

## Movimiento en dos y tres dimensiones

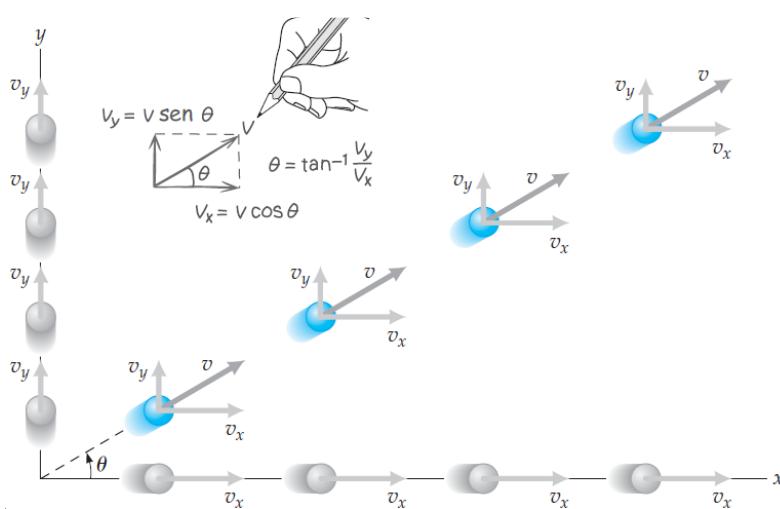


Figura 1a

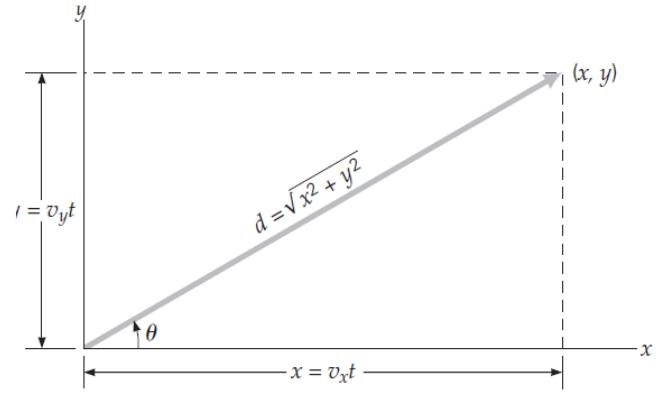
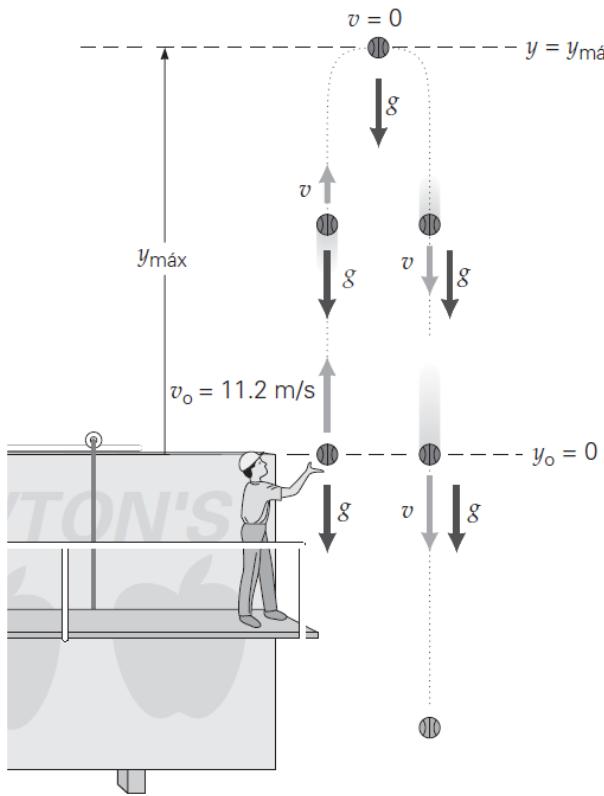


Figura 1b

### Enunciados

1. Un niño parado sobre un puente lanza una piedra verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 14.7 m/s, hacia el río que pasa por abajo. Si la piedra choca contra el agua 2.00 s después, ¿a qué altura está el puente sobre el agua?
2. El tiempo de reacción de una persona puede medirse pidiendo a otra persona que deje caer una regla (sin previo aviso), cuya base está a la altura del pulgar y el índice de la primera persona, y entre ellos, como se muestra en la figura. La primera persona sujeta lo antes posible la regla que cae, y se toma nota de la longitud de la regla que queda por debajo del dedo superior. Si la regla desciende 18.0 cm antes de ser atrapada, que tiempo de reacción tiene la persona?
3. Un trabajador que está parado en un andamio junto a una valla lanza una pelota verticalmente hacia arriba. La pelota tiene una velocidad inicial de 11.2 m/s cuando sale de la mano del trabajador en la parte más alta de la valla (figura). a) ¿Qué altura máxima alcanza la pelota sobre la valla? b) ¿Cuánto tarda en llegar a esa altura? c) ¿Dónde estará la pelota en t = 2.00 s?



$$x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$y = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

$$v_x = v_{x_0} + a_x t$$

$$v_y = v_{y_0} + a_y t$$

Figura 2

4. El Mars Polar Lander se lanzó en enero de 1999 y se perdió cerca de la superficie marciana en diciembre de 1999. No se sabe qué pasó con esa nave espacial. Supongamos que se dispararon los retro-cohetes y luego se apagaron, y que la nave se detuvo para después caer hasta la superficie desde una altura de 40 m. (Muy improbable, pero supongamos que así fue.) Considerando que la nave está en caída libre, ¿con qué velocidad hizo impacto con la superficie?

Movimiento en dos dimensiones.

Las componentes del movimiento a) La velocidad (y el desplazamiento) de un movimiento rectilíneo uniforme —el de la pelota azul oscuro— podría tener componentes x y y ( $v_x$  y  $v_y$ , como indica el dibujo a lápiz) debido a la orientación que

se eligió para los ejes de coordenadas. Observe que la velocidad y el desplazamiento de la pelota en la dirección x son exactamente los que tendría una pelota que rueda a lo largo del eje x con una velocidad uniforme  $v_x$ . Se cumple una relación similar para el movimiento de la pelota en la dirección y. Puesto que el movimiento es uniforme, el cociente  $v_y/v_x$  (y por lo tanto) es constante. Podemos calcular las coordenadas (x, y) de la posición de la pelota y la distancia d que ha recorrido desde el origen, para cualquier tiempo t.

$$x = x_0 + v_{x_0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

Si un objeto se mueve inicialmente con velocidad constante y de repente experimenta una aceleración en la dirección de la velocidad o en la dirección opuesta, seguirá su camino rectilíneo acelerando o frenando, respectivamente.

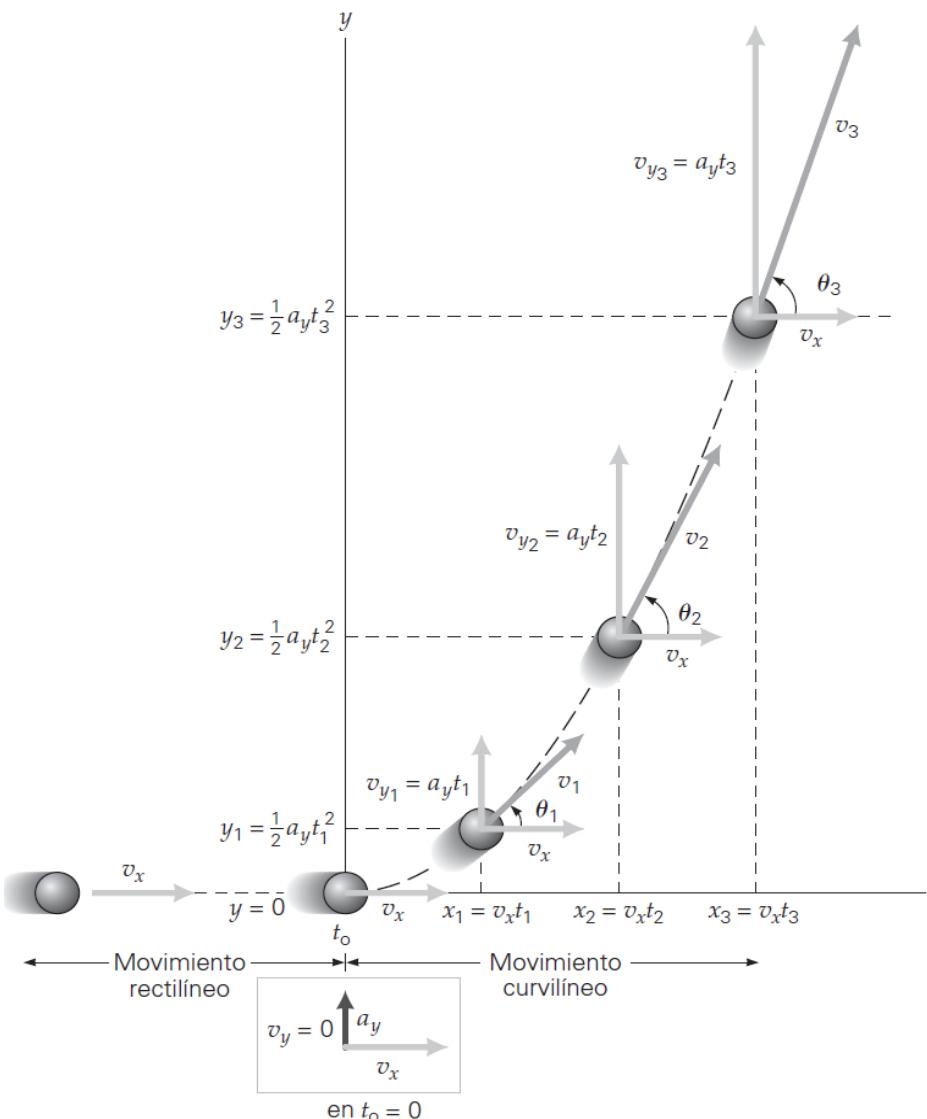
No obstante, si la aceleración tiene un ángulo distinto de 0 o 180 respecto al vector de velocidad, el movimiento seguirá una trayectoria curva. Para que el movimiento de un objeto sea curvilíneo —es decir, que se desvíe de una trayectoria recta, se necesita una aceleración. En una trayectoria curva, el cociente de los componentes de velocidad varía con el tiempo. Es decir, la dirección del movimiento,  $\theta = \tan^{-1}(v_y/v_x)$ , varía con el tiempo, ya que uno de los componentes de velocidad, o ambos, lo hacen.

Considere una pelota que inicialmente se mueve sobre el eje x, como se ilustra en la figura. Suponga que, a partir del tiempo  $t_0 = 0$ , la pelota recibe una aceleración constante  $a_y$  en la dirección y.

La magnitud del componente x del desplazamiento de la pelota está dada por  $x = v_x t$ ; donde el término de la ecuación se elimina porque no hay aceleración en la dirección x. Antes de  $t_0$ , el movimiento es en línea recta

sobre el eje x; pero en cualquier momento después de  $t_0$ , la coordenada y no es cero y está dada por

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$



con  $y_0 = 0$  y  $v_{y_0} = 0$ ). El resultado es una trayectoria curva para la pelota

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2$$

Observa que la longitud (magnitud) del componente de velocidad  $v_y$  cambia con el tiempo, en tanto que la de la componente  $v_x$  permanece constante. El vector de velocidad total en cualquier momento es tangente a la trayectoria curva de la pelota, forma un ángulo con el eje x positivo, dado por  $\theta = \tan^{-1}(v_y/v_x)$ , que ahora cambia con el tiempo, como vemos en la figura

Figura 3

### Enunciados

1. Una chica que está parada en un puente lanza una piedra con una velocidad inicial de 12 m/s en un ángulo de 45° bajo la horizontal, en un intento por golpear un trozo de madera que flota en el río. Si la piedra se lanza desde una altura de 20 m sobre el río y llega a éste cuando la madera está a 13 m del puente, ¿golpeará la tabla? (Suponga que la tabla prácticamente no se mueve y que está en el plano del lanzamiento)

2. Supongamos que la pelota de la figura 3. tiene una velocidad inicial de 1.50 m/s sobre el eje x y que, a partir de  $t = 0$ , recibe una aceleración de 2.80 m/s<sup>2</sup> en la dirección y. a) ¿Dónde estará la pelota 3.00 s después de  $t = 0$ ? b) ¿Qué velocidad tiene la pelota en ese momento?

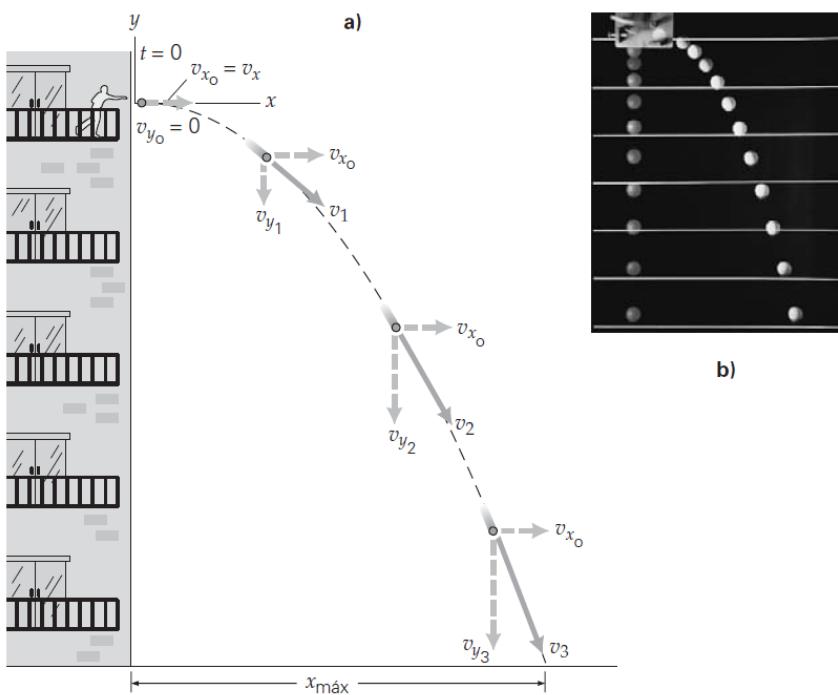
### Proyecciones horizontales

Vale la pena analizar primero el movimiento de un objeto que se proyecta horizontalmente, paralelo a una superficie plana. Supongamos que lanzamos un objeto horizontalmente con velocidad inicial  $v_{x_0}$  como en la figura 4. El movimiento de proyectiles se analiza a partir del instante en que se sueltan ( $t = 0$ ). Una vez soltado el objeto, deja de haber aceleración horizontal ( $a_x = 0$ ), así que, durante toda la trayectoria del objeto, la velocidad horizontal se mantiene constante:  $v_x = v_{x_0}$ .

Según la ecuación  $x = x_0 + v_x t$ , el objeto proyectado seguiría viajando indefinidamente en la dirección horizontal. Sin embargo, sabemos que esto no sucede. Tan pronto como se proyecta el objeto, está en caída libre en la dirección vertical, con  $v_{y_0} = 0$  (como si se hubiera dejado caer) y  $a_y = -g$ . En otras palabras, el objeto proyectado viaja con velocidad uniforme en la dirección horizontal y, al mismo tiempo, sufre una aceleración en la dirección hacia abajo por la influencia de la gravedad. El resultado es una trayectoria curva, como se muestra en la figura 4. (Compare los movimientos de las figuras 3. ¿Percibes similitudes?) Si no hubiera movimiento horizontal, el objeto simplemente caería al suelo en línea recta.

De hecho, el tiempo de vuelo del objeto proyectado es exactamente el mismo que si estuviera cayendo verticalmente.

Observe los componentes del vector de velocidad en la figura 4a. La longitud del componente horizontal no cambia; pero la longitud del componente vertical aumenta con el tiempo. ¿Qué velocidad instantánea tiene el objeto en cualquier punto de su trayectoria? La imagen de la figura b muestra los movimientos reales de una pelota de golf que se proyecta horizontalmente y una que se deja caer simultáneamente desde el reposo. Las líneas de referencia horizontales muestran que las pelotas caen verticalmente con la misma rapidez. La única diferencia es que la que se proyectó horizontalmente también viaja hacia la derecha cuando cae.



**Figura 4 Proyección horizontal**

**a)** Los componentes de velocidad de un proyectil lanzado horizontalmente muestran que el proyectil viaja a la derecha mientras cae, como lo indica el signo menos.

**b)** Una fotografía con múltiples destellos muestra las trayectorias de dos pelotas de golf. Una se proyectó horizontalmente al mismo tiempo que la otra se dejaba caer en línea recta.

Las líneas horizontales tienen una separación de 15 cm, y el intervalo entre destellos fue de 1/30 S. Los movimientos verticales de las pelotas

son idénticos. .Por qué? . ¿Puedes describir el movimiento horizontal de la pelota que está en gris claro?

### Enunciado

1. Suponga que la pelota de la figura 4 se proyecta desde una altura de 25.0 m sobre el suelo y se le imprime una velocidad horizontal inicial de 8.25 m/s. a) ¿Cuánto tiempo tardará la pelota en golpear el suelo? b) ¿A qué distancia del edificio tocará el suelo la pelota?

### Proyecciones con ángulos arbitrarios

En el caso general de movimiento de proyectiles, el objeto se proyecta con un ángulo arbitrario respecto a la horizontal; por ejemplo, una pelota de golf que se golpea con un palo (figura 5). Durante el movimiento de un proyectil, este viaja hacia arriba y hacia abajo mientras viaja horizontalmente con velocidad constante. (La pelota tiene aceleración  $\vec{a} = \vec{g} = 9.8 \frac{m}{s^2} (-\hat{j})$  si En todos los puntos del movimiento, solamente actúa la fuerza gravitacional

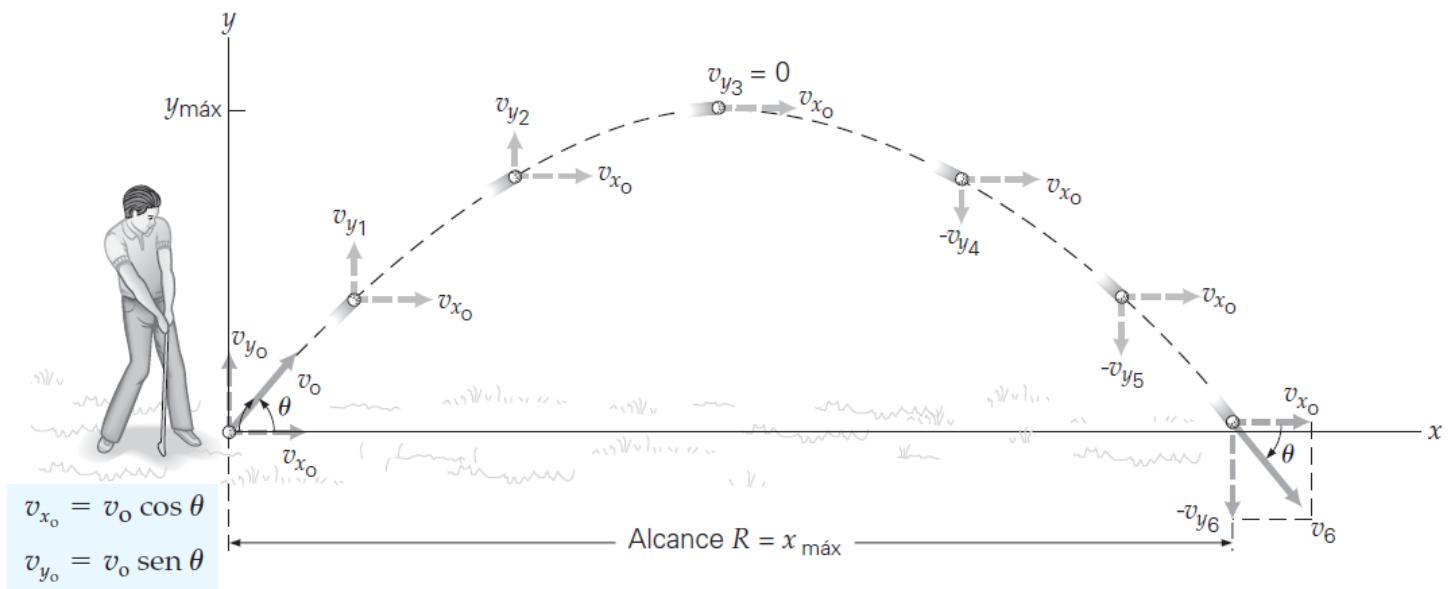


Figura 5

Este movimiento también se analiza usando componentes. Igual que antes, tomamos los sentidos hacia arriba como positivo; y hacia abajo, como negativo. Primero descomponemos la velocidad inicial  $v_o$  en sus componentes rectangulares puesto que no hay aceleración horizontal y la fuerza gravitacional actúa en el sentido ( $j$ ) negativa, la componente  $x$  de la velocidad es constante, mientras que el componente  $y$  varía con el tiempo

$$v_x = v_{x_0} = v_o \cos \theta$$

$$v_y = v_{y_0} - gt = v_o \sin \theta - gt$$

En la figura 5 se ilustran las componentes de la velocidad instantánea en diversos tiempos. La velocidad instantánea es la suma de estos componentes y es tangente a la trayectoria curva de la pelota en cualquier

punto. Observe que la pelota golpea el suelo con la misma rapidez con que se lanzó (pero con  $-v_{y0}$ ) y con el mismo ángulo bajo la horizontal.

Asimismo, los componentes del desplazamiento están dados por  $(x_0 = y_0 = 0)$

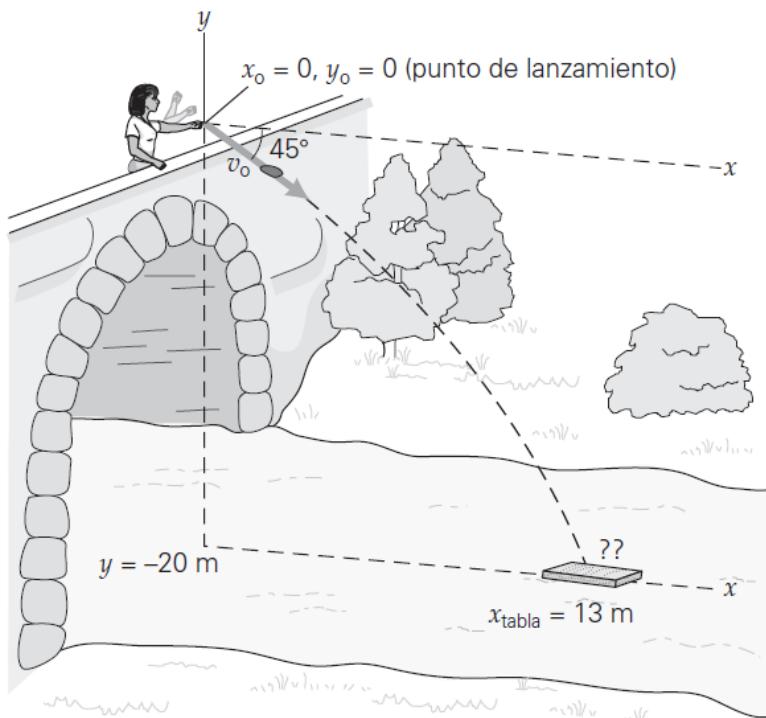
$$x = v_{x0}t = (v_0 \cos \theta)t$$

$$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

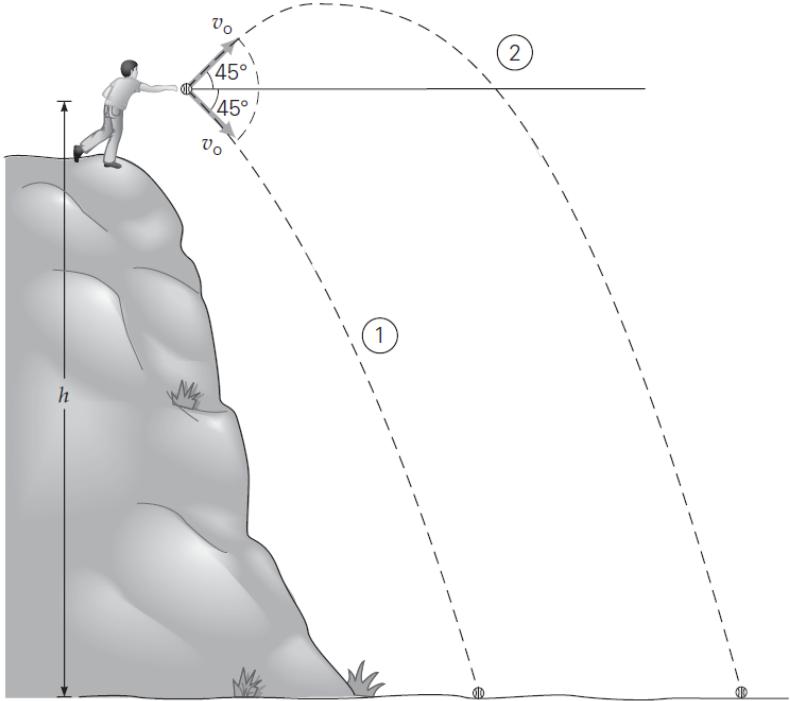
La curva que producen estas ecuaciones (la trayectoria de movimiento del proyectil) se denomina **parábola** altura máxima alcanzada y el **alcance** ( $R$ ), que es la distancia horizontal máxima recorrida.

Enunciados:

1. Supongamos que un golfista golpea una pelota en el “tee” dándole una velocidad inicial de 30.0 m/s con un ángulo de  $35^\circ$  respecto a la horizontal, como en la figura 5. a). ¿Qué altura máxima alcanza la pelota? b). ¿Qué alcance tiene?



2. Una chica que está parada en un puente lanza una piedra con una velocidad inicial de 12 m/s en un ángulo de  $45^\circ$  bajo la horizontal, en un intento por golpear un trozo de madera que flota en el río (figura 6). ¿Si la piedra se lanza desde una altura de 20 m sobre el río y llega a este cuando la madera está a 13 m del puente, golpeará la tabla? (Suponga que la tabla prácticamente no se mueve y que está en el plano del lanzamiento.)



3. Considere dos pelotas, ambas lanzadas con la misma rapidez inicial  $v_0$ , pero una con un ángulo de  $45^\circ$  arriba de la horizontal y la otra con un ángulo de  $45^\circ$  abajo de la horizontal (figura 7). Determine si, al llegar al suelo, a) la pelota lanzada hacia arriba tiene mayor rapidez, b) la pelota proyectada hacia abajo tiene mayor rapidez o c) ambas tienen la misma rapidez. Plantee claramente el razonamiento y los principios de física que uso para llegar a su respuesta, antes de revisar lo siguiente. Es decir, ¿porque eligió esa respuesta?