CAPÍTULO 4

MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL Y TRIDIMENSIONAL

Este capítulo presenta una combinación o síntesis de los conceptos desarrollados en los capítulos 2 y 3. Continuaremos ahora describiendo el movimiento de una partícula en términos de su posición, velocidad, y aceleración, como lo hicimos en el capítulo 2. Sin embargo, eliminamos la restricción impuesta en el capítulo 2 de que la partícula se mueve sólo en línea recta. Ahora permitimos que la partícula se mueva a través de un sistema de coordenadas tridimensional ordinario. El hecho de tener en cuenta las componentes x, y, *y* z *del movimiento se simplifica grandemente al usar una notación basada en los vectores. Vemos que las ecuaciones cinemáticas del capítulo 2 pueden aplicarse en el caso general simplemente reemplazando a la variable unidimensional con el vector correspondiente. Se tratan dos conocidos ejemplos del movimiento como aplicaciones de la técnicas vectoriales: un proyectil disparado bajo la acción de la gravedad terrestre con componentes de la velocidad tanto horizontal como vertical, y un objeto que se mueve en una trayectoria circular.*

4-1 POSICIÓN, VELOCIDAD, Y ACELERACIÓN

La figura 1 muestra una partícula en el tiempo t que se mueve en una trayectoria curva en tres dimensiones. Su *posición*, o desplazamiento desde el origen, está medida por el vector **r**. La *velocidad* está indicada por el vector **v** el cual, como demostraremos enseguida, debe ser tangente a la trayectoria de la partícula. La *aceleración* está indicada por el vector **a**, cuya dirección, como veremos explícitamente más adelante, no guarda en lo general ninguna relación única con la posición de la partícula o la dirección de **v**.

En coordenadas cartesianas, la partícula se localiza por x, y, y z, las cuales son las componentes del vector **r** que da la posición de la partícula:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \tag{1}$$

Supongamos que la partícula se mueve de una posición $\mathbf{r}_1$ en el tiempo t_1 a la posición $\mathbf{r}_2$ en el tiempo t_2, como se muestra en la figura 2*a*. Su desplazamiento (cambio de posición) en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ es el *vector* $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, y la velocidad promedio $\bar{\mathbf{v}}$ en el intervalo Δt es

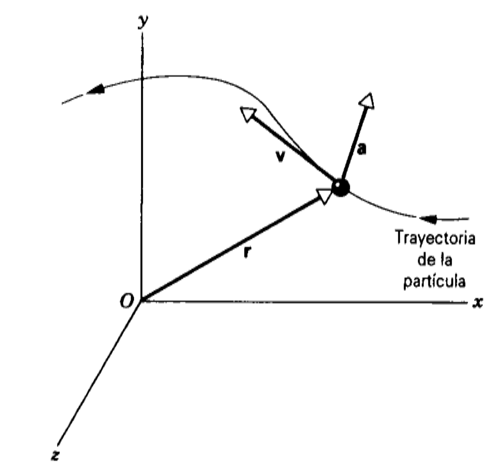

Figura 1 Vectores de posición, velocidad, y aceleración de una partícula que se mueve en una trayectoria arbitraria. Las longitudes relativas de los tres vectores son independientes entre sí, como lo son sus direcciones relativas.

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{2}$$

En la ecuación 2, el vector $\Delta\mathbf{r}$ está multiplicado por el escalar $1/\Delta t$ para dar el vector $\bar{\mathbf{v}}$. Entonces $\bar{\mathbf{v}}$ debe tener la misma dirección que $\Delta\mathbf{r}$.

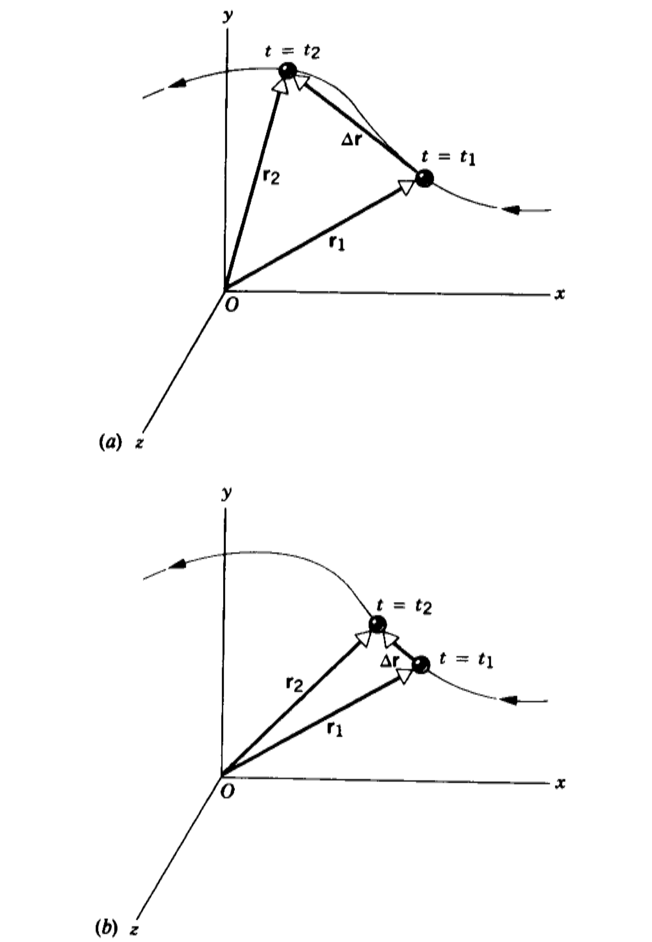

Figura 2 (*a*) en el intervalo Δt de t_1 a t_2, la partícula se mueve de la posición $\mathbf{r}_1$ a la posición $\mathbf{r}_2$. Su desplazamiento en ese intervalo es $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. (*b*) A medida que decrece el intervalo, el vector desplazamiento tiende a la trayectoria real de la partícula.

Nótese que los tres vectores, $\mathbf{r}_1$, $\Delta\mathbf{r}$, y $\mathbf{r}_2$ guardan la misma relación que los tres vectores **a**, **b**, y **s** de la figura 3 del capítulo 3. Esto es, usando el método gráfico de sumar cabeza-en-cola, $\Delta\mathbf{r}$ sumada a $\mathbf{r}_1$ da la resultante $\mathbf{r}_2$. Así, $\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{r}_1$, y, por lo tanto, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Cuando se reduce el intervalo Δt, el vector $\Delta\mathbf{r}$ tiende a la trayectoria real (como en la figura 2*b*), y resulta tangente a la trayectoria en el límite $\Delta t \to 0$, en cuyo caso la velocidad promedio tiende a la velocidad instantánea **v**:

$$\mathbf{v} = \lim \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \tag{3}$$

Por una extensión razonable de nuestra primera definición de la derivada (véase la Ec. 8 del capítulo 2), escribimos la cantidad del lado derecho de la ecuación 3 como la derivada del vector **r** respecto al tiempo:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \tag{4}$$

Al igual que el vector $\Delta\mathbf{r}$ en el límite $\Delta t \to 0$, *el vector* **v** *es tangente a la trayectoria de la partícula en cualquier punto del movimiento.*

La ecuación 4, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares. Para explorar esto, escribimos **v** en términos de sus componentes y los sustituimos en la ecuación 4 en lugar de **r** de la ecuación 1:

$$v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \tag{5}$$

Ya que dos vectores sólo pueden ser iguales si sus componentes correspondientes son iguales, al comparar los lados izquierdo y derecho de la ecuación 5 vemos que

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{6}$$

Para resumir, la sola relación vectorial de la ecuación 4 es totalmente equivalente a las tres relaciones escalares de la ecuación 6.

Extenderemos ahora directamente estos conceptos a la aceleración, como lo hicimos en la sección 2-5. La aceleración promedio es

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}, \tag{7}$$

y la aceleración instantánea se obtiene del límite cuando tiende a cero el intervalo de tiempo:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}. \tag{8}$$

Una vez más, la cantidad de la derecha puede expresarse como una derivada respecto al tiempo, y así

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}, \tag{9}$$

donde, otra vez igualando componentes,

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \tag{10}$$

Nótese que las ecuaciones vectoriales sirven tanto para simplificar la notación (la ecuación 9, por ejemplo, representa las tres relaciones dadas como ecuación 10) como para separar las componentes (a_x, por ejemplo, no tiene efecto sobre v_y o sobre v_z).

Igualmente, note de la ecuación 9 que, a causa de que **v** es un vector que tiene tanto dirección como magnitud, un cambio en la *dirección* de la velocidad puede producir una aceleración, aun si la magnitud de la velocidad no cambia. El movimiento a velocidad constante puede ser un movimiento acelerado. Esto es, puesto que $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, las componentes pueden cambiar de tal manera que la magnitud de **v** permanezca constante. El ejemplo más conocido de este caso es el movimiento circular uniforme, que estudiaremos en la sección 4-4.

Problema muestra 1 Una partícula se mueve en un plano xy de modo tal que sus coordenadas x y y varían con el tiempo de acuerdo con $x(t) = t^3 - 32t$ y $y(t) = 5t^2 + 12$. Aquí x y y están en unidades de metros cuando t está en unidades de segundos. Halle la posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula cuando $t = 3$ s.

Solución La posición está dada por la ecuación 1, e insertando las expresiones dadas para $x(t)$ y $y(t)$, obtenemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^3 - 32t)\mathbf{i} + (5t^2 + 12)\mathbf{j}.$$

Evaluando esta expresión para $t = 3$ s nos da

$$\mathbf{r} = -69\mathbf{i} + 57\mathbf{j},$$

donde las componentes están en unidades de metros.

Las componentes de la velocidad se hallan de la ecuación 6:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 32t) = 3t^2 - 32,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t.$$

Usando la ecuación 5, obtenemos

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = (3t^2 - 32)\mathbf{i} + 10t\mathbf{j},$$

y para $t = 3$ s hallamos a

$$\mathbf{v} = -5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$$

en unidades de m/s.

Las componentes de la aceleración son:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 - 32) = 6t,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10.$$

La aceleración para $t = 3$ s es

$$\mathbf{a} = 18\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$$

en unidades de m/s^2.

La figura 3 muestra la trayectoria de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 4$ s. Se han trazado en ella los vectores de posición, velocidad, y aceleración para $t = 3$ s. Nótese que **v** es tangente a la trayectoria para $t = 3$ s, y también que la dirección de **a** no tiene una relación particular con la dirección ya sea de **r** o de **v**.

4-2 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Consideraremos ahora el caso especial del movimiento con aceleración constante. Al moverse la partícula, la aceleración **a** no varía ni en magnitud ni en dirección. Por lo tanto, las componentes de **a** tampoco varían. Tenemos entonces una situación que puede describirse como la suma de tres componentes del movimiento que se presentan en forma simultánea con una aceleración constante a

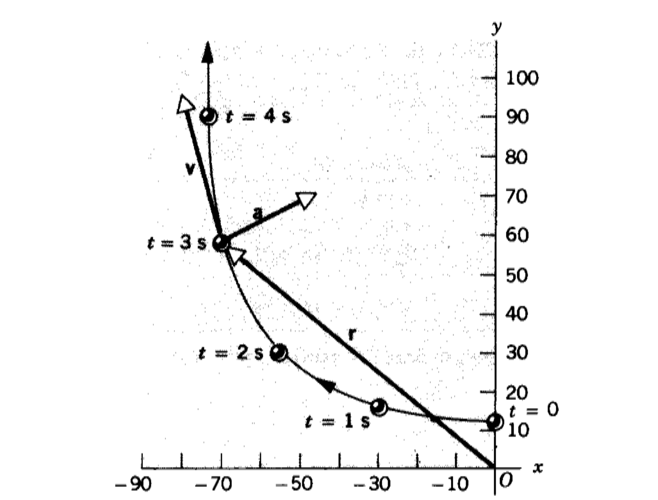

Figura 3 Problema muestra 1. Se muestra la trayectoria de una partícula en movimiento, y se indican sus posiciones para $t = 0, 1, 2, 3$, y 4 s. Para $t = 3$ s, se muestran los vectores que representan su posición, su velocidad, y su aceleración. Nótese que no existe una relación particular entre las direcciones de **r**, **v**, y **a**.

lo largo de cada una de las tres direcciones perpendiculares. La partícula se mueve, en general, a lo largo de una trayectoria curva. Esto puede ser así, aun si una de las componentes de la aceleración, digamos a_x, es cero, ya que entonces la componente correspondiente de la velocidad, digamos v_x, tiene un valor constante que pudiera *no ser* cero. Un ejemplo de esta última situación es el movimiento de un proyectil que sigue una trayectoria curva en un plano vertical y, despreciando los efectos de la resistencia del aire, está sujeto a una aceleración constante **g** dirigida hacia abajo a lo largo del eje vertical solamente.

Podemos obtener las ecuaciones generales para el movimiento con **a** constante simplemente haciendo que

$$a_x = \text{constante}, \quad a_y = \text{constante}, \quad \text{y} \quad a_z = \text{constante}$$

La partícula comienza en $t = 0$ con una posición inicial $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ y una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{i} + v_{y0}\mathbf{j} + v_{z0}\mathbf{k}$. Procedamos ahora como lo hicimos en la sección 2-6 y desarrollemos, en analogía con la ecuación 15 del capítulo 2, tres ecuaciones escalares: $v_x = v_{x0} + a_xt$, $v_y = v_{y0} + a_yt$, y $v_z = v_{z0} + a_zt$, las cuales escribimos como la ecuación vectorial única

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t. \tag{11}$$

Cuando usemos ésta o cualquier otra ecuación vectorial, recordemos que representa a tres ecuaciones escalares independientes.

El segundo término del lado derecho de la ecuación 11 implica la multiplicación de un vector por un escalar. Como discutimos en la sección 3-5, esto da un vector de

TABLA 1 ECUACIONES VECTORIALES PARA EL MOVIMIENTO CON ACELERACION CONSTANTE

Número de la ecuación	*Ecuación*	*Contiene*				
		r	$\mathbf{v}_0$	**v**	**a**	t
11	$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}t$	×	✓	✓	✓	✓
12	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	✓	×	✓	✓
13†	$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$	✓	✓	✓	✓	×
14	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v})t$	✓	✓	✓	×	✓
15	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t - \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$	✓	×	✓	✓	✓

† Esta ecuación incluye el producto escalar o producto punto de dos vectores, que ya hemos visto en la sección 3-5.

longitud *at* que apunta en la misma dirección que el vector original **a**.

Continuando como lo hicimos en la sección 2-6, podemos desarrollar cinco ecuaciones que describan el movimiento en tres dimensiones con aceleración constante. Estas cinco ecuaciones se muestran en la tabla 1, la cual deberá compararse con las cinco ecuaciones unidimensionales correspondientes en la tabla 2 del capítulo 2. Con excepción de la ecuación 13, que incluye vectores aunque es una ecuación escalar, cada ecuación de la tabla 1 representa a tres ecuaciones escalares independientes. Las componentes x de las ecuaciones 11, 12, 14, y 15 son precisamente las ecuaciones correspondientes listadas en la tabla 2 del capítulo 2. Ya que la ecuación 13 es una ecuación escalar, *no tiene componente x (o cualquier otra).*

Problema muestra 2 Un esquiador desciende por una pendiente plana de la ladera de una montaña. La pendiente de descenso (norte-sur) forma un ángulo de 10° con la horizontal. Un viento que sopla desde el oeste da al esquiador una aceleración lateral de 0.54 m/s² (véase la Fig. 4). En la esquina noroeste de la pendiente, el esquiador sale con una componente de la velocidad de 9.0 m/s cuesta abajo y una componente lateral de cero. La pendiente sin fricción tiene 125 m de longitud y 25 m de ancho. (*a*) ¿Dónde deja el esquiador la pendiente? (*b*) ¿Cuál es la velocidad del esquiador en este punto? (*Sugerencia*: La aceleración gravitatoria a lo largo de un plano que se inclina en un ángulo θ es g sen θ.)

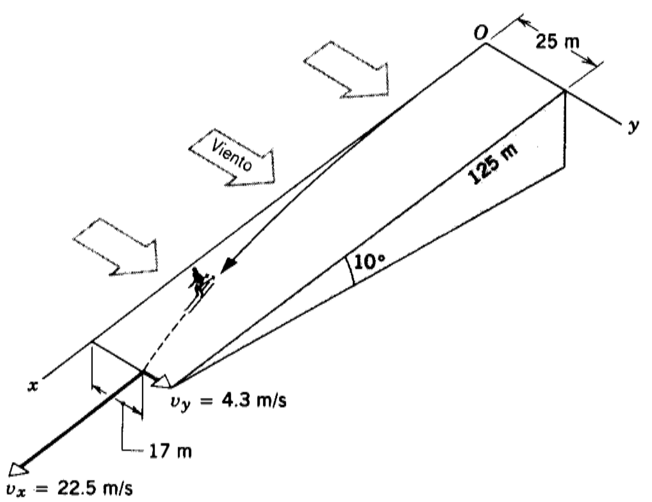

Figura 4 Problema muestra 2.

Solución (*a*) Elijamos el origen en la esquina noroeste, con el eje x cuesta abajo y el eje y lateral. Las componentes de la aceleración son

$$a_x = g \text{ sen } 10° = 1.70 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = 0.54 \text{ m/s}^2.$$

Nótese que estas componentes son evaluadas independientemente. La componente a_x es la aceleración cuesta abajo que resultaría aun si no hubiese viento lateral, y similarmente a_y es la aceleración lateral que resultaría del viento, aun cuando no hubiese una pendiente. El manejo de estas dos componentes de manera independiente es la esencia de la aritmética vectorial.

Tomemos $t = 0$ como el tiempo en que el esquiador se empuja, y se nos da que v_{x0} = 9.0 m/s y que v_{y0} = 0. Entonces

$$v_x = v_{x0} + a_x t = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)t,$$

$$v_y = v_{y0} + a_y t = 0 + (0.54 \text{ m/s}^2)t,$$

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = 0 + (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2,$$

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = 0 + 0 + (0.27 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Suponemos por ahora que el esquiador llega al fondo de la pendiente antes de dejar el borde lateral. (Podemos comprobar esta hipótesis más adelante.) Primero hallamos el tiempo en que esto ocurre (esto es, cuando x = 125 m):

$$125 \text{ m} = (9.0 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2.$$

Resolviendo la cuadrática, tenemos que t = 7.94 s o −18.5 s. Considerando por el momento sólo la raíz positiva, evaluamos la coordenada y correspondiente:

$$y = (0.27 \text{ m/s}^2)t^2 = (0.27 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s})^2 = 17.0 \text{ m}.$$

El desplazamiento lateral de 17.0 m es realmente menor que la anchura de la pendiente (25 m), como hemos supuesto. El esquiador, por lo tanto, deja el fondo de la pendiente en un punto a 17.0 m del borde oeste.

(*b*) Las componentes de la velocidad pueden obtenerse directamente para t = 7.94 s:

$$v_x = 9.0 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 22.5 \text{ m/s},$$

$$v_y = (0.54 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s}) = 4.3 \text{ m/s}.$$

Nótese que para resolver este problema hemos elegido que los ejes x y y estén en el plano de la pendiente, reduciendo por lo tanto un problema tridimensional a dos dimensiones. De haber escogido trabajar en un sistema de coordenadas en que el plano xy fuera horizontal y el eje z fuera vertical, la aceleración tendría tres componentes y el problema habría sido más complicado. Al resolver problemas, usualmente estamos en libertad de elegir la dirección de los ejes de coordenadas y la ubicación del origen a nuestra conveniencia, siempre que mantengamos de manera fija nuestra elección a través de toda la solución del problema.

¿Qué pasa con la raíz negativa, t = −18.5 s? Escribimos nuestras ecuaciones originales del movimiento comenzando en el tiempo 0, de modo que son tiempos positivos aquellos que describen el movimiento siguiente del esquiador al bajar la pendiente, y los tiempos negativos deben, por lo tanto, describir el movimiento del esquiador *antes* de pasar por la esquina de la pendiente que definimos como el origen. La solución negativa nos recuerda que pudiera haber habido una trayectoria previa que el esquiador pudiera haber seguido para pasar a través del origen en t = 0 con la velocidad correcta. Durante esta parte previa del movimiento, el esquiador habría pasado a través de x = 125 m (presumiblemente ¡esquiando cuesta arriba!) a los 18.5 s antes de llegar a la esquina noroeste. Calcule los componentes de la velocidad para t = −18.5 s y halle lo concerniente al movimiento del esquiador durante ese tiempo. ¿Cuál debería haber sido la coordenada y correspondiente a t = −18.5 s? ¿Es esto razonable? ¿Cuáles hubieran sido las coordenadas x y y mínimas alcanzadas durante el tiempo entre t = −18.5 s y t = 0?

La solución matemática de un problema físico a menudo tiene un resultado inesperado, tal como el tiempo negativo en este ejemplo. Si supusiéramos en este problema que el movimiento del esquiador empezó en t = 0, la raíz negativa carecería de interés para nosotros, pero siempre es una buena práctica examinar el significado físico de tales soluciones cuando éstas aparecen.

4-3 MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el movimiento de un proyectil. Se trata del movimiento bidimensional de una partícula lanzada oblicuamente en el aire. El movimiento ideal de una pelota de béisbol o de una pelota de golf es un ejemplo del movimiento de un proyectil. Suponemos por ahora que podemos despreciar el efecto del aire en este movimiento. En el capítulo 6 consideraremos el efecto (a menudo considerable) de la resistencia del aire en el movimiento de un proyectil.

El movimiento de un proyectil es aquél de aceleración constante **g**, dirigido hacia abajo. Aun cuando puede haber una componente horizontal de la velocidad, no hay una componente horizontal de la aceleración. Si elegimos un sistema de coordenadas con el eje y positivo verticalmente hacia arriba, podemos poner $a_y = -g$ (como en el capítulo 2, g es siempre un número *positivo*) y a_x = 0. Más aún, suponemos que $\mathbf{v}_0$ está en el plano xy, de modo que v_{z0} = 0. Puesto que a_z es también 0, la componente de la ecuación 11 nos dice que v_z es cero en todo momento y podemos, por tanto, centrar nuestra atención a lo que sucede en el plano xy.

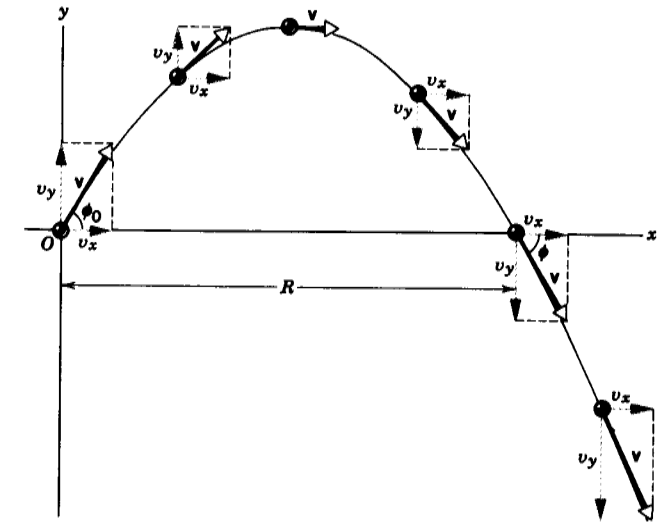

Figura 5 La trayectoria de un proyectil, mostrando la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ y sus componentes así como también la velocidad **v** y sus componentes en cinco tiempos posteriores. Nótese que $v_x = v_{x0}$ durante el vuelo. La distancia horizontal R es el alcance del proyectil.

Elijamos además que el origen de nuestro sistema de coordenadas sea el punto en el cual el proyectil comienza su vuelo (véase la Fig. 5). Por lo tanto, el origen es el punto en que la pelota deja la mano del lanzador, por ejemplo. Esta elección del origen implica que $x_0 = y_0 = 0$. La velocidad en $t = 0$, el instante en que el proyectil comienza su vuelo, es $\mathbf{v}_0$, que forma un ángulo ϕ_0 con la dirección x positiva. Las componentes x y y de $\mathbf{v}_0$ (véase la Fig. 5) son, entonces,

$$v_{x0} = v_0 \cos \phi_0 \quad \text{y} \quad v_{y0} = v_0 \text{ sen } \phi_0. \qquad (16)$$

Ya que no hay una componente horizontal de la aceleración, la componente horizontal de la velocidad es constante. Para la componente x de la ecuación 11 establecemos que a_x = 0 y $v_{x0} = v_0 \cos \phi_0$, obteniendo

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0. \qquad (17)$$

La componente horizontal de la velocidad retiene su valor inicial durante el vuelo.

La componente vertical de la velocidad cambia con el tiempo debido a la aceleración constante hacia abajo. En la ecuación 11, tomamos a las componentes y y establecemos que $a_y = -g$ y $v_{y0} = v_0$ sen ϕ_0, de modo que

$$v_y = v_{y0} + a_y t = v_0 \operatorname{sen} \phi_0 - gt. \qquad (18)$$

La componente vertical de la velocidad es la de la caída libre. (En efecto, si viéramos el movimiento de la figura 5 desde un marco de referencia que se mueva a la derecha con una velocidad v_{x0}, el movimiento sería el de un objeto lanzado vertical hacia arriba con una velocidad inicial v_0 sen ϕ_0.)

La magnitud del vector resultante de la velocidad en cualquier instante es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \qquad (19)$$

El ángulo ϕ que el vector de la velocidad forma con la horizontal en ese instante está dado por

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x}. \qquad (20)$$

El vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula en todo punto, como se muestra en la figura 5.

La coordenada x de la posición de la partícula en cualquier momento, obtenida de la componente x de la ecuación 12 (véase la tabla 1), con $x_0 = 0$, $a_x = 0$, y $v_{x0} = v_0$ cos ϕ_0, es

$$x = x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0)t. \qquad (21)$$

La coordenada y, obtenida de la componente y de la ecuación 12 con $y_0 = 0$, $a_y = -g$, y $v_{y0} = v_0$ sen ϕ_0, es

$$y = y_0 + v_{y0}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \operatorname{sen} \phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2. \qquad (22)$$

Las ecuaciones 21 y 22 nos dan x y y en función del parámetro común t, el tiempo de vuelo. Combinándolas y eliminando a t de ellas, obtenemos

$$y = (\tan \phi_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2}x^2, \qquad (23)$$

la cual relaciona a y con x y es la ecuación de la *trayectoria* del proyectil. Puesto que v_0, ϕ_0, y g son constantes, esta ecuación tiene la forma

$$y = bx - cx^2,$$

que es la ecuación de una parábola. De aquí que la trayectoria de un proyectil sea parabólica, como lo mostramos en la figura 5.

El *alcance horizontal* R del proyectil, como se muestra en la figura 5, se define como la distancia a lo largo de la horizontal cuando el proyectil retorna al nivel desde el cual fue lanzado. Podemos hallar el alcance poniendo $y = 0$ en la ecuación 23. Cuando $x = 0$ surge una solución inmediata; la otra nos da el alcance:

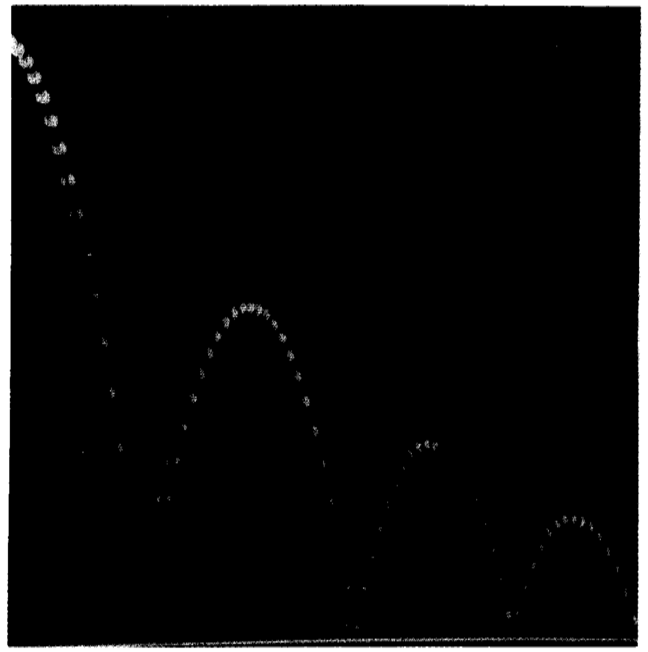

Figura 6 Una fotografía estroboscópica de una pelota de golf (que entra a la foto desde la izquierda) rebotando sobre una superficie dura. Entre los impactos, la pelota muestra la trayectoria parabólica característica del movimiento de un proyectil. ¿Por qué supone usted que la altura de los rebotes sucesivos está decreciendo? (Los capítulos 8 y 10 pueden dar la respuesta.)

$$R = \frac{2v_0^2}{g} \operatorname{sen} \phi_0 \cos \phi_0$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\phi_0, \qquad (24)$$

usando la identidad trigonométrica sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ. Nótese que, para una velocidad inicial dada, obtenemos el alcance máximo cuando $\phi_0 = 45°$, que es cuando sen $2\phi_0 = 1$.

Las soluciones que hemos obtenido representan una visión idealizada del movimiento de un proyectil. Hemos considerado un efecto importante: la gravedad; pero existe otro factor en el movimiento de un proyectil que a menudo es importante, y es la resistencia del aire. La resistencia del aire es un ejemplo de una fuerza dependiente de la velocidad; cuanto mayor sea la velocidad mayor será el efecto decelerante de la resistencia del aire. A baja velocidad, el efecto de la resistencia del aire es usualmente despreciable, pero a alta velocidad la trayectoria de un proyectil ya no describe una parábola, como en la ecuación 23, y el alcance puede ser considerablemente menor que el dado por la ecuación 24. En el capítulo 6 consideraremos los efectos de la resistencia del aire; por ahora supondremos que las ecuaciones derivadas en esta sección describen adecuadamente el movimiento de los proyectiles.

La figura 6 muestra un ejemplo de la trayectoria de un proyectil que no es afectado severamente por la resisten-

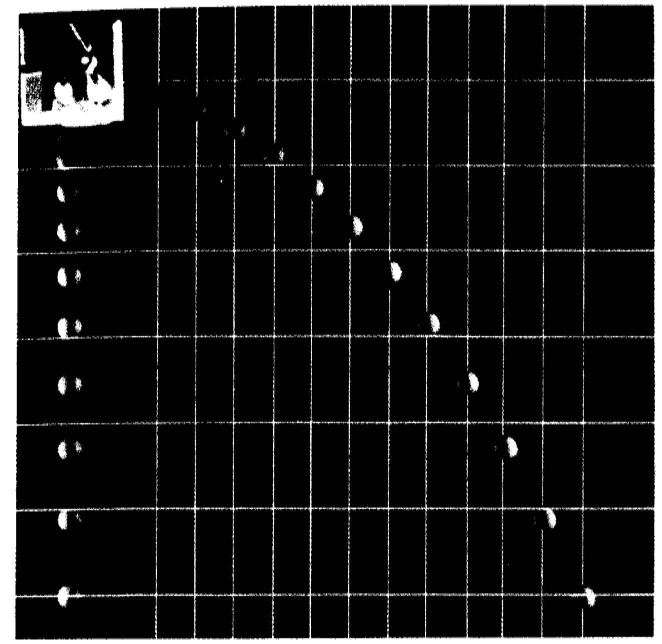

Figura 7 La bola I se deja caer desde el reposo en el mismo instante en que la bola II es disparada hacia la derecha. Nótese que ambas bolas caen a exactamente la misma tasa; el movimiento horizontal de la bola II no afecta su tasa vertical de caída. En esta fotografía estroboscópica, las exposiciones fueron tomadas a intervalos de 1/30 s. ¿Parece ser constante la velocidad horizontal de la bola II?

cia del aire. La trayectoria ciertamente parece de forma parabólica. La figura 7 muestra una comparación de los movimientos de un proyectil disparado horizontalmente y otro dejado caer en forma simultánea en caída libre. Aquí pueden verse directa las predicciones de las ecuaciones 21 y 22 cuando $\phi_0 = 0$. Nótese que (1) el movimiento horizontal del primer proyectil responde realmente a la ecuación 21: su coordenada x aumenta cantidades iguales en intervalos de tiempo iguales, independientemente del movimiento en y, y (2) los movimientos y de los dos proyectiles son idénticos: los aumentos verticales de la posición de los dos proyectiles es la misma, independientemente del movimiento horizontal de uno de ellos.

Disparo hacia un blanco en caída

En una magnífica demostración durante una conferencia, una pistola de aire es apuntada hacia un blanco elevado, el cual se deja caer en caída libre por un mecanismo de disparo mientras la "bala" sale de la boca del arma. Independientemente de la velocidad inicial de la bala, siempre da en el blanco mientras éste cae.

La manera más sencilla de entender esto es la siguiente. Si no existiera la aceleración debida a la gravedad, el

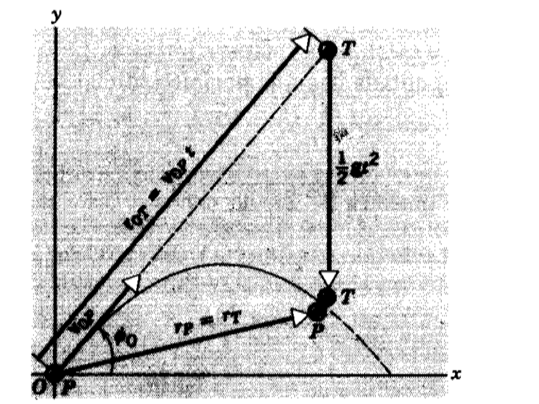

Figura 8 En el movimiento de un proyectil, su desplazamiento desde el origen para cualquier tiempo t puede considerarse como la suma de dos vectores: $\mathbf{v}_{0P}t$, dirigido a lo largo de $\mathbf{v}_{0P}$, y $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$, dirigido hacia abajo.

blanco no caería y la bala se movería a lo largo de la línea de mira directa hacia el blanco (Fig. 8). El efecto de la gravedad es causar que cada cuerpo acelere hacia abajo a la misma tasa desde la posición que de otro modo habría tenido. Por lo tanto, en el tiempo t, la bala caerá a una distancia de $\frac{1}{2}gt^2$ desde la posición que tendría a lo largo de la línea de mira y el blanco caería la misma distancia desde su posición inicial. Cuando la bala alcanza la línea de caída del blanco, estará a la misma distancia abajo de la posición inicial del blanco, y de aquí la colisión. Si la bala se mueve más rápido de lo que se muestra en la figura (v_0 más grande), tendría un alcance mayor y cruzaría la línea de caída en un punto más alto; pero puesto que llega allí más pronto, el blanco caerá una distancia correspondiente más pequeña en el mismo tiempo y chocará con ella. Un argumento similar sirve también para velocidades más lentas.

Para un análisis equivalente, usemos la ecuación 12

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}t^2$$

para describir las posiciones del proyectil y del blanco en cualquier tiempo t. Para el proyectil P, $\mathbf{r}_0 = 0$ y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, y tendremos que

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{v}_{0P}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Para el blanco T, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_{0T}$, $\mathbf{v}_0 = 0$, y $\mathbf{a} = \mathbf{g}$, conduciendo a

$$\mathbf{r}_T = \mathbf{r}_{0T} + \tfrac{1}{2}\mathbf{g}t^2.$$

Si hay una colisión, debemos tener que $\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_T$. La inspección demuestra que esto siempre ocurrirá en un tiempo t dado por $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$, esto es, en el tiempo $t (= r_{0T}/v_{0T})$ que le tomaría a un proyectil no acelerado viajar a la posición del blanco a lo largo de la línea de mira. A causa de que multiplicar un vector por un escalar nos da otro vector en la misma dirección, la ecuación $\mathbf{r}_{0T} = \mathbf{v}_{0P}t$ nos dice que $\mathbf{r}_{0T}$ y $\mathbf{v}_{0P}$ deben estar en la misma dirección. Esto es, el arma debe ser apuntada hacia la posición inicial del blanco.

Problema muestra 3 En un concurso para dejar caer un paquete sobre un blanco, el aeroplano de uno de los concursantes está volando horizontalmente a una velocidad constante de 155 km/h y a una altura de 225 m hacia un punto directamente arriba del blanco. ¿A qué ángulo de mira α debería ser soltado el paquete para que éste dé en el blanco (Fig. 9)?

Solución Elegimos un marco de referencia fijo con respecto a la Tierra, siendo su origen O el punto de liberación. El movimiento del paquete en el momento de la liberación es el mismo que el del aeroplano. Por tanto, la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ del paquete es horizontal y su magnitud es 155 km/h. El ángulo de proyección ϕ_0 es cero.

Hallamos el tiempo de la caída por medio de la ecuación 22. Con = ϕ_0 = 0 y y = −225 m esto nos da

$$t = \sqrt{-\frac{2y}{g}} = \sqrt{-\frac{(2)(-225\text{ m})}{9.8\text{ m/s}^2}} = 6.78\text{ s.}$$

Nótese que el tiempo de caída no depende de la velocidad del aeroplano con una proyección horizontal. (Véase, sin embargo, el problema 38.)

La distancia horizontal recorrida por el paquete en este tiempo está dada por la ecuación 21:

$$\begin{aligned} x = v_{x0}t &= (155\text{ km/h})(1\text{ h}/3600\text{ s})(6.78\text{ s}) \\ &= 0.292\text{ km} = 292\text{ m,} \end{aligned}$$

de modo que el ángulo de mira (Fig. 9) sería

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{x}{|y|} = \tan^{-1}\frac{292\text{ m}}{225\text{ m}} = 52°.$$

¿Parecerá parabólico el movimiento del paquete cuando es visto desde un marco de referencia fijo respecto al aeroplano? (¿Puede usted recordar haber visto películas en que las bombas caían desde un aeroplano, tomadas por una cámara, ya sea desde ese aeroplano o desde otro aeroplano que volara en un curso paralelo con la misma velocidad?)

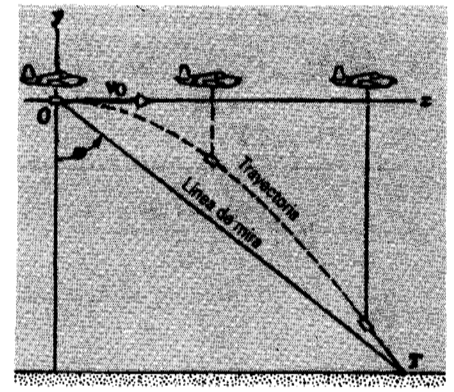

Figura 9 Problema muestra 3.

Problema muestra 4 Un jugador de fútbol soccer patea un balón con un ángulo de 36° respecto a la horizontal y una velocidad inicial de 15.5 m/s. Suponiendo que el balón se mueva en un plano vertical, halle (*a*) el tiempo t_1 en que el balón llega al punto más alto de su trayectoria, (*b*) su altura máxima, (*c*) su alcance y tiempo de vuelo, y (*d*) su velocidad cuando llega al suelo.

Solución (*a*) En el punto más alto, la componente vertical de la velocidad v_y es cero. Resolviendo la ecuación 18 para t, obtenemos:

$$t = \frac{v_0 \text{ sen } \phi_0 - v_y}{g}.$$

Con

$$v_y = 0, \quad v_0 = 15.5\text{ m/s}, \quad \phi_0 = 36°, \quad g = 9.8\text{ m/s}^2,$$

tenemos que

$$t_1 = \frac{(15.5\text{ m/s})(\text{sen }36°)}{9.8\text{ m/s}^2} = 0.93\text{ s.}$$

(*b*) La altura máxima es alcanzada en t = 0.93 s. Usando la ecuación 22,

$$y = (v_0 \text{ sen } \phi_0)t - \tfrac{1}{2}gt^2,$$

tenemos

$$\begin{aligned} y_{\text{máx}} &= (15.5\text{ m/s})(\text{sen }36°)(0.93\text{ s}) - \tfrac{1}{2}(9.8\text{ m/s}^2)(0.93\text{ s})^2 \\ &= 4.2\text{ m} \end{aligned}$$

(*c*) El alcance R puede ser obtenido por la ecuación 24:

$$R = \frac{v_0^2}{g}\text{ sen } 2\phi_0 = \frac{(15.5\text{ m/s})^2}{9.8\text{ m/s}^2}\text{ sen } 72° = 23.3\text{ m.}$$

Ponemos y = 0 en la ecuación 22 y hallamos el tiempo t_2 en que el balón retorna al suelo. Obtenemos

$$t_2 = \frac{2v_0 \text{ sen } \phi_0}{g} = \frac{2(15.5\text{ m/s})(\text{sen }36°)}{9.8\text{ m/s}^2} = 1.86\text{ s.}$$

Nótese que t_2 = $2t_1$, lo cual debe ocurrir porque se requiere el mismo tiempo para que el balón suba (llegue a su máxima altura desde el suelo) que el requerido para que el balón baje (llegue al suelo desde su máxima altura).

Podemos verificar estos resultados para que exista compatibilidad con $x = x_0 + v_{x0}t$. Cuando $t = t_2$, x será igual a R. Entonces, según la ecuación 21, $R = v_{x0}t_2 = (v_0 \cos\phi_0 t_2)$ = 23.3 m, como se esperaba.

(*d*) Para hallar la velocidad del balón cuando llegue al suelo, usemos la ecuación 17 para obtener v_x, la cual permanece constante durante todo el trayecto:

$$v_x = v_0 \cos\phi_0 = (15.5\text{ m/s})(\cos 36°) = 12.5\text{ m/s,}$$

y, según la ecuación 18, obtenemos v_y para $t = t_2$.

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \text{ sen } \phi_0 - gt = (15.5\text{ m/s})(\text{sen }36°) - (9.8\text{ m/s}^2)(1.86\text{ s}) \\ &= -9.1\text{ m/s.} \end{aligned}$$

Así pues, la velocidad tiene una magnitud dada por

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.5\text{ m/s})^2 + (-9.1\text{ m/s})^2} = 15.5\text{ m/s,}$$

y una dirección dada por

$$\tan\phi = v_y/v_x = -9.1/12.5,$$

de manera que ϕ = −36°, o sea 36° en el sentido horario del eje x. Nótese que $\phi = -\phi_0$, como esperábamos de la simetría (Fig. 5).

La velocidad final resulta ser igual a la velocidad inicial. ¿Puede usted explicarlo? ¿Es una coincidencia?

4-4 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En el movimiento de proyectiles la aceleración es constante tanto en magnitud como en dirección, pero la velocidad cambia tanto en magnitud como en dirección. Examinaremos ahora el caso especial en que una partícula se mueve a *velocidad* constante en una trayectoria circular. Como veremos, tanto la velocidad como la aceleración son de magnitud constante, pero ambas cambian de dirección continuamente. Esta situación se llama *movimiento circular uniforme*. Entre los ejemplos de esta clase de movimiento se incluyen a los satélites de la Tierra y a puntos de rotores que giran, tales como ventiladores, discos de fonógrafo y discos de computadora. De hecho, hasta el punto en que podemos vernos a nosotros mismos como partículas, participamos en un movimiento circular uniforme a causa de la rotación de la Tierra.

En la figura 10*a* se muestra la situación. Sea P_1 la posición de la partícula en el tiempo t_1 y P_2 su posición en el tiempo $t_2 = t_1 + \Delta t$. La velocidad en P_1 es $\mathbf{v}_1$, un vector tangente a la curva en P_1. La velocidad en P_2 es $\mathbf{v}_2$, un vector tangente a la curva en P_2. Los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tienen la misma magnitud v, ya que la velocidad es constante, pero sus direcciones son diferentes. La longitud de la trayectoria descrita durante Δt es la longitud del arco P_1P_2, que es igual a $r\phi$ (donde ϕ está medido en radianes) y también a $v\,\Delta t$. Entonces tenemos que

$$r\theta = v\,\Delta t. \tag{25}$$

Podemos ahora trazar a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, como en la figura 10*b*, de modo que se originen en un punto común. Tenemos la libertad de hacerlo en tanto que la magnitud y la dirección de cada vector sean las mismas que en la figura 10*a*. La figura 10*b* nos permite ver claramente el *cambio en la velocidad* al moverse la partícula desde P_1 hasta P_2. Este cambio, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v}$, es el vector que debe sumarse a $\mathbf{v}_1$ para obtener $\mathbf{v}_2$. Si representamos el cambio en la velocidad en el intervalo P_1P_2 trazando $\Delta\mathbf{v}$ desde el punto medio del arco P_1P_2, entonces $\Delta\mathbf{v}$ apuntaría hacia el centro del círculo.

Ahora el triángulo OQ_1Q_2 formado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\Delta\mathbf{v}$ es semejante al triángulo CP_1P_2 (Fig. 10*c*) formado por la cuerda P_1P_2 y los radios CP_1 y CP_2. Esto se debe a que ambos son triángulos isósceles que tienen el mismo ángulo en el vértice; el ángulo θ entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el mismo que el ángulo P_1CP_2 porque $\mathbf{v}_1$ es perpendicular a CP_1 y $\mathbf{v}_2$ es perpendicular a CP_2. Trazando una bisectriz del ángulo θ en la figura 10*b*, hallamos que

$$\tfrac{1}{2}\Delta v = v \text{ sen } \frac{\theta}{2}. \tag{26}$$

Expresemos ahora la magnitud de la aceleración promedio en el intervalo usando los resultados obtenidos en las ecuaciones 25 y 26 para Δv y Δt:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \text{ sen }(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2}{r}\frac{\text{sen }(\theta/2)}{\theta/2}. \tag{27}$$

Ahora deseamos hallar la aceleración instantánea tomando el límite de esta expresión como $\Delta t \to 0$. Cuando Δt es muy pequeña, el ángulo θ es pequeño. En este caso podemos usar la *aproximación de un ángulo pequeño*, sen $x \approx x$. (Esto es válido *solamente* cuando el ángulo está en radianes; por ejemplo, cuando x = 5° = 0.0873 rad, sen x = 0.0872.) Entonces, para ángulos pequeños sen $(\theta/2) \approx \theta/2$, y la segunda fracción del lado derecho de la ecuación 27 tiende a 1. Nótese también que, en la primera fracción del lado derecho de la ecuación 27, ni v ni r dependen de Δt y así el valor de esta fracción no es afectado por el límite. Por lo tanto, podemos obtener para la magnitud de la aceleración instantánea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{v^2}{r}\frac{\text{sen }(\theta/2)}{\theta/2} = \frac{v^2}{r}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\text{sen }(\theta/2)}{\theta/2}$$

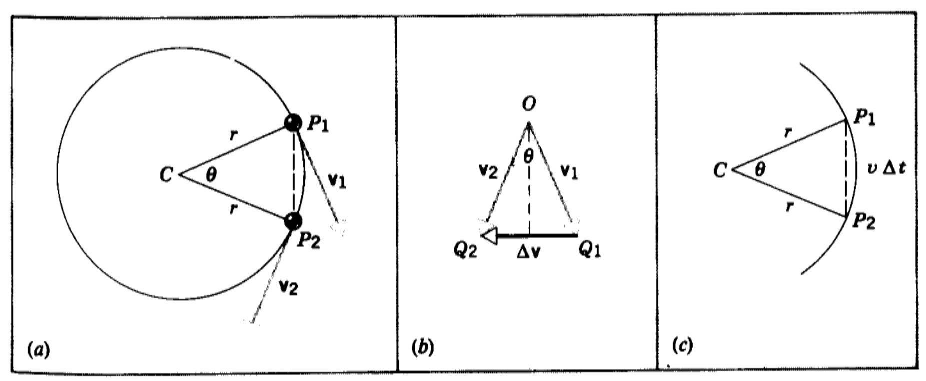

Figura 10 Movimiento circular uniforme. (*a*) La partícula viaja alrededor de un círculo con velocidad constante. Se muestra su velocidad en dos puntos P_1 y P_2. (*b*) El cambio de velocidad, que va de P_1 a P_2, es $\Delta\mathbf{v}$. (*c*) La partícula viaja a lo largo del arco P_1P_2 durante el tiempo Δt.

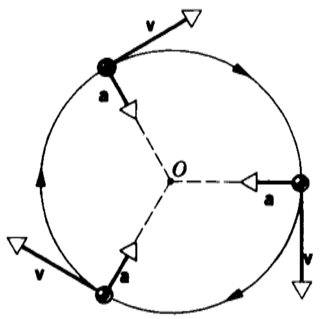

Figura 11 En el movimiento circular uniforme, la aceleración **a** está siempre dirigida hacia el centro del círculo y, por lo tanto, siempre es perpendicular a **v**.

o sea, usando la aproximación del ángulo pequeño para reemplazar al límite restante por 1,

$$a = \frac{v^2}{r}. \qquad (28)$$

Ya que la dirección de la aceleración promedio es la misma que la de $\Delta\mathbf{v}$, la dirección de **a** está siempre dirigida hacia el centro del círculo o del arco circular en el que se mueve la partícula.

La figura 11 muestra la relación instantánea entre **v** y **a** en varios puntos del movimiento. La magnitud de **v** es constante, pero su dirección cambia continuamente. Esto da lugar a una aceleración **a**, que es también constante en su magnitud pero cambia continuamente de dirección. La velocidad **v** es siempre tangente al círculo en dirección del movimiento; la aceleración **a** está siempre dirigida radialmente hacia adentro. Debido a esto, **a** se llama aceleración radial, o *centrípeta*. Centrípeta significa "que busca el centro". En la siguiente sección se da una derivación de la ecuación 28 usando vectores unitarios.

Tanto en caída libre como en el movimiento de un proyectil, **a** tiene magnitud y dirección constantes, y podemos usar las ecuaciones desarrolladas para la aceleración constante. No podemos usar estas ecuaciones para el movimiento circular uniforme porque **a** varía de dirección y, por lo tanto, no es constante.

Las unidades de la aceleración centrípeta son las mismas que las de una aceleración como consecuencia de un cambio en la magnitud de una velocidad. Dimensionalmente, tenemos que

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(\mathrm{L/T})^2}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{T}^2},$$

las cuales son las dimensiones usuales de la aceleración. Las unidades pueden ser, por lo tanto, m/s², km/h², o unidades similares de dimensión L/T².

La aceleración que resulta de un cambio en la dirección de una velocidad es tan real y tan acelerada en esencia como la que resulta de un cambio en la magnitud de una velocidad. Por definición, la aceleración es la rapidez de cambio de su velocidad con el tiempo, y la velocidad, por ser un vector, puede cambiar tanto en dirección como en magnitud. Si una cantidad física es un vector, sus aspectos direccionales no pueden ser ignorados, ya que esos efectos probarán ser en todos sentidos tan importantes y reales como los producidos por lo cambios en la magnitud.

Vale la pena recalcar en este momento que no se necesita que haya algún movimiento en la dirección de una aceleración y que, en lo general, no existe una relación fija entre las direcciones de **a** y de **v**. En la figura 12 se dan ejemplos en los que el ángulo entre **v** y **a** varía desde 0 hasta 180°. Sólo en un caso, $\theta = 0°$, está el movimiento en la dirección de **a**.

Problema muestra 5 La Luna gira alrededor de la Tierra, haciendo una revolución completa en 27.3 días. Supongamos que la órbita es circular y que tiene un radio de 238,000 millas. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la Luna hacia la Tierra?

Solución Tenemos que r = 238,000 millas = 3.82×10^8 m. El tiempo de una revolución completa, llamado periodo, es T = 27.3 d = 2.36×10^6s. La velocidad de la Luna (supuesta como constante) es, por lo tanto,

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8\ \mathrm{m})}{2.36 \times 10^6\ \mathrm{s}} = 1018\ \mathrm{m/s}.$$

La aceleración centrípeta es

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018\ \mathrm{m/s})^2}{3.82 \times 10^8\ \mathrm{m}}$$

$$= 0.00271\ \mathrm{m/s^2}, \quad \text{o tan sólo } 2.76 \times 10^{-4}\, g_n.$$

Aquí g_n (= 9.80665 m/s²) es un valor patrón de g aceptado internacional. Representa el valor aproximado de la aceleración en caída libre al nivel del mar y a una latitud de 45°. Este valor patrón se usa a menudo como una medida alternativa de la aceleración. Por ejemplo, la aceleración experimentada por los pilotos de aviones de propulsión a chorro o por los parroquianos en los juegos de un parque de diversiones se expresa a menudo de esta manera.

Problema muestra 6 Calcule la velocidad de un satélite de la Tierra, suponiendo que está viajando a una altitud h de 210 km, donde g = 9.2 m/s². (Este valor es menor que 9.8 m/s², porque g decrece con la altitud sobre la Tierra, como estudiaremos en el capítulo 16). El radio R de la Tierra es de 6370 km.

Solución Al igual que cualquier objeto libre cercano a la superficie de la Tierra, el satélite tiene una aceleración g hacia el centro de la Tierra. Es esta aceleración, junto con su velocidad tangencial, la que causa que siga una trayectoria circular. De aquí que la aceleración centrípeta sea g, y según la ecuación 28, $a = v^2/r$, tenemos que, para $a = g$ y $r = R + h$,

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

o sea

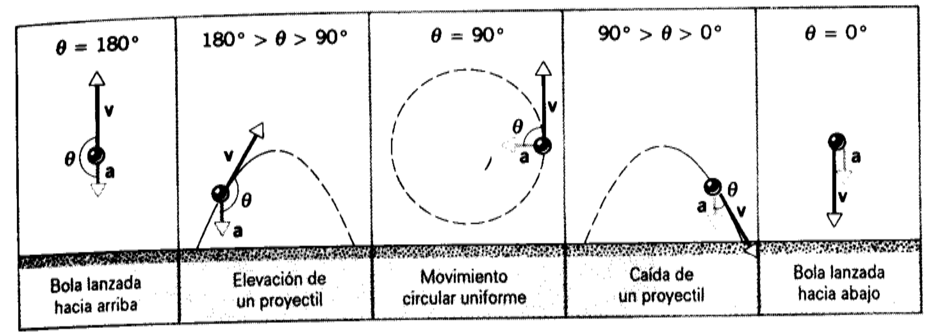

Figura 12 La relación geométrica entre **v** y **a** para varios movimientos.

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6580\ \mathrm{km})(9.2\ \mathrm{m/s^2})(10^3\ \mathrm{m/km})}$$

$$= 7780\ \mathrm{m/s} \quad \text{ó} \quad 17{,}400\ \mathrm{mi/h}.$$

A esta velocidad, el satélite requiere 1.48 h para completar una órbita.

4-5 VECTORES DE VELOCIDAD Y DE ACELERACIÓN EN EL MOVIMIENTO CIRCULAR *(Opcional)**

Como dedujimos en la sección anterior, una partícula que se mueva a velocidad constante a lo largo de un arco de un círculo experimenta una aceleración centrípeta. Aun cuando su velocidad no sea constante, todavía debe de tener una aceleración centrípeta, pero también tendrá una aceleración tangencial que cause un cambio en su velocidad tangencial. Los métodos vectoriales son útiles para relacionar las velocidades y las aceleraciones y para determinar la dirección de la aceleración resultante.

Comenzaremos por rederivar la ecuación 28 para la aceleración centrípeta a velocidad constante usando técnicas vectoriales más generales. La figura 13 muestra una partícula en movimiento circular uniforme con respecto al origen O de un marco de referencia. Para este movimiento las coordenadas polares planas r y ϕ son más útiles que las coordenadas rectangulares x y y porque r permanece constante a través del movimiento y ϕ aumenta de una manera lineal simple con el tiempo; el comportamiento de x y y durante tal movimiento es más complejo. Los dos sistemas de coordenadas se relacionan por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \qquad (29)$$

o por las relaciones recíprocas

$$x = r\cos\phi \quad \text{y} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\phi. \qquad (30)$$

En los sistemas de coordenadas rectangulares usamos los vectores unitarios **i** y **j** para describir al movimiento en el plano xy. Aquí encontramos más conveniente introducir dos nuevos vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$. Éstos, como **i** y **j**, tienen longitud unitaria y carecen de dimensiones; designan a la dirección solamente.

El vector unitario $\mathbf{u}_r$ en cualquier punto está en la dirección de r creciente en ese punto. Está dirigido radial hacia afuera del origen. El vector unitario $\mathbf{u}_\phi$ en cualquier punto está en la dirección ϕ creciente en ese punto. Es siempre tangente a un círculo con el punto como centro en dirección antihorario. Como muestra, la figura 13a, $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ forman ángulos rectos entre sí. Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ difieren de los vectores **i** y **j** en que las direcciones de $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ varían de punto a punto en el plano; los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ *no son*, entonces, vectores constantes. Por tanto, cuando tomemos derivadas de expresiones que impliquen a vectores unitarios, **i** y **j** pueden ser tratados como constantes, pero $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ no pueden serlo.

En términos de los vectores unitarios **i** y **j**, podemos escribir los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ (véase la Fig. 13b) así:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\phi + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad (31)$$

$$\mathbf{u}_\phi = \mathbf{i}\cos(\phi + \pi/2) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\phi + \pi/2)$$

$$= -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\phi + \mathbf{j}\cos\phi. \qquad (32)$$

Al escribir términos tales como $\mathbf{i}\cos\phi$, estamos multiplicando un vector por un escalar, y el orden de la multiplicación no es importante. Podríamos igual expresar este término como $(\cos\phi)\mathbf{i}$.

Si la partícula se mueve en un círculo a una velocidad constante, no tiene una componente radial de la velocidad, y el vector de velocidad está en la dirección de $\mathbf{u}_\phi$. Más aún, la

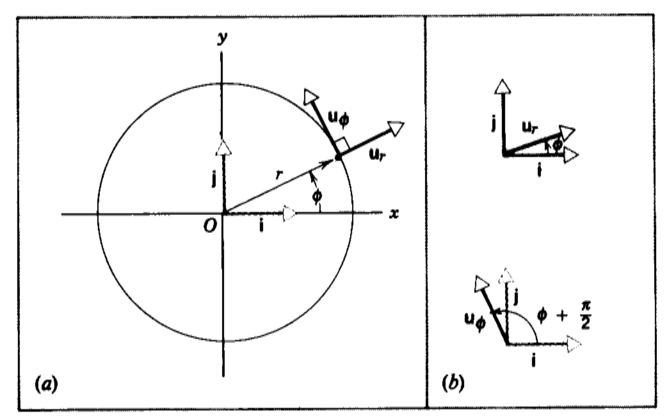

Figura 13 (a) Una partícula que se mueve en sentido antihorario en un círculo de radio r. (b) Los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\phi$ y su relación con **i** y con **j**.

* El material de esta sección puede omitirse o dejarse para más adelante, cuando estudiemos el movimiento de rotación en el capítulo 11.

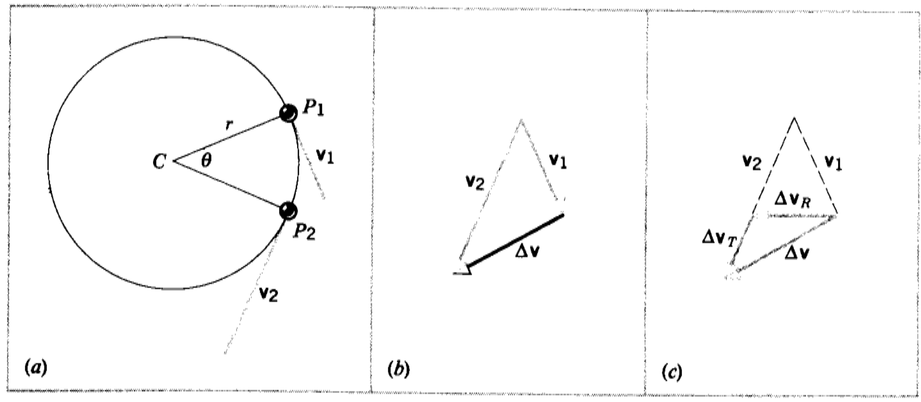

Figura 14 (*a*) En el movimiento circular no uniforme la velocidad es variable. (*b*) El cambio de la velocidad $\Delta\mathbf{v}$ al ir de P_1 a P_2. (*c*) Existen dos partes para $\Delta\mathbf{v}$: $\Delta\mathbf{v}_R$, causada por el cambio en la dirección de $\mathbf{v}$, y $\Delta\mathbf{v}_T$, causada por el cambio en la magnitud de $\mathbf{v}$. En el límite $\Delta t \to 0$, $\Delta\mathbf{v}_R$ apunta hacia el centro C del círculo y $\Delta\mathbf{v}_T$ es tangente a la trayectoria circular.

magnitud de la velocidad es precisamente la velocidad constante v, y, por lo tanto, podemos escribir que

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi. \tag{33}$$

Esto es, $\mathbf{v}$ es tangente al círculo y de magnitud constante pero de dirección cambiante.

La aceleración se deduce ahora directa:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt}. \tag{34}$$

Nótese que la velocidad constante v pasa por la diferenciación. Para hallar la derivada del vector unitario $\mathbf{u}_\phi$, usamos la ecuación 32:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i}\frac{d(\text{sen}\phi)}{dt} + \mathbf{j}\frac{d(\cos\phi)}{dt}\\ &= -\mathbf{i}\cos\phi\frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j}\,\text{sen}\phi\frac{d\phi}{dt}\\ &= (-\mathbf{i}\cos\phi - \mathbf{j}\,\text{sen}\phi)\frac{d\phi}{dt}\\ &= -\mathbf{u}_r\frac{d\phi}{dt}.\end{aligned} \tag{35}$$

Nótese que en la última etapa hemos usado la ecuación 31. Así,

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v\frac{d\phi}{dt}. \tag{36}$$

La partícula se mueve uniforme alrededor del círculo, y así $d\phi/dt$ es precisamente la distancia angular cubierta en una revolución ($2\,\pi$ radianes) dividida por el tiempo de una revolución (la distancia $2\pi r$ dividida por la velocidad v):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r}. \tag{37}$$

Por último, sustituyendo la eccuación 37 en la ecuación 36, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v\frac{v}{r}\\ &= -\mathbf{u}_r\frac{v^2}{r}.\end{aligned} \tag{38}$$

Esta ecuación nos dice que la aceleración tiene la magnitud constante de v^2/r, como obtuvimos en la ecuación 28, y que apunta radialmente hacia adentro (esto es, opuesta a $\mathbf{u}_r$). Como la partícula viaja alrededor del círculo, las direcciones de $\mathbf{u}_r$ y de $\mathbf{a}$ cambian con relación a los ejes de coordenadas xy porque la dirección radial cambia.

Aceleración tangencial en el movimiento circular

Consideraremos ahora el caso más general del movimiento circular en el que la velocidad v de la partícula en movimiento *no es* constante. De nuevo usaremos métodos vectoriales en coordenadas polares planas.

Como antes, la velocidad está dada por la ecuación 33, o sea

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

excepto que, en este caso no solamente $\mathbf{u}_\phi$ sino también la magnitud v varía con el tiempo. Recordando la fórmula para la derivada de un producto, obtenemos para la aceleración:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v\frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi\frac{dv}{dt}. \tag{39}$$

La ecuación 34 no incluyó al segundo término del lado derecho de la ecuación 39 porque se supuso que v era constante. El primer término del lado derecho de la ecuación 39 se reduce, como hemos derivado arriba, a $-\mathbf{u}_r(v^2/r)$. Podemos ahora escribir la ecuación 39 así:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T, \tag{40}$$

en la cual $a_R = v^2/r$) y $a_T = dv/dt$. El primer término, $-\mathbf{u}_r a_R$, es la componente vectorial de $\mathbf{a}$ dirigida radialmente hacia el centro del círculo y surge como consecuencia de un cambio en la *dirección* de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). El vector $\mathbf{a}_R$ y su magnitud a_R se llaman ambos *aceleración centrípeta*. El segundo término, $\mathbf{u}\phi a_T$, es la componente vectorial de $\mathbf{a}$ que es tangente a la trayectoria de la partícula y proviene de un cambio en la *magnitud* de la velocidad en movimiento circular (véase la Fig. 14). Al vector $\mathbf{a}_T$ y a su magnitud a_T se les llama (a ambos) *aceleración tangencial*.

La magnitud de la aceleración instantánea es

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2}. \tag{41}$$

Si la velocidad es constante, entonces $a_T = dv/dt = 0$ y la ecuación 40 se reduce a la ecuación 38. Cuando la velocidad v no es constante, a_T no es cero y a_R varía de punto a punto. La velocidad v puede estar cambiando de tal manera que a_T no sea constante, y entonces tanto a_T como a_R pueden variar de punto a punto.

La figura 15 muestra el rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón energético que forma una espiral hacia adentro. El electrón disminuye su paso a través del líquido de la cámara de modo que su velocidad v disminuye continuamente. Así, existe en cada punto una aceleración tangencial a_T dada por dv/dt. Aun cuando el electrón no está viajando en una trayectoria circular, pequeños arcos de la espiral se parecen mucho a los arcos de un círculo con un radio r dado. La aceleración centrípeta a en cualquier punto está entonces dada por v^2/r, donde r es el radio de la trayectoria en el punto en cuestión; tanto v como r resultan más pequeñas al perder energía la partícula. La aceleración radial del electrón se produce por un campo magnético presente en la cámara de burbujas y forma ángulos rectos con el plano de la figura 15 (véase el capítulo 34). ■

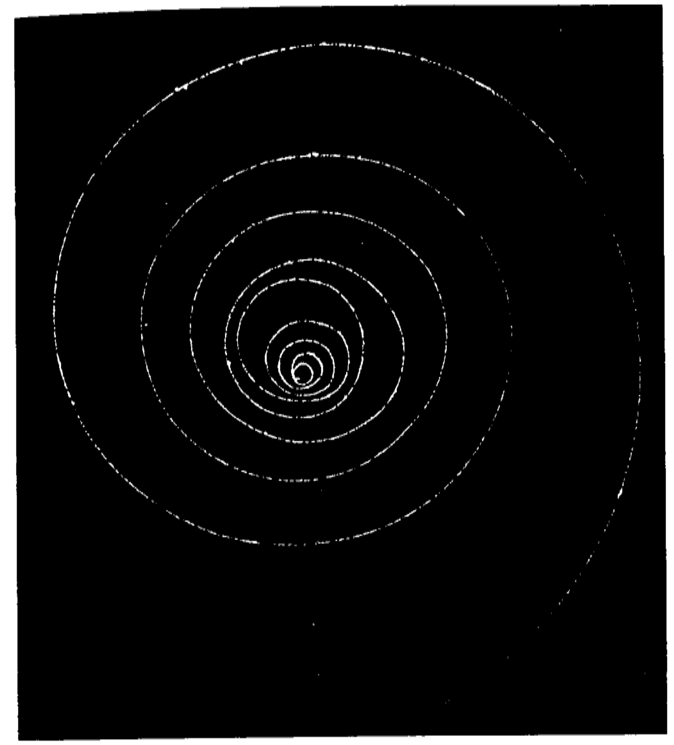

Figura 15 Rastro dejado en una cámara de burbujas de hidrógeno líquido por un electrón. Existe una aceleración radial, causada por un campo magnético, que tiende a producir una trayectoria circular, pero a causa de que el electrón también va aminorando el paso a causa de las colisiones con los átomos de hidrógeno, experimenta también una aceleración tangencial. La trayectoria resultante es una espiral.

4-6 MOVIMIENTO RELATIVO

Supongamos que usted va en un automóvil que corre en una carretera recta a una velocidad constante de 55 mi/h. Los demás pasajeros que van con usted se mueven a la misma velocidad; aun cuando ésta, con relación al terreno, es de 55 mi/h, su velocidad con relación a usted es cero. En el automóvil usted podría llevar a cabo una serie normal de experimentos de física que no se verían afectados por el movimiento uniforme del automóvil. Por ejemplo, podría lanzar directa hacia arriba una pelota (en su marco de referencia), y observaría que cae directa hacia abajo. La pelota tiene un movimiento horizontal (a causa del movimiento del automóvil), pero usted tiene el mismo movimiento horizontal y no existe un movimiento horizontal *relativo*.

Para un observador en tierra, sin embargo, el resultado es diferente. La pelota tiene una componente horizontal hacia el frente de velocidad igual a 55 mi/h y una componente vertical del movimiento que usted le dio. Sabemos que un proyectil dentro de la gravedad con tales componentes de la velocidad sigue una trayectoria parabólica. Usted y el observador en tierra usarían por lo tanto ecuaciones diferentes para describir el movimiento, pero usted estaría en concordancia con las leyes físicas seguidas por la pelota; por ejemplo, los dos deducirían el mismo valor de la aceleración en caída libre.

Si después otro automóvil corre a su lado y lo rebasa a una velocidad constante de 57 mi/h, usted observaría que este automóvil (en relación con su propio marco de referencia) se mueve lenta hacia adelante de usted a razón de 2 mi/h (= 57 mi/h - 55 mi/h). Dejemos de lado los accidentes externos, es decir, el escenario que recorren, el aire quieto contra el que tropieza el automóvil en movimiento, las ondulaciones del camino, y el ruido del motor, y consideremos únicamente a los dos automóviles. Usted no tendría manera de decidir cuál de ellos se está moviendo "realmente". Por ejemplo, el automóvil que le rebasa pudiera estar en reposo y usted pudiera estar moviéndose hacia atrás a razón de 2 mi/h; el resultado observado sería el mismo.

En esta sección consideraremos la descripción del movimiento de una sola partícula por dos observadores que estén en movimiento uniforme entre sí. Los dos observadores pudieran ser, por ejemplo, una persona que viaja en un automóvil a velocidad constante a lo largo de una recta larga de una carretera y otra persona que está parada en el terreno. La partícula que ambos están observando pudiera ser una bola arrojada en el aire o en otro automóvil en movimiento.

Llamaremos a estos dos observadores S y S'. Cada uno tiene un marco de referencia correspondiente que está unido a un sistema de coordenadas cartesianas. Por conveniencia, suponemos que los observadores están ubicados en los orígenes de sus respectivos sistemas de coordenadas. Hacemos sólo una restricción en esta situación: *la velocidad relativa entre S y S' debe ser una constante*. Nos referimos aquí a constante en magnitud y en dirección. Nótese que esta restricción no incluye al movimiento de la partícula que está siendo observada por S y por S'. La partícula no tiene necesariamente que estar moviéndose a velocidad constante, y además la partícula bien pudiera estar acelerando.

La figura 16 muestra, en un tiempo particular t, los dos sistemas de coordenadas que pertenecen a S y a S'. Con el fin de simplificar, consideraremos al movimiento en dos

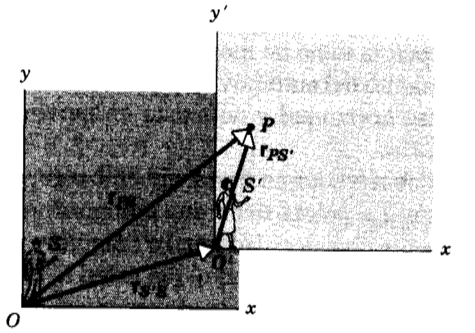

Figura 16 Los observadores S y S', que se están moviendo uno con respecto al otro, observan a la misma partícula P en movimiento. En el tiempo mostrado, ellos miden la posición de la partícula con respecto a los orígenes de sus sistemas de coordenadas, cuyas medidas son $\mathbf{r}_{PS}$ y $\mathbf{r}_{PS'}$, respectivamente. En ese mismo instante, el observador S mide la posición de S' con respecto al origen O, la cual es $\mathbf{r}_{S'S}$.

dimensiones solamente, los planos comunes xy y $x'y'$ que se muestran en la figura 16. El origen del sistema S' está ubicado con respecto al origen del sistema S por el vector $\mathbf{r}_{S'S}$. Nótese en particular el orden de los subíndices que usamos para marcar al vector: el primer subíndice indica el sistema que está siendo ubicado (en este caso, el sistema de coordenadas de S') y el segundo subíndice indica el sistema con respecto al cual hacemos la ubicación (en este caso, el sistema de coordenadas de S). El vector $\mathbf{r}_{S'S}$ se leería entonces como "la posición de S' con respecto a S."

La figura 16 muestra también a una partícula P en los planos comunes xy y $x'y'$. Tanto S como S' ubican a la partícula P con respecto a sus sistemas de coordenadas. De acuerdo con S, la partícula P está en la posición indicada por el vector $\mathbf{r}_{PS}$, mientras que de acuerdo con S' la partícula P está en $\mathbf{r}_{PS'}$. De la figura 16 podemos deducir la siguiente relación entre los tres vectores:

$$\mathbf{r}_{PS} = \mathbf{r}_{S'S} + \mathbf{r}_{PS'} = \mathbf{r}_{PS'} + \mathbf{r}_{S'S}, \tag{42}$$

donde hemos empleado la ley conmutativa de la suma de vectores para intercambiar el orden de los dos vectores. De nuevo, es preciso prestar mucha atención al orden de los subíndices. En palabras, la ecuación 42 nos dice: "la posición de P medida por S es igual a la posición de P medida por S' más la posición de S' medida por S."

Supongamos que la partícula P se mueve con velocidad $\mathbf{v}_{PS'}$ de acuerdo con S'. ¿Qué velocidad de la partícula mediría S? Para responder a esta pregunta, sólo necesitamos tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 42, lo cual da

$$\frac{d\mathbf{r}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{S'S}}{dt}.$$

La razón de cambio de la posición de cada vector da la velocidad correspondiente, de modo que

$$\mathbf{v}_{PS} = \mathbf{v}_{PS'} + \mathbf{v}_{S'S}. \tag{43}$$

Entonces, en cualquier instante, la velocidad de P según es medida por S es igual a la velocidad de P medida por S' más la velocidad relativa de S' con respecto a S. Aunque hemos ilustrado las ecuaciones 42 y 43 para el movimiento en dos dimensiones, su aplicación corresponde igualmente bien en tres dimensiones.

La ecuación 43 es una ley de la *transformación de velocidades*. Nos permite transformar una medición de velocidad hecha por un observador en un marco de referencia, digamos S', en otro marco de referencia, digamos S, siempre y cuando conozcamos la velocidad relativa entre los dos marcos de referencia. Es una ley basada firmemente tanto en el sentido común de la experiencia cotidiana como en los conceptos de espacio y tiempo que son esenciales en la física clásica de Galileo y de Newton. De hecho, la ecuación 43 se llama a menudo la *forma galileana de la ley de la transformación de velocidades.*

Consideraremos aquí sólo el caso especial muy importante en que los dos marcos de referencia se están moviendo a velocidad constante uno con respecto al otro. Esto es, $\mathbf{v}_{S'S}$ es constante tanto en magnitud como en dirección. Las velocidades $\mathbf{v}_{PS}$ y $\mathbf{v}_{PS'}$, que S y S' miden para la partícula P pudieran no ser constantes y, por supuesto, no serían, en lo general, iguales una a la otra. Sin embargo, si uno de los observadores, digamos S', mide una velocidad que sea constante en el tiempo, entonces ambos términos del lado derecho de la ecuación 43 son independientes del tiempo y, por lo tanto, el lado izquierdo de la ecuación 43 debe también ser independiente del tiempo. Entonces, si un observador concluye que la partícula se mueve a velocidad constante, entonces los demás observadores concluyen lo mismo, siempre y cuando ellos estén en marcos de referencia que se muevan a velocidad constante con respecto al marco del primer observador.

Un resultado aun más significativo se obtiene al diferenciar la ecuación 43:

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{S'S}}{dt}. \tag{44}$$

El último término de la ecuación 44 se anula, porque suponemos que la velocidad relativa de los dos marcos de referencia es una constante. Entonces

$$\frac{d\mathbf{v}_{PS}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{PS'}}{dt}.$$

Reemplazando estas dos derivadas de la velocidad con las aceleraciones correspondientes, obtenemos

$$\mathbf{a}_{PS} = \mathbf{a}_{PS'}. \tag{45}$$

Las aceleraciones de P medidas por los dos observadores, ¡son idénticas!

En el siguiente capítulo hallaremos que la aceleración es fundamental en el comportamiento dinámico de un objeto según la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, la cual relaciona a la fuerza $\mathbf{F}$, a la masa m, y a la aceleración $\mathbf{a}$. La ecuación 45 fue derivada en la circunstancia especial de que los marcos de referencia S y S' se mueven a una velocidad relativa que es constante tanto en magnitud como en dirección. Tales marcos, que pueden moverse uno con relación al otro pero en los cuales todos los observadores hallan el mismo valor para la aceleración de una partícula dada en movimiento, se llaman *marcos de referencia inerciales.* En el siguiente capítulo veremos que son especialmente importantes porque las leyes del movimiento de Newton se cumplen sólo en tales marcos.

He aquí un ejemplo de una ley de física que puede ser usada para probar los marcos de referencia inerciales. Ate una masa a un extremo de una cuerda y mantenga el otro extremo de la cuerda de modo que la masa cuelgue libremente. La atracción de la gravedad de la Tierra sobre la masa tira de ella hacia el centro de la Tierra; la dirección de la cuerda puede usarse para definir un eje vertical. Ensaye ahora el experimento en su automóvil cuando se mueve en línea recta a una velocidad constante de 55 mi/h. El resultado es el mismo: la cuerda cuelga en la misma dirección vertical. El automóvil, como el terreno, es un marco de referencia inercial. Si usted ensaya de nuevo el experimento cuando el automóvil esté acelerando, frenando, o tomando una curva, la cuerda se desvía de la vertical. Estos marcos acelerados (aun con aceleración centrípeta) son marcos no inerciales.

En realidad, la Tierra es un marco de referencia inercial sólo aproximadamente. A causa de la rotación de la Tierra sobre su eje, dos observadores en diferentes latitudes tienen una velocidad tangencial relativa que cambia su dirección con la rotación. Éste es un efecto pequeño y es despreciable en la mayoría de las circunstancias, aunque debe tomarse en cuenta en los trabajos de precisión y puede tener incalculables consecuencias en circunstancia a gran escala. Por ejemplo, la naturaleza no inercial del marco de referencia de la superficie de la Tierra causa la rotación de los vientos con respecto a un centro de alta o de baja presión que puede producir tormentas severas y destructivas. En la sección 6-8 estudiaremos otras consecuencias de hacer observaciones en marcos de referencia no inerciales.

Problema muestra 7 (*a*) La brújula de un aeroplano indica que va directo al este; el indicador de la velocidad del aire marca 215 km/h. Un viento continuo de 65 km/h está soplando directo al norte. (*a*) ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con respecto a tierra? (*b*) Si el piloto desea volar directo al este, ¿hacia dónde debe enfilar? Esto es, ¿qué deberá leerse en la brújula?

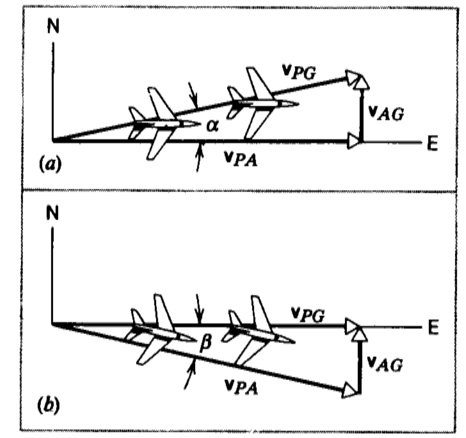

Figura 17 Problema muestra 7. (*a*) Un aeroplano, que vuela hacia el este, es empujado por el viento hacia el norte. (*b*) Para viajar hacia el este, el aeroplano debe volar hacia el viento.

Solución (*a*) En este problema la "partícula" en movimiento es el aeroplano P. Existen dos marcos de referencia, el suelo (G) y el aire (A). Hagamos que el suelo sea nuestro sistema S y que el aire sea el sistema S', y por un simple cambio de notación, podemos reescribir la ecuación 43 así:

$$\mathbf{v}_{PG} = \mathbf{v}_{PA} + \mathbf{v}_{AG}.$$

La figura 17*a* muestra estos vectores, los cuales forman un triángulo rectángulo. Los términos son, en secuencia, la velocidad del aeroplano con respecto al suelo, la velocidad del aeroplano con respecto al aire, y la velocidad del aire con respecto al suelo (esto es, la velocidad del viento). Nótese la orientación del aeroplano, que es congruente con la lectura directo al este en la brújula.

La magnitud de la velocidad del suelo se halla de

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215\text{ km/h})^2 + (65\text{ km/h})^2} = 225\text{ km/h}.$$

El ángulo en la figura 17*a* se deduce de

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1}\frac{65\text{ km/h}}{215\text{ km/h}} = 16.8°.$$

Entonces, con respecto al suelo, el aeroplano está volando a 225 km/h en una dirección 16.8° NE. Nótese que la velocidad respecto al suelo es mayor que la velocidad respecto al aire.

(*b*) En este caso el piloto debe volar hacia el viento de modo que la velocidad del aeroplano con respecto a tierra apunte hacia el este. El viento permanece sin cambio y el diagrama vectorial que representa a la ecuación 43 es el que se muestra en la figura 17*b*. Nótese que los tres vectores todavía forman un triángulo rectángulo, como lo hicieron en la figura 17*a*, pero en este caso la hipotenusa es v_{PA} en lugar de v_{PG}.

La velocidad del piloto respecto al suelo es ahora

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215\text{ km/h})^2 - (65\text{ km/h})^2} = 205\text{ km/h}.$$

Como lo indica la orientación del aeroplano en la figura 17*b*, el piloto debe volar hacia el viento según un ángulo β dado por

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{65\text{ km/h}}{215\text{ km/h}} = 17.6°.$$

Nótese que, volando hacia el viento como el piloto lo ha hecho, la velocidad respecto al terreno es ahora menor que la velocidad respecto al aire.

Movimiento relativo a alta velocidad *(Opcional)*

Los argumentos anteriores acerca del movimiento relativo forman la piedra angular de la mecánica newtoniana, que comenzaremos a estudiar en el capítulo 5. No imponen una restricción en la velocidad relativa de los marcos de referencia (mientras sea constante) o en la velocidad del objeto que está siendo observado. Dos siglos después de Newton, Albert Einstein trató de imaginar el resultado de aplicar la ecuación 43 a un rayo de luz que viaja a una velocidad de c = 299,792,458 m/s en el vacío. Supongamos que el observador S' está viendo un rayo de luz que viaja a razón de c en la dirección x' positiva. Hagamos que S' se mueva con relación a S, de nuevo en la dirección x' positiva, a una velocidad $v_{S'S}$ = 1 m/s. ¿Qué velocidad observaría S para el rayo de luz? La mecánica newtoniana respondería de acuerdo con la ecuación 43: v_{PS} = 299,792,458 m/s + 1 m/s = 299,792,459 m/s.

Einstein estudió a fondo sus libros de texto de física. Sabía lo que la mecánica newtoniana tenía que decir acerca de los observadores en movimiento relativo, mirando a los rayos de luz. También sabía que un rayo de luz no es un objeto ordinario en movimiento. Un rayo de luz viaja de una manera especial. La luz es una radiación electromagnética y puede ser analizada en términos de los campos magnético y eléctrico que la constituyen. Un campo eléctrico en movimiento crea un campo magnético, y un campo magnético en movimiento crea a su vez un campo eléctrico. Así, los campos eléctrico y magnético de la luz en movimiento esencialmente se autogeneran conforme el rayo viaja. Si la ecuación 43 fuera válida para los rayos de luz, razonó Einstein, el observador S podría emitir un rayo de luz en dirección x con velocidad c, y el observador S' podría viajar en dirección x relativa a S a razón de $v_{S'S} = c$ y atrapar al rayo de luz. Precisamente, como en el caso de un automóvil que viajaba a su lado a la misma velocidad que el automóvil de usted, al observador S' le parecería que el rayo de luz está en reposo. Para Einstein esto fue una terrible contradicción: ¿cómo podía un rayo de luz, el cual está constituido fundamentalmente de campos electromagnéticos *en movimiento*, ser alguna vez observado "en reposo"?

Einstein propuso lo que para él era una solución obvia a este dilema: ningún rayo de luz puede jamás ser observado "en reposo". Por lo tanto, se debe deducir absolutamente que la ecuación 43 es errónea cuando se aplica a velocidades cercanas a c. Einstein llegó todavía un paso más adelante: afirmó que tanto S como S' deben medir precisamente el mismo valor que el de la velocidad de la luz, *¡sin importar cuáles sean sus velocidades relativas!* Esta aseveración parece contraria al sentido común y a las predicciones de la ecuación 43; si dos observadores se están moviendo a una velocidad relativa de 0.9999999c, ¿cómo pueden ambos medir la misma velocidad de c para un rayo de luz emitido por uno de ellos?

Dejaremos hasta el capítulo 21 la descripción matemática completa de cómo sucede esto; por ahora, daremos una pista breve en el caso especial de que todas las velocidades sean en la dirección x (ó x'). He aquí ahora el resultado de Einstein para la transformación de las velocidades:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'}v_{S'S}/c^2}. \tag{46}$$

Nótese la belleza de este resultado. Cuando $v_{PS'}$ y $v_{S'S}$ son pequeñas (comparadas con c), el denominador de la ecuación 46 es muy cercano a 1 y la ecuación 46 se reduce a la ecuación 43. Con una velocidad baja, la transformación galileana de la velocidad arroja resultados aceptables. Cuando $v_{PS'} = c$ (S' está observando un rayo de luz) entonces la ecuación 46 da $v_{PS} = c$ *no importa cuál sea el valor de* $v_{S'S}$. Todos los observadores miden el mismo valor en la velocidad de un rayo de luz, no importa cuáles sean sus velocidades relativas.

La aseveración de Einstein, y la cinemática y la mecánica que se deducen de ella, no requieren que abandonemos la física newtoniana. En su lugar, nos advierte que restrinjamos nuestros cálculos newtonianos a velocidades muy pequeñas en comparación con c. Para los objetos en movimiento que normalmente encontramos, vamos bien sin esta restricción. Aun un cohete de alta velocidad ($v = 10^4$ m/s), uno de los artefactos más rápidos construidos por el ser humano, tiene una velocidad que es mucho menor que c (3×10^8 m/s), de modo que podemos usar con seguridad la fórmula galileana sin un error significativo. Las partículas tales como los electrones o los protones pueden, sin embargo, ser aceleradas a velocidades que están muy cerca de c. A estas altas velocidades, debe usarse una nueva clase de física, con nuevas ecuaciones de cinemática y de dinámica. Esta nueva física es la base de la teoría especial de la relatividad, que estudiaremos más a fondo en el capítulo 21. ■

PREGUNTAS

1. ¿Puede la aceleración de un cuerpo cambiar su dirección sin haber un cambio de dirección en la velocidad?
2. Sean **v** y **a** representantes de la velocidad y de la aceleración, respectivamente, de un automóvil. Describa las circunstancias en que *(a)* **v** y **a** son paralelos; *(b)* **v** y **a** son antiparalelos; *(c)* **v** y **a** son perpendiculares entre sí; *(d)* **v** es cero pero **a** no lo es; *(a)* **a** es cero pero **v** no lo es.
3. En salto de anchura, llamado a veces salto largo, ¿tiene importancia qué tan alto se salte? ¿Qué factores determinan el trecho del salto?
4. ¿Por qué el electrón de un haz de un cañón de electrones cae a causa de la gravedad tanto como una molécula de agua en el chorro de una manguera? Supóngase un movimiento inicial horizontal en cada caso.
5. ¿En qué punto o puntos de su trayectoria tiene un proyectil su mínima velocidad? ¿Y su máxima?
6. La figura 18 muestra la trayectoria seguida por un *Learjet* de la NASA en una carrera diseñada para simular las condiciones de baja gravedad durante un corto periodo de tiempo. Dé un argumento que demuestre que, si el aeroplano sigue una trayectoria parabólica partícular, los pasajeros experimentarán la sensación de ingravidez.

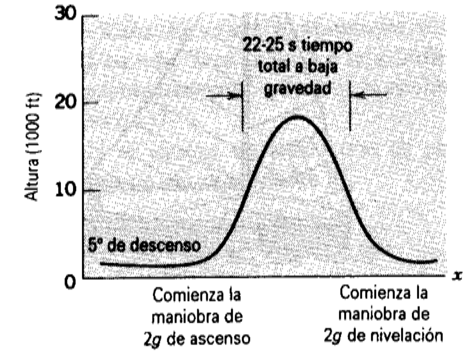

Figura 18 Pregunta 6

7. Un obús es disparado *desde el nivel* del terreno. El ángulo de disparo que producirá el alcance más largo es menor de 45°; esto es, una trayectoria más plana tiene un alcance más largo. Explique por qué.
8. Consideremos un proyectil en la cima de su trayectoria. *(a)* ¿Cuál es su velocidad en términos de v_0 y ϕ_0? *(b)* ¿Cuál es su aceleración? *(c)* ¿Cómo se relaciona la dirección de su aceleración con la de su velocidad?
9. En la figura 19 se muestran las trayectorias de tres balones pateados. Escoja la trayectoria para la cual *(a)* el tiempo de vuelo es el menor, *(b)* la componente vertical de la velocidad al patearlo es la más grande, *(b)* la componente horizontal de la velocidad al patearlo es la más grande, y *(d)* la velocidad de despegue es la menor. Desprecie la resistencia del aire.

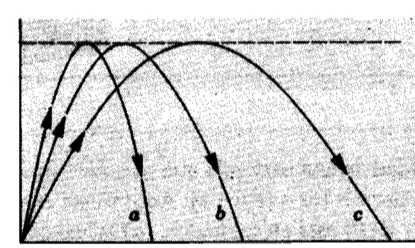

Figura 19 Pregunta 9.

10. Un rifle es apuntado estando su cañón horizontal. Demuestre que, para el mismo alcance, el disparo será demasiado alto cuando se disparare ya sea cuesta arriba o cuesta abajo. (Véase "A Puzzle in Elementary Ballistics", por Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, abril de 1983, p.246).
11. En su libro *Sport Science*, Peter Brancazio, refiriéndose a proyectiles tales como pelotas de béisbol y de golf, escribe: "En igualdad de condiciones, un proyectil viajará más lejos en un día caluroso que en un día frío, más lejos en una altitud elevada que al nivel del mar, más lejos en aire húmedo que en aire seco". ¿Cómo puede usted explicar estas afirmaciones?
12. Una gráfica de altura contra tiempo de un objeto lanzado vertical hacia arriba es una parábola. La trayectoria de un proyectil, lanzado hacia arriba pero no verticalmente hacia arriba, es también una parábola. ¿Es esto una coincidencia? Justifique su respuesta.
13. Las piezas de artillería de largo alcance no se colocan en el ángulo de "alcance máximo" de 45°, sino en ángulos de elevación más grandes, en el intervalo de 55° a 65°. ¿Qué hay de malo con los 45°?
14. En el movimiento de proyectiles en que la resistencia del aire sea despreciable, ¿es alguna vez necesario considerar el movimiento tridimensional en lugar del bidimensional?
15. ¿Es posible acelerar cuando se está viajando a velocidad constante? ¿Es posible rodear una curva con aceleración cero? ¿Y con aceleración constante?
16. Describa cualitativamente la aceleración que actúa sobre un abalorio que, deslizándose a lo largo de un alambre sin fricción, se mueve hacia adentro a velocidad constante a lo largo de una espiral.
17. Demuestre que, tomando en cuenta la rotación y la revolución de la Tierra, un libro que está sobre la mesa se mueve más rápido durante la noche que durante el día. ¿En qué marco de referencia es verdad esta aseveración?
18. Un aviador, al salir después de descender en picada, sigue el arco de un círculo y se dice que "se salió a 3g" al salir del clavado. Explique lo que significa esto.
19. Podría estar representada la aceleración de un proyectil en términos de una componente radial y una componente tangencial en cada punto del movimiento? De ser así, ¿existe alguna ventaja con esta representación?
20. Una tubería de forma rectangular con esquinas redondeadas se coloca en un plano vertical, como se muestra en la figura 20. Se introducen dos bolas de acero en la esquina superior derecha. Una viaja por el conducto AB y la otra por el conducto CD. ¿Cuál llegará más pronto a la esquina inferior izquierda?
21. Si la aceleración de un cuerpo es constante en un marco de referencia dado, ¿es necesaria constante en cualquier otro marco de referencia?
22. Un muchacho que está sentado en un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante arroja una pelota al aire directa hacia arriba. ¿Caerá la pelota detrás de él? ¿Enfrente de él? ¿En sus manos? ¿Qué sucede si el carro acelera hacia adelante o pasa por una curva cuando la pelota está en el aire?
23. Una mujer que está en la plataforma trasera de un tren que se mueve a velocidad constante deja caer una moneda mientras se inclina sobre el barandal. Describir la trayectoria de la moneda según la ve *(a)* la mujer que va en el tren, *(b)* una persona que está parada sobre el suelo cerca de la vía, y *(c)* una persona que viaja en un segundo tren que se mueve en la dirección opuesta al primer tren por una vía paralela.
24. Un elevador está descendiendo a velocidad constante. Un pasajero deja caer una moneda al suelo. ¿Qué ace-

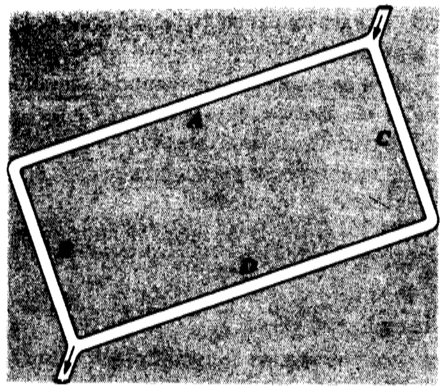

Figura 20 Pregunta 20.

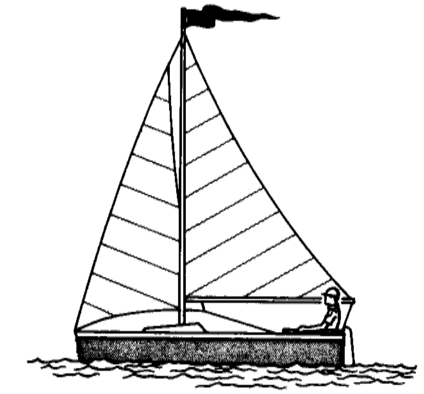

Figura 21 Pregunta 28.

leración observarían en la moneda (*a*) el pasajero y (*b*) una persona en reposo con respecto al pozo o base del elevador.

25. Se está recogiendo agua en una cubeta a partir de una salida estable de una llave. ¿Cambiará la razón a la que se está llenando la cubeta si comienza a soplar un viento horizontal estable?

26. Un autobús tiene un parabrisas vertical y viaja bajo la lluvia a una velocidad v_b. Las gotas de lluvia caen verticalmente con una velocidad terminal v_t. ¿Con qué ángulo golpean las gotas de lluvia al parabrisas?

27. Durante una lluvia estable las gotas están cayendo verticalmente. Con objeto de ir bajo la lluvia de un lugar a otro de manera tal que se tope con el menor número de gotas de lluvia, ¿se movería usted a la mayor velocidad posible, a la menor velocidad posible, o a una velocidad intermedia? (Véase "An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", por S. A. Stern, *American Journal of Physics*, Septiembre de 1983, pág. 815).

28. ¿Cuál es el error de la figura 21? El bote está navegando con el viento.

29. La transformación galileana de la velocidad, ecuación 43, es tan instintivamente conocida en la experiencia cotidiana que a veces se asegura que "es obviamente correcta, no requiere ser demostrada". Muchas refutaciones de la teoría de la relatividad así llamadas se han basado en esta afirmación. ¿Cómo podría usted refutar a alguien que hiciera tal afirmación?

PROBLEMAS

Sección 4-1 Posición, velocidad, y aceleración

1. Un aeroplano vuela 410 mi al este desde la ciudad *A* hasta la ciudad *B* en 45 min y luego 820 mi al sur desde la ciudad *B* hasta la ciudad *C* en 1 h 30 min. (*a*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección del vector de desplazamiento que representa a la totalidad del viaje? ¿Cuáles son (*b*) el vector de la velocidad promedio y (*c*) la velocidad promedio del viaje?

2. La posición de una partícula que se mueve en un plano *xy* está dada por $\mathbf{r} = (2t^3 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^4)\mathbf{j}$. Aquí *r* está en metros y *t* está en segundos. Calcule (*a*) **r**, (*b*) **v**, y (*c*) **a** cuando $t = 2$ s.

3. En 3 h 24 min, un globo va a la deriva 8.7 km N, 9.7 km E, y 2.9 km en elevación desde el punto de salida sobre el suelo. Halle (*a*) la magnitud de su velocidad promedio y (*b*) el ángulo que su velocidad promedio forma con la horizontal.

4. La velocidad de una partícula que se mueve en el plano *xy* está dada por $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$. Aquí **v** está en metros por segundo y $t(>0)$ está en segundos. (*a*) ¿Cuál es la aceleración cuando $t = 3$ s? (*b*) ¿Cuándo, si alguna vez, es la aceleración cero? (*c*) ¿Cuándo (si sucede) es cero la velocidad? (*d*) ¿Cuándo (si sucede) es la rapidez igual a 10 m/s?

Sección 4-2 Movimiento con aceleración constante

5. En un tubo de rayos catódicos se proyecta un haz de electrones horizontalmente a una velocidad de 9.6×10^8 cm/s a una región entre un par de placas horizontales de 2.3 cm de longitud. Un campo eléctrico entre las placas causa una aceleración constante de los electrones hacia abajo con magnitud de 9.4×10^{16} cm/s². Halle (*a*) el tiempo requerido para que los electrones pasen a través de las placas, (*b*) el desplazamiento vertical del haz al pasar por las placas, y (*c*) las componentes horizontal y vertical de la velocidad del rayo cuando emerge de las placas.

6. Un velero sobre hielo se desliza sobre la superficie de un lago congelado con una aceleración constante producida por el viento. En cierto momento su velocidad es $6.30\mathbf{i} - 8.42\mathbf{j}$ en m/s. Tres segundos más tarde el velero se detiene instantáneamente. ¿Cuál es la aceleración durante este intervalo?

7. Una partícula se mueve de modo que su posición en función del tiempo es, en unidades SI,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

Escriba las expresiones para (*a*) su velocidad y (*b*) su aceleración, ambas en función del tiempo. (*c*) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la partícula?

8. Una partícula sale del origen en $t = 0$ a una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = 3.6\mathbf{i}$, en m/s. Experimenta una aceleración constante $\mathbf{a} = -1.2\mathbf{i} - 1.4\mathbf{j}$, en m/s². (*a*) ¿En qué tiempo llega la partícula a su coordenada *x* máxima? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la partícula en ese momento? (*c*) ¿Dónde está la partícula en ese momento?

9. Una partícula *A* se mueve a lo largo de la línea $y = d$ (30 m) con una velocidad constante $\mathbf{v}(v = 3.0$ m/s) dirigida paralelamente al eje *x'* positivo (Fig. 22). Una segunda partícula *B* comienza en el origen con velocidad cero y aceleración constante $\mathbf{a}$ ($a = 0.40$ m/s²) en el mismo instante en que la partícula *A* pasa el eje *y*. ¿Qué ángulo θ entre **a** y el eje *y* positivo resultaría en una colisión entre estas dos partículas?

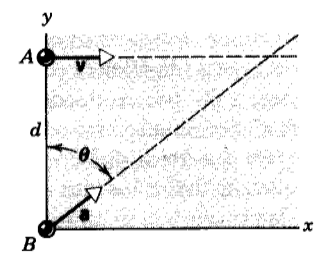

Figura 22 Problema 9.

10. Una pelota se deja caer desde una altura de 39.0 m. El viento está soplando horizontalmente e imparte una aceleración constante de 1.20 m/s a la pelota. (*a*) Demuestre que la trayectoria de la pelota es una línea recta y halle los valores de *R* y de θ en la figura 23. (*b*) ¿Qué tanto tiempo le toma a la pelota llegar al suelo? (*c*) ¿A qué velocidad golpea la pelota al suelo?

Sección 4-3 Movimiento de proyectiles

11. Una pelota rueda fuera del borde de una mesa horizontal de 4.23 ft de altura. Golpea al suelo en un punto 5.11 ft horizontalmente lejos del borde de la mesa. (*a*) ¿Durante cuánto tiempo estuvo la pelota en el aire? (*b*) ¿Cuál era su velocidad en el instante en que dejó la mesa?

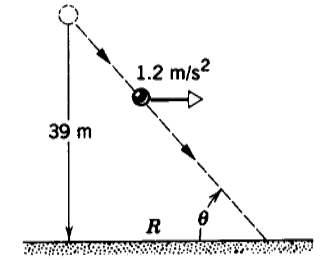

Figura 23 Problema 10.

12. Los electrones, como todas las formas de materia, caen bajo la influencia de la gravedad. Si un electrón es proyectado horizontalmente a una velocidad de 3.0×10^7 m/s (un décimo de la velocidad de la luz), ¿qué tan lejos caerá al atravesar 1 m de distancia horizontal?

13. Un dardo es arrojado horizontalmente hacia el centro del blanco, punto *P* del tablero, con una velocidad inicial de 10 m/s. Se clava en el punto *Q* del aro exterior, verticalmente abajo de *P*, 0.19 s más tarde; véase la figura 24. (*a*) ¿Cuál es la distancia *PQ*? (*b*) ¿A qué distancia del tablero estaba parado el jugador?

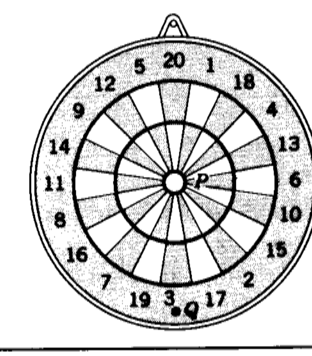

Figura 24 Problema 13.

14. Un rifle se apunta horizontalmente hacia un blanco alejado 130 m. La bala golpea el blanco 0.75 in abajo del punto de mira. (*a*) ¿Cuál es el tiempo de trayecto de la bala? (*b*) ¿Cuál es la velocidad de la bala en la boca del arma?

15. Un proyectil se dispara horizontalmente desde un cañón ubicado a 45.0 m sobre un plano horizontal con una velocidad en la boca del cañón de 250 m/s. (*a*) ¿Cuánto tiempo permanece el proyectil en el aire? (*b*) ¿A qué distancia horizontal golpea el suelo? (*c*) ¿Cuál es la magnitud de la componente vertical de su velocidad al golpear el suelo?

16. Una bola de béisbol deja la mano del lanzador horizontalmente a una velocidad de 92 mi/h. La distancia al bateador es de 60.0 ft. (*a*) ¿Cuánto tiempo le toma a la bola viajar los primeros 30.0 ft horizontalmente? ¿Los segundos 30 ft? (*b*) ¿A qué distancia cae la bola bajo la acción de la gravedad durante los primeros 30.0 ft de su viaje horizontal? (*c*) ¿Durante los segundos 30.0 ft? (*d*) ¿Por qué no son