

3.3 Movimiento de proyectiles

OBJETIVOS: Analizar el movimiento de proyectiles para determinar a) posición, b) tiempo de vuelo y c) alcance.

Un ejemplo muy conocido de movimiento curvilíneo bidimensional es el de los objetos que se lanzan o proyectan con algún mecanismo. El movimiento de una piedra lanzada al otro lado de un arroyo o el de una pelota de golf golpeada en el “tee” son casos de **movimiento de proyectiles**. Una situación especial de movimiento de proyectil en una dimensión es el lanzamiento de un objeto verticalmente hacia arriba (o hacia abajo). Ya vimos este caso en el capítulo 2 en términos de caída libre (sin considerar la resistencia del aire). También trataremos el movimiento de proyectiles como caída libre, así que la única aceleración de un proyectil será la debida a la gravedad. Podemos usar componentes vectoriales para analizar el movimiento de proyectiles. Simplemente descomponemos el movimiento en sus componentes x y y , y los manejamos individualmente.

Proyecciones horizontales

Vale la pena analizar primero el movimiento de un objeto que se proyecta horizontalmente, paralelo a una superficie plana. Supongamos que lanzamos un objeto horizontalmente con velocidad inicial v_{x_0} como en la  figura 3.10. El movimiento de proyectiles se analiza a partir del instante en que se sueltan ($t = 0$). Una vez soltado el objeto, deja de haber aceleración horizontal ($a_x = 0$), así que, durante toda la trayectoria del objeto, la velocidad horizontal se mantiene constante: $v_x = v_{x_0}$.

Según la ecuación $x = x_0 + v_x t$ (ecuación 3.2a), el objeto proyectado seguiría viajando indefinidamente en la dirección horizontal. Sin embargo, sabemos que esto no sucede. Tan pronto como se proyecta el objeto, está en caída libre en la dirección vertical, con $v_{y_0} = 0$ (como si se hubiera dejado caer) y $a_y = -g$. En otras palabras, el objeto proyectado viaja con velocidad uniforme en la dirección horizontal y, *al mismo tiempo*, sufre una aceleración en la dirección hacia abajo por la influencia de la gravedad. El resultado es una trayectoria curva, como se muestra en la figura 3.10. (Compare los movimientos de las figuras 3.10 y 3.2. ¿Percibe el lector similitudes?) Si no hubiera movimiento horizontal, el objeto simplemente caería al suelo en línea recta. De hecho, el tiempo de vuelo del objeto proyectado es *exactamente el mismo que si estuviera cayendo verticalmente*.

Nota: repase la sección 2.5, caída libre en una dimensión.

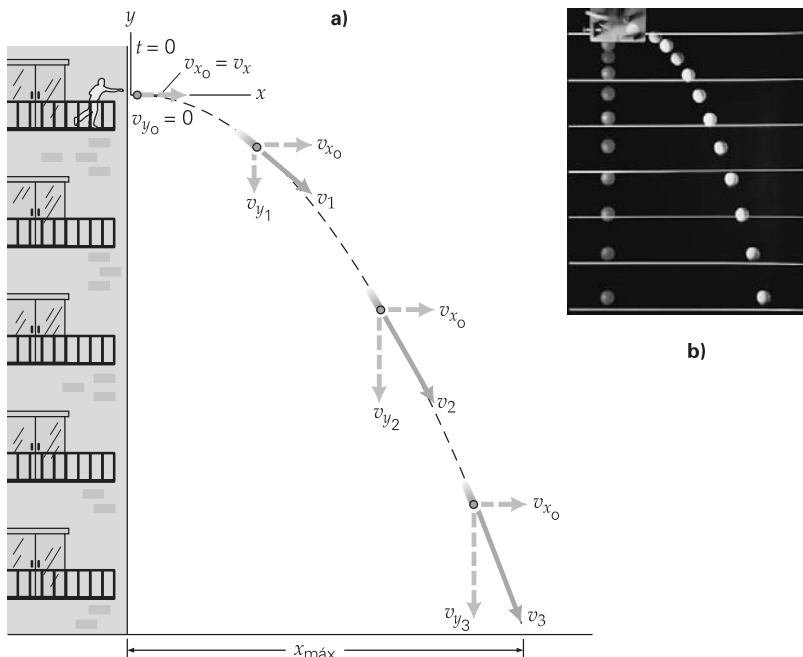


FIGURA 3.10 Proyección horizontal a) Los componentes de velocidad de un proyectil lanzado horizontalmente muestran que el proyectil viaja a la derecha mientras cae, como lo indica el signo menos. b) Una fotografía con múltiples destellos muestra las trayectorias de dos pelotas de golf. Una se proyectó horizontalmente al mismo tiempo que la otra se dejaba caer en línea recta. Las líneas horizontales tienen una separación de 15 cm, y el intervalo entre destellos fue de $\frac{1}{30}$ s. Los movimientos verticales de las pelotas son idénticos. ¿Por qué? ¿Puede el lector describir el movimiento horizontal de la pelota que está en gris claro?

Observe los componentes del vector de velocidad en la figura 3.10a. La longitud del componente horizontal no cambia; pero la longitud del componente vertical aumenta con el tiempo. ¿Qué velocidad instantánea tiene el objeto en cualquier punto de su trayectoria? (Pensemos en términos de suma de vectores, como en la sección 3.3.) La imagen de la figura 3.10b muestra los movimientos reales de una pelota de golf que se proyecta horizontalmente y una que se deja caer simultáneamente desde el reposo. Las líneas de referencia horizontales muestran que las pelotas caen verticalmente con la misma rapidez. La única diferencia es que la que se proyectó horizontalmente también viaja hacia la derecha cuando cae.

Ejemplo 3.5 ■ Inicio hasta arriba: proyección horizontal

Suponga que la pelota de la figura 3.10a se proyecta desde una altura de 25.0 m sobre el suelo y se le imprime una velocidad horizontal inicial de 8.25 m/s. *a)* ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo? *b)* ¿A qué distancia del edificio tocará el suelo la pelota?

Razonamiento. Al examinar los componentes del movimiento, vemos que en el inciso *a* buscamos el tiempo que la pelota tarda en caer verticalmente, es decir, un caso análogo al de una pelota que se deja caer desde esa altura. Éste es también el tiempo que la pelota viaja en la dirección horizontal. La rapidez horizontal es constante, así que podremos calcular la distancia horizontal que nos piden en el inciso *b*.

Solución. Escribimos los datos eligiendo como origen el punto desde el que se lanza la pelota y tomando el sentido hacia abajo como negativo:

Dado: $y = -25.0 \text{ m}$ **Encuentre:** *a)* t (tiempo de vuelo)
 $v_{x_0} = 8.25 \text{ m/s}$ *b)* x (distancia horizontal)
 $a_x = 0$
 $v_{y_0} = 0$
 $a_y = -g$
 $(x_0 = 0 \text{ y } y_0 = 0 \text{ por el origen que elegimos.})$

a) Como ya señalamos, el tiempo de vuelo es el mismo que la pelota tardaría en caer verticalmente al suelo. Para calcularlo, podemos usar la ecuación $y = y_0 + v_{y_0}t - \frac{1}{2}gt^2$, donde se expresa la dirección negativa de g explícitamente, como en el capítulo 2. Con $v_{y_0} = 0$, tenemos

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

Entonces,

$$t = \sqrt{\frac{2y}{-g}} = \sqrt{\frac{2(-25.0 \text{ m})}{-9.80 \text{ m/s}^2}} = 2.26 \text{ s}$$

b) La pelota viaja en la dirección x durante el mismo tiempo que viaja en la dirección y (es decir, 2.26 s). Puesto que no hay aceleración en la dirección horizontal, la pelota viaja en esta dirección con velocidad uniforme. Así, con $x_0 = 0$ y $a_x = 0$, tenemos

$$x = v_{x_0}t = (8.25 \text{ m/s})(2.26 \text{ s}) = 18.6 \text{ m}$$

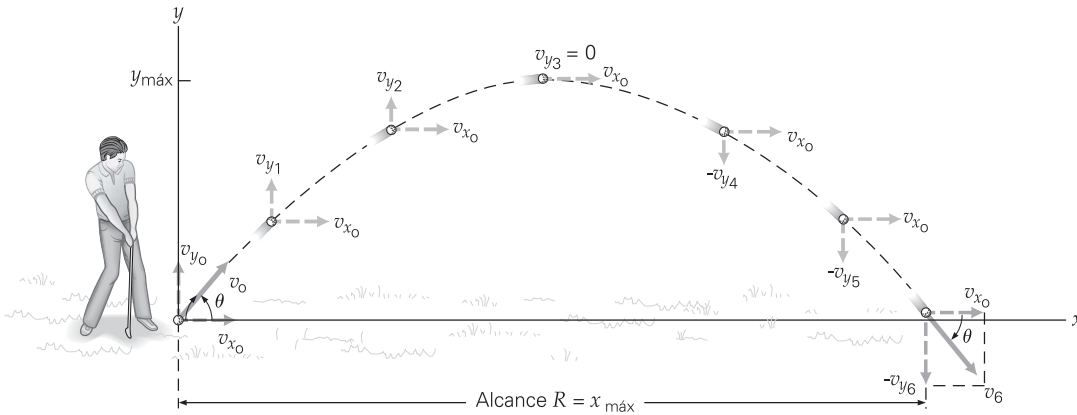
Ejercicio de refuerzo. *a)* Colocando los ejes en la base del edificio, demuestre que la ecuación resultante es la misma que en el ejemplo. *b)* ¿Qué velocidad (en forma de componentes) tiene la pelota justo antes de tocar el suelo?



Ilustración 3.4 Movimiento de proyectiles

Proyecciones con ángulos arbitrarios

En el caso general de movimiento de proyectiles, el objeto se proyecta con un ángulo θ arbitrario respecto a la horizontal; por ejemplo, una pelota de golf que se golpea con un palo (► figura 3.11). Durante el movimiento de un proyectil, éste viaja hacia arriba y hacia abajo mientras viaja horizontalmente con velocidad constante. (¿La pelota tiene aceleración? Sí. En todos los puntos del movimiento, la gravedad está actuando, y $\vec{a} = -g\hat{y}$.)



▲ **FIGURA 3.11 Proyección angular** Se muestran los componentes de velocidad de la pelota en diversos instantes. (Las direcciones se indican con signos, aunque el signo + se omite porque por lo general se sobreentiende.) Observe que $v_y = 0$ en la cúspide de la trayectoria ($y_{\text{máx}}$). El alcance R es la distancia horizontal máxima ($x_{\text{máx}}$). (¿Por qué $v_0 = v_6$?)

Este movimiento también se analiza usando componentes. Igual que antes, tomamos los sentidos hacia arriba como positivo; y hacia abajo, como negativo. Primero descomponemos la velocidad inicial v_0 en sus componentes rectangulares:

$$v_{x_0} = v_0 \cos \theta \quad (\text{componentes de velocidad inicial}) \quad (3.8a)$$

$$v_{y_0} = v_0 \sin \theta \quad (3.8b)$$

Puesto que no hay aceleración horizontal y la gravedad actúa en el sentido y negativa, el componente x de la velocidad es constante, mientras que el componente y varía con el tiempo (véase la ecuación 3.3d):

$$v_x = v_{x_0} = v_0 \cos \theta \quad (3.9a)$$

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_0 \sin \theta - gt \quad (\text{componentes de velocidad del movimiento de un proyectil}) \quad (3.9b)$$

En la figura 3.11 se ilustran los componentes de la velocidad instantánea en diversos tiempos. La velocidad instantánea es la suma de estos componentes y es tangente a la trayectoria curva de la pelota en cualquier punto. Observe que la pelota golpea el suelo con la misma rapidez con que se lanzó (pero con $-v_{y_0}$) y con el mismo ángulo bajo la horizontal.

Asimismo, los componentes del desplazamiento están dados por ($x_0 = y_0 = 0$):

$$x = v_{x_0} t = (v_0 \cos \theta) t \quad (\text{componentes de desplazamiento}) \quad (3.10a)$$

$$y = v_{y_0} t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (\text{del movimiento de un proyectil}) \quad (3.10b)$$

La curva que producen estas ecuaciones (la trayectoria de movimiento del proyectil) se denomina **parábola**. Solemos llamar *arco parabólico* a la trayectoria de un proyectil. Tales arcos son muy comunes (►figura 3.12).

Cabe señalar que, igual que en la proyección horizontal, lo que los componentes del movimiento tienen en común es el tiempo. Entre los aspectos del movimiento de proyectiles que podrían interesarnos en diversas situaciones están el tiempo de vuelo, la altura máxima alcanzada y el **alcance** (R), que es la distancia horizontal máxima recorrida.

▼ **FIGURA 3.12 Arcos parabólicos**

Las chispas de metal caliente que saltan al soldar describen arcos parabólicos.



Nota: un proyectil sigue una trayectoria parabólica.

Ejemplo 3.6 ■ El primer golpe del golf: proyección angulada

Supongamos que un golfista golpea una pelota en el “tee” dándole una velocidad inicial de 30.0 m/s con un ángulo de 35° respecto a la horizontal, como en la figura 3.11. *a)* ¿Qué altura máxima alcanza la pelota? *b)* ¿Qué alcance tiene?

Razonamiento. La altura máxima tiene que ver con el componente y ; el procedimiento para obtenerla es como el que usamos para determinar la altura máxima que alcanza una pelota proyectada verticalmente hacia arriba. La pelota viaja en la dirección x durante el tiempo que tarda en subir y bajar.

Solución.

$$\begin{array}{ll} \text{Dado:} & v_o = 30.0 \text{ m/s} \\ & \theta = 35^\circ \\ & a_y = -g \\ & (x_o \text{ y } y_o = 0 \text{ y final } y = 0) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Encuentre: } a) \ y_{\text{máx}} \\ b) \ R = x_{\text{máx}} \end{array}$$

Calculemos v_{x_o} y v_{y_o} , explícitamente para usar ecuaciones de cinemática simplificadas:

$$v_{x_o} = v_o \cos 35^\circ = (30.0 \text{ m/s})(0.819) = 24.6 \text{ m/s}$$

$$v_{y_o} = v_o \sin 35^\circ = (30.0 \text{ m/s})(0.574) = 17.2 \text{ m/s}$$

a) Igual que para un objeto lanzado verticalmente hacia arriba, $v_y = 0$ en la altura máxima ($y_{\text{máx}}$). Así, calculamos el tiempo requerido para alcanzar la altura máxima (t_a) con la ecuación 3.9b igualando v_y a cero:

$$v_y = 0 = v_{y_o} - gt_a$$

Despejando t_a , tenemos

$$t_a = \frac{v_{y_o}}{g} = \frac{17.2 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 1.76 \text{ s}$$

(Observe que t_a representa el tiempo que la pelota está en ascenso.)

Entonces, la altura máxima $y_{\text{máx}}$ se obtiene sustituyendo t_a en la ecuación 3.10b:

$$y_{\text{máx}} = v_{y_o}t_a - \frac{1}{2}gt_a^2 = (17.2 \text{ m/s})(1.76 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(1.76 \text{ s})^2 = 15.1 \text{ m}$$

La altura máxima también se podría haber obtenido directamente de la ecuación 2.11', $v_y^2 = v_{y_o}^2 - 2gy$, con $y = y_{\text{máx}}$ y $v_y = 0$. Sin embargo, el método de resolución que usamos aquí ilustra la forma de obtener el tiempo de vuelo.

b) Al igual que en la proyección vertical, el tiempo de ascenso es igual al de descenso, así que el tiempo total de vuelo es $t = 2t_a$ (para volver a la altura desde la que se proyectó el objeto, $y = y_o = 0$, como se observa a partir de $y - y_o = v_{y_o}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, y $t = 2v_{y_o}/g = 2t_a$.)

El alcance R es igual a la distancia horizontal recorrida ($y_{\text{máx}}$), la cual se obtiene fácilmente sustituyendo el tiempo total de vuelo $t = 2t_a = 2(1.76 \text{ s}) = 3.52 \text{ s}$ en la ecuación 3.10a:

$$R = x_{\text{máx}} = v_x t = v_{x_o}(2t_a) = (24.6 \text{ m/s})(3.52 \text{ s}) = 86.6 \text{ m}$$

Ejercicio de refuerzo. ¿Cómo cambiarían los valores de altura máxima ($y_{\text{máx}}$) y alcance ($x_{\text{máx}}$) si la pelota se hubiera golpeado inicialmente igual en la superficie de la Luna? (Sugerencia: $g_L = g/6$; es decir, la aceleración debida a la gravedad en la Luna es la sexta parte que en la Tierra.) No realice cálculos numéricos. Obtenga las respuestas examinando las ecuaciones.

El alcance de un proyectil es una consideración importante en diversas aplicaciones, y tiene especial importancia en los deportes donde se busca un alcance máximo, como el golf y el lanzamiento de jabalina.

En general, ¿qué alcance tiene un proyectil lanzado con velocidad v_o en un ángulo θ ? Para contestar esta pregunta, deberemos considerar la ecuación empleada en el ejemplo 3.6 para calcular el intervalo, $R = v_x t$. Veamos primero las expresiones para v_x y t . Puesto que no hay aceleración en la dirección horizontal, sabemos que

$$v_x = v_{x_o} = v_o \cos \theta$$

y el tiempo total t (como vimos en el ejemplo 3.6) es

$$t = \frac{2v_{y_o}}{g} = \frac{2v_o \sin \theta}{g}$$

Entonces,

$$R = v_x t = (v_o \cos \theta) \left(\frac{2v_o \sin \theta}{g} \right) = \frac{2v_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$ (véase el apéndice I), tenemos

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} \quad \begin{array}{l} \text{alcance del proyectil } x_{\text{máx}} \\ \text{(sólo para } y_{\text{inicial}} = y_{\text{final}}) \end{array} \quad (3.11)$$

Vemos que el alcance depende de la magnitud de la velocidad (o rapidez) inicial, v_o , y del ángulo de proyección, θ , suponiendo g constante. Hay que tener en cuenta que tal ecuación sólo es válida en el caso especial, pero común, de $y_{\text{inicial}} = y_{\text{final}}$ (es decir, cuando el punto de aterrizaje está a la misma altura que el de lanzamiento).

Ejemplo 3.7 ■ Un lanzamiento desde el puente

Una chica que está parada en un puente lanza una piedra con una velocidad inicial de 12 m/s en un ángulo de 45° bajo la horizontal, en un intento por golpear un trozo de madera que flota en el río (▼ figura 3.13). Si la piedra se lanza desde una altura de 20 m sobre el río y llega a éste cuando la madera está a 13 m del puente, ¿golpeará la tabla? (Suponga que la tabla prácticamente no se mueve y que está en el plano del lanzamiento.)

Razonamiento. La pregunta es ¿qué alcance tiene la piedra? Si este alcance es igual a la distancia entre la tabla y el puente, la piedra golpeará la tabla. Para obtener el alcance de la piedra, necesitamos calcular el tiempo de descenso (a partir del componente y del movimiento) y, con él, calcular la distancia $x_{\text{máx}}$. (El tiempo es el factor vinculante.)

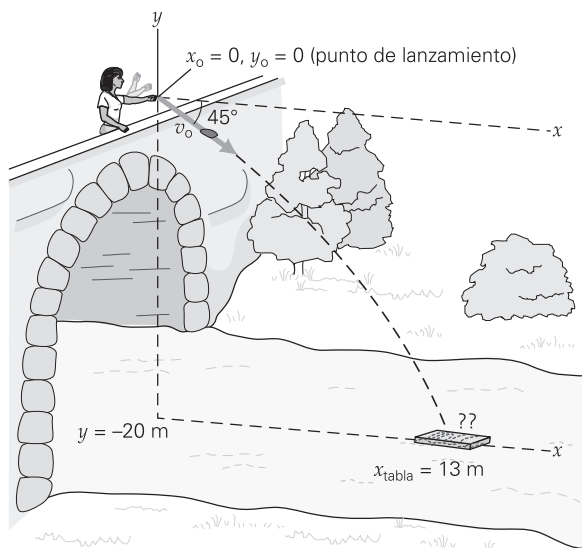
Solución.

Dado:	$v_o = 12 \text{ m/s}$	Encuentre:	alcance o $x_{\text{máx}}$ de la
	$\theta = 45^\circ$		piedra desde el puente.
	$v_{x_o} = v_o \cos 45^\circ = 8.5 \text{ m/s}$		(¿Es igual a la distancia
	$y = -20 \text{ m}$		entre la tabla y el
	$v_{y_o} = -v_o \sin 45^\circ = -8.5 \text{ m/s}$		puente?)
	$x_{\text{tabla}} = 13 \text{ m}$		
	$(x_o = y_o = 0)$		

Para obtener el tiempo en el caso de trayectorias hacia arriba, hemos usado $v_y = v_{y_o} - g$, donde $v_y = 0$ en la cúspide del arco. Sin embargo, en este caso v_y no es cero cuando la piedra llega al río, así que necesitamos obtener v_y para utilizar esa ecuación. Este valor se determina a partir de la ecuación de cinemática 2.11',

$$v_y^2 = v_{y_o}^2 - 2gy$$

(continúa en la siguiente página)



▲ FIGURA 3.13 Lanzamiento desde el puente: ¿acierta o falla? Véase el ejemplo 3.7.

despejando,

$$v_y = \sqrt{(-8.5 \text{ m/s})^2 - 2(9.8 \text{ m/s}^2)(-20 \text{ m})} = -22 \text{ m/s}$$

(con la raíz negativa porque v_y es hacia abajo).

Ahora despejamos t en $v_y = v_{y0} - gt$,

$$t = \frac{v_{y0} - v_y}{g} = \frac{-8.5 \text{ m/s} - (-22 \text{ m/s})}{9.8 \text{ m/s}^2} = 1.4 \text{ s}$$

En este momento la distancia horizontal entre la piedra y el puente es

$$x_{\text{máx}} = v_{x0}t = (8.5 \text{ m/s})(1.4 \text{ s}) = 12 \text{ m}$$

Así que el lanzamiento de la chica se queda corto un metro (pues la tabla está a 13 m).

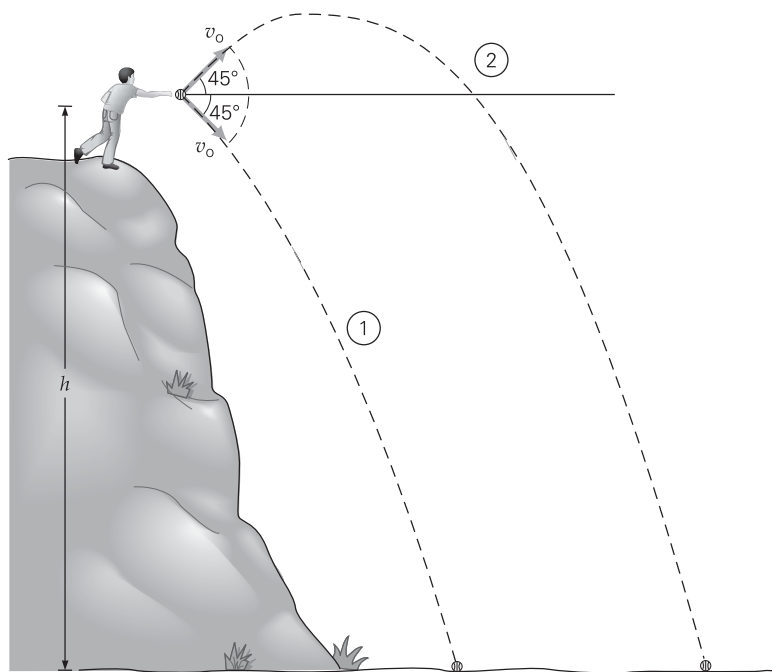
Podríamos utilizar la ecuación 3.10b, $y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2$, para determinar el tiempo, aunque habría implicado resolver una ecuación cuadrática.

Ejercicio de refuerzo. a) ¿Por qué supusimos que la tabla está en el plano del lanzamiento? b) ¿Por qué en este ejemplo no usamos la ecuación 3.11 para encontrar el alcance? Demuestre que la ecuación 3.11 funciona en el ejemplo 3.6, pero no en el 3.7, calculando el alcance en cada caso y comparando los resultados con las respuestas obtenidas en los ejemplos.

Ejemplo conceptual 3.8 ■ ¿Cuál tiene mayor rapidez?

Considere dos pelotas, ambas lanzadas con la misma rapidez inicial v_0 , pero una con un ángulo de 45° arriba de la horizontal y la otra con un ángulo de 45° abajo de la horizontal (▼ figura 3.14). Determine si, al llegar al suelo, a) la pelota lanzada hacia arriba tiene mayor rapidez, b) la pelota proyectada hacia abajo tiene mayor rapidez o c) ambas tienen la misma rapidez. Plantee claramente el razonamiento y los principios de física que usó para llegar a su respuesta, antes de revisar lo siguiente. Es decir, ¿por qué eligió esa respuesta?

Razonamiento y respuesta. En primera instancia, pensaríamos que la respuesta es b, ya que esta pelota se lanza hacia abajo. No obstante, la pelota proyectada hacia arriba cae desde una altura máxima mayor, así que tal vez la respuesta sea a. Para resolver este dilema, observe la línea horizontal trazada en la figura 3.14 entre los dos vectores de velocidad, que se extiende hasta más allá de la trayectoria superior. Vea, además, que abajo de la línea, las trayectorias de ambas pelotas son iguales. Asimismo, cuando llega a esta lí-



▲ FIGURA 3.14 ¿Cuál tiene mayor velocidad? Véase el ejemplo 3.8.

nea, la velocidad hacia abajo de la pelota superior es v_o con un ángulo de 45° abajo de la horizontal. (Véase la figura 3.11.) Por lo tanto, en lo que respecta a la línea horizontal y más abajo, las condiciones son idénticas, con el mismo componente y y el mismo componente x constante. Por consiguiente, la respuesta es c .

Ejercicio de refuerzo. Suponga que la pelota lanzada hacia abajo se proyectó con un ángulo de -40° . ¿Qué pelota golpearía el suelo con mayor rapidez en este caso?

Sugerencia para resolver problemas

El alcance de un proyectil que se lanza hacia abajo, como en la figura 3.14, se obtiene como se hizo en el ejemplo 3.7. Pero, ¿cómo se obtiene el alcance de un proyectil lanzado hacia arriba? Podríamos ver este problema como uno de “alcance extendido”. Una forma de resolverlo consiste en dividir la trayectoria en dos partes: 1) el arco sobre la línea horizontal y 2) el descenso bajo la línea horizontal, de modo que $x_{\text{máx}} = x_1 + x_2$. Sabemos cómo calcular x_1 (ejemplo 3.6) y x_2 (ejemplo 3.7). Otra forma de resolver el problema es usar $y = y_o + v_{y_o}t - \frac{1}{2}gt^2$, donde y es la posición final del proyectil, y despejar t , el tiempo total de vuelo. Luego se sustituye ese valor en la ecuación $x = v_{x_o}t$.



Exploración 3.5 Movimiento de un proyectil hacia arriba y hacia abajo

La ecuación 3.11, $R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$, nos permite calcular el alcance para un ángulo

de proyección y una velocidad inicial específicos. Sin embargo, hay ocasiones en que nos interesa el alcance máximo con una velocidad inicial dada; por ejemplo, el alcance máximo de una pieza de artillería que dispara un proyectil con cierta velocidad inicial. ¿Hay un ángulo óptimo que dé el alcance máximo? En condiciones ideales, la respuesta sería sí.

Para cierta v_o , el alcance es máximo ($R_{\text{máx}}$) cuando $\sin 2\theta = 1$, pues este valor de θ da el valor máximo de la función seno (que varía entre 0 y 1). Entonces,

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{g} \quad (y_{\text{inicial}} = y_{\text{final}}) \quad (3.12)$$

Puesto que este alcance máximo se obtiene cuando $\sin 2\theta = 1$, y dado que $\sin 90^\circ = 1$, tenemos

$$2\theta = 90^\circ \quad \text{o} \quad \theta = 45^\circ$$

para el alcance máximo con una rapidez inicial dada cuando el proyectil regresa a la altura desde la que se proyectó. Con un ángulo mayor o menor, si la rapidez inicial del proyectil es la misma, el alcance será menor, como se ilustra en la figura 3.15. También, el alcance es el mismo para ángulos que están igualmente arriba y abajo de 45° , como 30° y 60° .

Así, para lograr el alcance máximo, el proyectil *idealmente* debe proyectarse con un ángulo de 45° . Sin embargo, hasta aquí hemos despreciado la resistencia del aire. En situaciones reales, como cuando se lanza o golpea fuertemente una pelota u otro objeto, ese factor podría tener un efecto importante. La resistencia del aire reduce la rapidez del proyectil, y por tanto el alcance. El resultado es que, cuando la resistencia del aire es

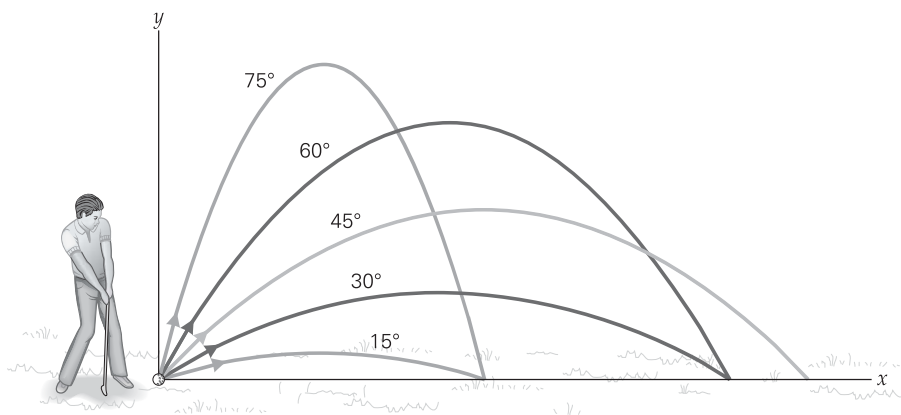
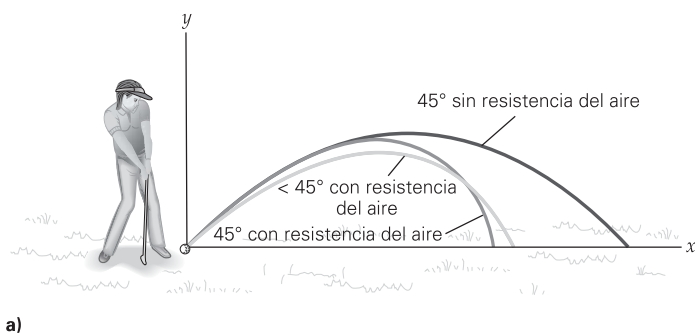


FIGURA 3.15 Alcance Para un proyectil con cierta rapidez inicial, el alcance máximo se logra idealmente con una proyección de 45° (sin resistencia del aire). Con ángulos de proyección mayores y menores que 45° , el alcance es menor, y es igual para ángulos que difieren igualmente de 45° (por ejemplo, 30° y 60°).



▲ **FIGURA 3.16 Resistencia del aire y alcance** *a)* Si la resistencia del aire es un factor, el ángulo de proyección para lograr un alcance máximo es menor que 45° . *b)* Lanzamiento de jabalina. A causa de la resistencia del aire la jabalina se lanza a un ángulo menor que 45° para lograr el máximo alcance.

factor, el ángulo de proyección para obtener el alcance máximo es menor que 45° , lo cual produce una velocidad horizontal inicial mayor (▲ figura 3.16). Otros factores, como el giro y el viento, también podrían afectar el alcance del proyectil. Por ejemplo, el *backspin* (giro retrógrado) imprime a una pelota de golf la levanta, y el ángulo de proyección para lograr el alcance máximo podría ser considerablemente menor que 45° .

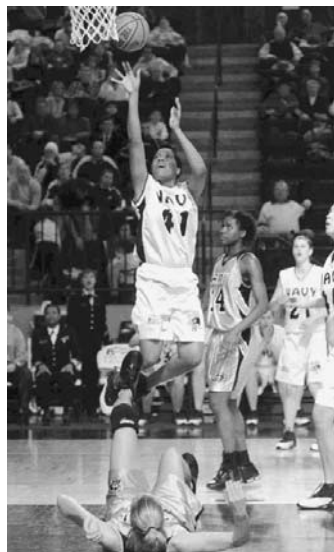
No hay que olvidar que para lograr el alcance máximo con un ángulo de proyección de 45° , los componentes de la velocidad inicial deben ser iguales, es decir, $\tan^{-1}(v_{y0}/v_{x0}) = 45^\circ$ y $\tan 45^\circ = 1$, así que $v_{y0} = v_{x0}$. Sin embargo, habría casos donde tal situación no sea posible físicamente, como lo demuestra el Ejemplo conceptual 3.9.

Ejemplo conceptual 3.9 ■ El salto más largo: teoría y práctica

En una competencia de salto de longitud, ¿el saltador normalmente tiene un ángulo de lanzamiento *a)* menor que 45° , *b)* de exactamente 45° , o *c)* mayor que 45° ? *Plantee claramente el razonamiento y los principios de física que usó para llegar a su respuesta, antes de leer el párrafo siguiente. Es decir, ¿por qué eligió esa respuesta?*

Razonamiento y respuesta. La resistencia del aire no es un factor importante aquí (aunque se toma en cuenta la velocidad del viento para establecer récords en pruebas de pista y campo). Por lo tanto, parecería que, para lograr el alcance máximo, el saltador despegaría con un ángulo de 45° . Sin embargo, hay otra consideración física. Examinemos más de cerca los componentes de la velocidad inicial del saltador (▼ figura 3.17a).

Para lograr un salto de longitud máxima, el saltador corre lo más rápidamente que puede y luego se impulsa hacia arriba con toda su fuerza, para elevar al máximo los componentes de velocidad. El componente de velocidad vertical inicial v_{y0} depende del empuje hacia arriba de las piernas del saltador; mientras que el componente de velocidad horizontal inicial v_{x0} depende principalmente de la rapidez con que se corrió hasta el punto de salto. En general, se logra una mayor velocidad corriendo que saltando, de manera que $v_{x0} > v_{y0}$. Entonces, dado que $\theta = \tan^{-1}(v_{y0}/v_{x0})$, tenemos $\theta < 45^\circ$, donde $v_{y0}/v_{x0} < 1$.



▲ **FIGURA 3.17 Atletas en acción** *a)* Para maximizar un salto de longitud, los deportistas corren tanto como sea posible, y se impulsan hacia arriba con la mayor fuerza para maximizar los componentes de velocidad (v_x y v_y). *b)* Cuando atacan la canasta y saltan para anotar, los jugadores de baloncesto parecen estar suspendidos momentáneamente, o “colgados”, en el aire.

en este caso. Por lo tanto, la respuesta es *a*; ciertamente no podría ser *c*. Un ángulo de lanzamiento típico para un salto largo es de 20 a 25°. (Si el saltador aumentara su ángulo de lanzamiento para acercarse más a los 45° ideales, su rapidez de carrera tendría que disminuir, y esto reduciría el alcance.)

Ejercicio de refuerzo. Al saltar para anotar, los jugadores de baloncesto parecen estar suspendidos momentáneamente, o “colgados”, en el aire (figura 3.17b). Explique la física de este efecto.

Ejemplo 3.10 ■ ¿Un “slap shot” es bueno?

Un jugador de hockey lanza un tiro “slap shot” (tomando vuelo con el bastón) en una práctica (sin portero) cuando está 15.0 m directamente frente a la red. La red tiene 1.20 m de altura y el disco se golpea inicialmente con un ángulo de 5.00° sobre el hielo, con una rapidez de 35.0 m/s. Determine si el disco entra en la red o no. Si lo hace, determine si va en ascenso o en descenso cuando cruza el plano frontal de la red.

Razonamiento. Primero dibuje un diagrama de la situación empleando coordenadas x - y , suponiendo que el disco está en el origen en el momento del golpe e incluyendo la red y su altura, como en la [figura 3.18](#). Note que se exageró el ángulo de lanzamiento. Un ángulo de 5.00° es muy pequeño, pero desde luego que la red no es muy alta (1.20 m).

Para determinar si el tiro se convierte en gol, necesitamos saber si la trayectoria del disco lo lleva por arriba de la red o lo hace entrar en ella. Es decir, ¿qué altura (y) tiene el disco cuando su distancia horizontal es $x = 15$ m? Que el disco vaya en ascenso o en descenso a esta distancia horizontal dependerá de cuándo alcanza su altura máxima. Las ecuaciones adecuadas deberían darnos esta información; debemos tener presente que el tiempo es el factor que vincula los componentes x y y .

Solución. Hacemos nuestra lista acostumbrada de datos,

Dado:	$x = 15.0$ m, $x_o = 0$	Encuentre:	si el disco entra en la red
	$y_{\text{net}} = 1.20$ m, $y_o = 0$		y, si lo hace, si va de subida,
	$\theta = 5.00^\circ$		o de bajada
	$v_o = 35.0$ m/s		
	$v_{x_o} = v_o \cos 5.00^\circ = 34.9$ m/s		
	$v_{y_o} = v_o \sin 5.00^\circ = 3.05$ m/s		

La posición vertical del disco en cualquier tiempo t está dada por $y = v_{y_o}t - \frac{1}{2}gt^2$, así que necesitamos saber cuánto tiempo tarda el disco en recorrer los 15.0 m que lo separan de la red. El factor que vincula los componentes es el tiempo, que se obtiene del movimiento en x :

$$x = v_{x_o}t \quad \text{o} \quad t = \frac{x}{v_{x_o}} = \frac{15.0 \text{ m}}{34.9 \text{ m/s}} = 0.430 \text{ s}$$

Entonces, al llegar al frente de la red, el disco tiene una altura de

$$y = v_{y_o}t - \frac{1}{2}gt^2 = (3.05 \text{ m/s})(0.430 \text{ s}) - \frac{1}{2}(9.80 \text{ m/s}^2)(0.430 \text{ s})^2 \\ = 1.31 \text{ m} - 0.906 \text{ m} = 0.40 \text{ m}$$

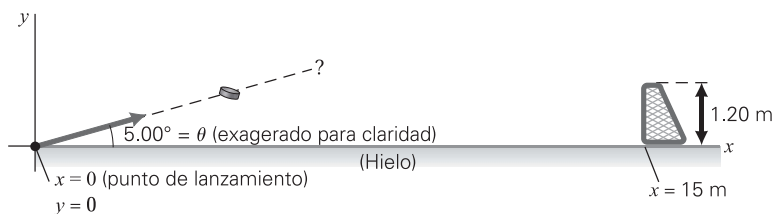
¡Gol!

El tiempo (t_a) que el disco tarda en alcanzar su altura máxima está dado por $v_y = v_{y_o} - gt_a$, donde $v_y = 0$ y

$$t_a = \frac{v_{y_o}}{g} = \frac{3.05 \text{ m/s}}{9.80 \text{ m/s}^2} = 0.311 \text{ s}$$

como el disco llega a la red en 0.430 s, va en descenso.

Ejercicio de refuerzo. ¿A qué distancia de la red comenzó a descender el disco?



◀ **FIGURA 3.18** ¿Es gol? Véase el ejemplo 3.10.