiento?

3.46. Un ave vuela en el plano *xy* con un vector de velocidad dado por $\vec{v} = (\alpha - \beta t^2)\hat{\imath} + \gamma t\hat{\jmath}$, donde $\alpha = 2.4\ \text{m/s}$, $\beta = 1.6\ \text{m/s}^3$ y $\gamma = 4.0\ \text{m/s}^2$. La dirección $+y$ es vertical hacia arriba. En $t = 0$, el ave está en el origen. *a*) Calcule los vectores de posición y aceleración del ave en función del tiempo. *b*) ¿Qué altura (coordenada *y*) tiene el ave al volar sobre $x = 0$ por primera vez después de $t = 0$?

3.47. Un cohete de prueba se lanza acelerándolo a 1.25 m/s² por un plano inclinado de 200.0 m, partiendo del reposo en el punto *A* (figura 3.45). El plano inclinado se eleva a 35.0° por encima de la horizontal, y en el instante en que el cohete sale del plano, sus motores se apagan y queda sujeto solamente a la gravedad (se puede ignorar la resistencia del aire). Determine *a*) la altura máxima sobre el suelo a la que llega el cohete, y *b*) el alcance máximo horizontal del cohete más allá del punto *A*.

Figura 3.45 Problema 3.47.



3.48. Atletismo en Marte. En el salto de longitud, una atleta se lanza en ángulo por encima del suelo y cae a la misma altura, tratando de alcanzar la máxima distancia horizontal. Suponga que en la Tierra, ella se encuentra en el aire durante un tiempo *T*, alcanza una altura máxima *h* y una distancia horizontal *D*. Si ella saltara *exactamente* de la misma forma durante una competencia en Marte, donde g_{Marte} es 0.379 del valor de *g* en la Tierra, determine su tiempo en el aire, su altura máxima y la distancia horizontal alcanzada. Exprese cada una de estas tres cantidades en términos de su valor en la Tierra. Ignore la resistencia del aire en ambos planetas.

3.49. ¡Dinamita! Una cuadrilla de demolición usa dinamita para derribar un edificio viejo. Los fragmentos del edificio salen disparados en todas direcciones, y después se encuentran a distancias de hasta 50 m de la explosión. Estime la rapidez máxima con que salieron disparados los fragmentos. Describa todas las suposiciones que haga.

3.50. Espiral ascendente. Es común ver a las aves de presa ascender en corrientes calientes de aire, por lo general describiendo una trayectoria espiral. Se puede modelar un movimiento espiral como movimiento circular uniforme combinado con una velocidad constante hacia arriba. Suponga que un ave describe un círculo completo con radio de 8.00 m cada 5.00 s y asciende verticalmente a razón de 3.00 m/s. Determine lo siguiente: *a*) la rapidez del ave relativa al suelo; *b*) la aceleración del ave (magnitud y dirección); y *c*) el ángulo entre el vector de velocidad del ave y la horizontal.

3.51. Un veterinario de la selva provisto de una cerbatana cargada con un dardo sedante y un mono astuto de 1.5 kg están a 25 m arriba del suelo en árboles separados 90 m. En el momento justo en que el veterinario dispara el dardo horizontalmente al mono, éste se deja caer del árbol en un vano intento por escapar del dardo. ¿Qué velocidad de salida mínima debe tener el dardo para golpear al mono antes de que éste llegue al suelo?

3.52. Una doble de cine se deja caer desde un helicóptero que está a 30.0 m sobre el suelo y se mueve con velocidad constante, cuyas