En una granja de viento, el aire en movimiento realiza trabajo sobre las aspas de los molinos, lo que hace girar las aspas y el rotor de un generador eléctrico. La energía se transfiere afuera del sistema del molino de viento mediante electricidad. (Billy Hustace/Getty Images)

7 Energía de un sistema

Las definiciones de cantidades como posición, velocidad, aceleración y fuerza junto a principios como la segunda ley de Newton han permitido encontrar muchas soluciones. Sin embargo algunos problemas, que podrían resolverse teóricamente con las leyes de Newton, son muy difíciles en la práctica, pero es posible simplificarlos con un planteamiento diferente. Aquí, y en los capítulos siguientes, se investigará este nuevo planteamiento que incluirá definiciones de cantidades que tal vez no le sean familiares. Otras cantidades pueden sonar familiares, pero adquieren significados más específicos en física que en la vida cotidiana. El análisis comienza al explorar la noción de *energía*.

El concepto de energía es uno de los temas más importantes en ciencia e ingeniería. En la vida cotidiana se piensa en la energía en términos de combustible para transporte y calentamiento, electricidad para luz y electrodomésticos, y alimentos para el consumo. No obstante, estas ideas no definen la energía; sólo dejan ver que los combustibles son necesarios para realizar un trabajo y que dichos combustibles proporcionan algo que se llama energía.

La energía está presente en el Universo en varias formas. *Todo* proceso físico que ocurra en el Universo involucra energía y transferencias o transformaciones de energía. Por desgracia, a pesar de su extrema importancia, la energía no es fácil de definir. Las variables en los capítulos previos fueron relativamente concretas; se tiene experiencia cotidiana con velocidades y fuerzas, por ejemplo. Aunque se tengan *experiencias* con la energía, como cuando se acaba la gasolina o con la pérdida del servicio eléctrico después de una tormenta violenta, la *noción* de energía es más abstracta.

El concepto de energía se aplica a sistemas mecánicos sin recurrir a las leyes de Newton. Además, en capítulos posteriores del libro la aproximación de energía permite comprender fenómenos térmicos y eléctricos, para los que las leyes de Newton no son útiles.

Las técnicas para resolución de problemas que se presentaron en capítulos anteriores respecto al movimiento de una partícula o un objeto que podría representarse como una partícula. Dichas técnicas aplican el *modelo de partícula*. El nuevo planteamiento comienza al dirigir la atención sobre un *sistema* y desarrollar técnicas para aplicar en un *modelo de sistema*.

7.1 Sistemas y entornos

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.1
Identifique el sistema

La primera etapa más importante a considerar en la solución de un problema aplicando el planteamiento de energía es identificar el sistema de interés adecuado.

En el modelo de sistema la atención se dirige a una porción pequeña del Universo, el **sistema**, y se ignoran detalles del resto del Universo afuera del sistema. Una habilidad vital para aplicar el modelo de sistema a problemas es la *identificación del sistema*. Un sistema válido

- puede ser un objeto simple o partícula
- puede ser una colección de objetos o partículas
- puede ser una región de espacio (como el interior del cilindro de combustión de un motor de automóvil)
- puede variar en tamaño y forma (como una bola de goma, que se deforma al golpear una pared)

Identificar la necesidad de un enfoque de sistema para resolver un problema (en oposición al enfoque de partícula) es parte del paso Categorizar en la "Estrategia general para resolver problemas" que se destacó en el capítulo 2. Identificar el sistema particular es una segunda parte de esta etapa.

No importa cuál sea el sistema particular en un problema dado, se identifica una **frontera de sistema**, una superficie imaginaria (que no necesariamente coincide con una superficie física) que divide al Universo del sistema y el **entorno** que lo rodea.

Como ejemplo, examine una fuerza aplicada a un objeto en el espacio vacío. Se puede definir el objeto como el sistema y su superficie como la frontera del sistema. La fuerza aplicada a él es una influencia sobre el sistema desde el entorno que actúa a través de la frontera del sistema. Se verá cómo analizar esta situación desde un enfoque de sistema en una sección posterior de este capítulo.

Otro ejemplo se vio en el ejemplo 5.10, donde el sistema se define como la combinación de la bola, el bloque y la cuerda. La influencia del entorno incluye las fuerzas gravitacionales sobre la bola y el bloque, las fuerzas normal y de fricción sobre el bloque, y la fuerza ejercida por la polea sobre la cuerda. Las fuerzas que ejerce la cuerda sobre la bola y el bloque son internas al sistema y debido a eso no se incluyen como una influencia del entorno.

Existen algunos mecanismos mediante los cuales un sistema recibe influencia de su entorno. El primero que se investigará es el *trabajo*.

7.2 Trabajo invertido por una fuerza constante

Casi todos los términos utilizados hasta el momento (velocidad, aceleración, fuerza, etcétera) tienen un significado similar en física como en la vida diaria. Sin embargo, ahora se encuentra un término cuyo significado en física es particularmente diferente de su significado cotidiano: *trabajo*.

Charles D. Winters

a) b) c)

Figura 7.1 Un borrador se empuja a lo largo de un riel del pizarrón mediante una fuerza que actúa a diferentes ángulos respecto de la dirección horizontal.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.2
¿Qué se desplaza?

El desplazamiento en la ecuación 7.1 es el *del punto de aplicación de la fuerza*. Si la fuerza se aplica a una partícula o un sistema no deformable, este desplazamiento es el mismo que el desplazamiento de la partícula o sistema. Sin embargo, para sistemas deformables, estos dos desplazamientos con frecuencia no son los mismos.

Para comprender qué significa trabajo en física, considere la situación que se ilustra en la figura 7.1. Se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ a un borrador, qué se identifica como el sistema, y el borrador se desliza a lo largo del riel. Si quiere saber qué tan efectiva es la fuerza para mover el borrador, debe considerar no sólo la magnitud de la fuerza sino también su dirección. Si supone que la magnitud de la fuerza aplicada es la misma en las tres fotografías, el empujón que se aplica en la figura 7.1b hace más para mover el borrador que el empujón de la figura 7.1a. Por otra parte, la figura 7.1c muestra una situación en que la fuerza aplicada no mueve el borrador en absoluto, sin importar cuán fuerte se empuje (a menos, desde luego, ¡que se aplique una fuerza tan grande que rompa el riel!). Estos resultados sugieren que, cuando se analizan fuerzas para determinar el trabajo que realizan, se debe considerar la naturaleza vectorial de las fuerzas. También se debe conocer el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ del borrador mientras se mueve a lo largo del riel si se quiere determinar el trabajo invertido sobre él por la fuerza. Mover el borrador 3 m a lo largo del riel requiere más trabajo que moverlo 2 cm.

Examine la situación de la figura 7.2, donde el objeto (el sistema) experimenta un desplazamiento a lo largo de una línea recta mientras sobre él actúa una fuerza constante de magnitud F que forma un ángulo θ con la dirección del desplazamiento.

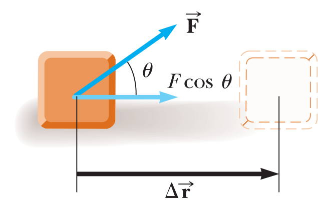


Figura 7.2 Si un objeto se somete a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ bajo la acción de una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$, el trabajo invertido por la fuerza es $F\,\Delta r\cos\theta$.

El **trabajo** W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento:

$$W \equiv F\,\Delta r\cos\theta \qquad \textbf{(7.1)}$$

◀ Trabajo invertido por una fuerza constante

Note en la ecuación 7.1 que el trabajo es un escalar, aun cuando se defina en términos de dos vectores, una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ y un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. En la sección 7.3 se explora cómo combinar dos vectores para generar una cantidad escalar.

Como ejemplo de la distinción entre la definición de trabajo y la comprensión cotidiana de la palabra, considere sostener una pesada silla con los brazos extendidos durante 3 minutos. Al final de este intervalo de tiempo, sus cansados brazos pueden hacerle creer que realizó una cantidad considerable de trabajo sobre la silla. Sin embargo, de acuerdo con la definición, sobre ella no ha realizado ningún trabajo. Usted ejerce una fuerza para sostener la silla, pero no la mueve. Una fuerza no realiza trabajo sobre un objeto si la fuerza no se mueve a través de un desplazamiento. Si $\Delta r = 0$, la ecuación 7.1 da $W = 0$, que es la situación que se muestra en la figura 7.1c.

Advierta también de la ecuación 7.1 que el trabajo invertido por una fuerza sobre un objeto en movimiento es cero cuando la fuerza aplicada es perpendicular al desplazamiento de su punto de aplicación. Esto es, si $\theta = 90°$, por lo tanto $W = 0$ porque $\cos 90° = 0$. Por ejemplo, en la figura 7.3, el trabajo invertido por la fuerza normal sobre el objeto y el trabajo invertido por la fuerza gravitacional sobre el objeto son ambos cero porque ambas

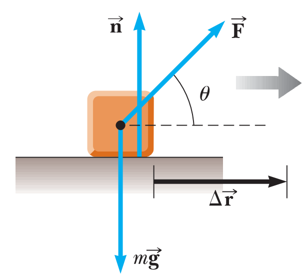


Figura 7.3 Un objeto se desplaza sobre una superficie horizontal sin fricción. La fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la fuerza gravitacional $m\vec{\mathbf{g}}$ no trabajan sobre el objeto. En la situación que se muestra aquí, $\vec{\mathbf{F}}$ es la única fuerza que realiza trabajo sobre el objeto.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.3

Trabajo realizado por… sobre…

No sólo debe identificar el sistema, también debe saber qué agente en el entorno realiza trabajo sobre el sistema. Cuando se analice el trabajo, siempre use la frase "el trabajo realizado por… sobre…". Después de "por", inserte la parte del entorno que interactúa directamente con el sistema. Después de "sobre", inserte el sistema. Por ejemplo, "el trabajo realizado por el martillo sobre el clavo" identifica al clavo como el sistema y la fuerza del martillo representa la interacción con el entorno.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.4

Causa del desplazamiento

Es posible calcular el trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto, pero dicha fuerza *no* necesariamente es la causa del desplazamiento del objeto. Por ejemplo, si levanta un objeto, la fuerza gravitacional realiza trabajo sobre el objeto, ¡aunque la gravedad no es la causa de que el objeto se mueva hacia arriba!

fuerzas son perpendiculares al desplazamiento y tienen componentes cero a lo largo de un eje en la dirección de $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

El signo del trabajo también depende de la dirección de $\vec{\mathbf{F}}$ en relación con $\Delta\vec{\mathbf{r}}$. El trabajo invertido por la fuerza aplicada sobre un sistema es positivo cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ está en la misma dirección que el desplazamiento. Por ejemplo, cuando un objeto se levanta, el trabajo invertido por la fuerza aplicada sobre el objeto es positivo, porque la dirección de dicha fuerza es hacia arriba, en la misma dirección que el desplazamiento de su punto de aplicación. Cuando la proyección de $\vec{\mathbf{F}}$ sobre $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ está en la dirección opuesta al desplazamiento, W es negativo. Por ejemplo, conforme se levanta un objeto, el trabajo invertido por la fuerza gravitacional sobre el objeto es negativo. El factor cos θ en la definición de W (ecuación 7.1) automáticamente toma en cuenta el signo.

Si una fuerza aplicada $\vec{\mathbf{F}}$ está en la misma dirección que el desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$, por lo tanto $\theta = 0$ y $\cos 0 = 1$. En este caso, la ecuación 7.1 produce

$$W = F\,\Delta r$$

Las unidades de trabajo son las de fuerza multiplicada por longitud. En consecuencia, la unidad del SI de trabajo es el **newton·metro** ($\text{N}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2$). Esta combinación de unidades se usa con tanta frecuencia que se le ha dado un nombre propio, **joule** (J).

Una consideración importante para un enfoque de sistema a los problemas es que **el trabajo es una transferencia de energía**. Si W es el trabajo realizado sobre un sistema y W es positivo, la energía se transfiere *al* sistema; si W es negativo, la energía se transfiere *desde* el sistema. Por lo tanto, si un sistema interactúa con su entorno, esta interacción se describe como una transferencia de energía a través de las fronteras del sistema. El resultado es un cambio en la energía almacenada en el sistema. En la sección 7.5 se aprenderá acerca del primer tipo de almacenamiento de energía, después de investigar más aspectos del trabajo.

Pregunta rápida 7.1 La fuerza gravitacional que ejerce el Sol sobre la Tierra mantiene a ésta en una órbita alrededor de aquél. Suponga que la órbita es perfectamente circular. El trabajo realizado por esta fuerza gravitacional durante un intervalo de tiempo breve, en el que la Tierra se mueve a través de un desplazamiento en su trayectoria orbital, es a) cero, b) positivo, c) negativo, d) imposible de determinar.

Pregunta rápida 7.2 La figura 7.4 muestra cuatro situaciones en las que una fuerza se aplica a un objeto. En los cuatro casos, la fuerza tiene la misma magnitud y el desplazamiento del objeto es hacia la derecha y de la misma magnitud. Clasifique las situaciones en orden del trabajo invertido por la fuerza sobre el objeto, del más positivo al más negativo.

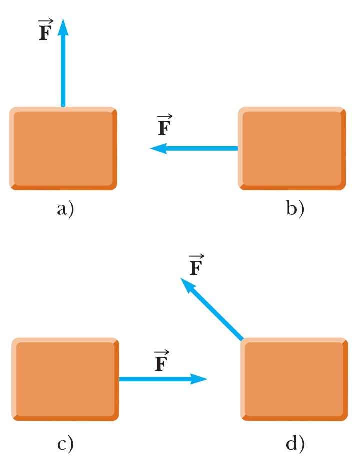


Figura 7.4 (Pregunta rápida 7.2) Se jala un bloque mediante una fuerza en cuatro direcciones diferentes. En cada caso, el desplazamiento del bloque es hacia la derecha y de la misma magnitud.

EJEMPLO 7.1 Sr. Limpio

Un hombre que limpia un piso jala una aspiradora con una fuerza de magnitud $F = 50.0$ N en un ángulo de 30.0° con la horizontal (figura 7.5). Calcule el trabajo consumido por la fuerza sobre la aspiradora a medida que ésta se desplaza 3.00 m hacia la derecha.

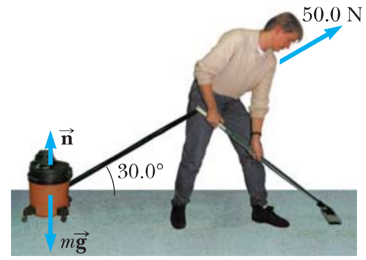


Figura 7.5 (Ejemplo 7.1) Una aspiradora se jala con un ángulo de 30.0° de la horizontal.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.5 ayuda a formar ideas de la situación. Piense en una experiencia de su vida en la que jaló un objeto a través del piso con una soga o cuerda.

Categorizar Se aplica una fuerza sobre un objeto, un desplazamiento del objeto y el ángulo entre los dos vectores, de modo que este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución. La aspiradora se identifica como el sistema.

Aplique la definición de trabajo (ecuación 7.1):

$$W = F\,\Delta r \cos\theta = (50.0\text{ N})(3.00\text{ m})(\cos 30.0°)$$
$$= \boxed{130\text{ J}}$$

Observe en esta situación que la fuerza normal $\vec{\mathbf{n}}$ y la gravitacional $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ no realizan trabajo sobre la aspiradora porque estas fuerzas son perpendiculares a su desplazamiento.

7.3 Producto escalar de dos vectores

Debido a la manera en que los vectores fuerza y desplazamiento se combinan en la ecuación 7.1, es útil aplicar una herramienta matemática conveniente denominada **producto escalar** de dos vectores. Este producto escalar de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se escribe como $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ (Debido al símbolo punto, con frecuencia al producto escalar se le llama **producto punto**.)

El producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ es una cantidad escalar igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo θ entre ellos:

◀ Producto escalar de dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} \equiv AB\cos\theta \qquad \textbf{(7.2)}$$

Como es el caso con cualquier multiplicación, $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ no necesitan tener las mismas unidades.

Al comparar esta definición con la ecuación 7.1, esta ecuación se expresa como un producto escalar:

$$W = F\,\Delta r\cos\theta = \vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}} \qquad \textbf{(7.3)}$$

En otras palabras, $\vec{\mathbf{F}}\cdot\Delta\vec{\mathbf{r}}$ es una notación abreviada de $F\,\Delta r\cos\theta$.

Antes de continuar con el análisis del trabajo, se investigan algunas propiedades del producto punto. La figura 7.6 muestra dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ y el ángulo θ entre ellos, que se aplica en la definición del producto punto. En la figura 7.6, $B\cos\theta$ es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$. Debido a eso, la ecuación 7.2 significa que $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es el producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ y la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.[1]

Del lado derecho de la ecuación 7.2, también se ve que el producto escalar es **conmutativo**.[2] Esto es,

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}\cdot\vec{\mathbf{A}}$$

Por último, el producto escalar obedece la **ley distributiva de la multiplicación**, de este modo

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot(\vec{\mathbf{B}}+\vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{C}}$$

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.5

El trabajo es un escalar

Aunque la ecuación 7.3 define el trabajo en términos de dos vectores, *el trabajo es un escalar*; no hay dirección asociada con él. *Todas* las clases de energía y de transferencia de energía son escalares. Este hecho es una gran ventaja de la aproximación de energía, ¡porque no se necesitan cálculos vectoriales!

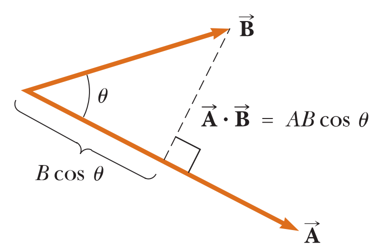


Figura 7.6 El producto escalar $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es igual a la magnitud de $\vec{\mathbf{A}}$ multiplicada por $B\cos\theta$, que es la proyección de $\vec{\mathbf{B}}$ sobre $\vec{\mathbf{A}}$.

[1] Este enunciado es equivalente a afirmar que $\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}$ es igual al producto de la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y la proyección de $\vec{\mathbf{A}}$ sobre $\vec{\mathbf{B}}$.

[2] En el capítulo 11 se verá otra forma de combinar vectores que resulta ser útil en física y no es conmutativa.

El producto punto es simple de evaluar a partir de la ecuación 7.2 cuando $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular o paralelo a $\vec{\mathbf{B}}$. Si $\vec{\mathbf{A}}$ es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$ ($\theta = 90°$), en tal caso $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$. (La igualdad $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0$ también se cumple en el caso más trivial en el que $\vec{\mathbf{A}}$ o $\vec{\mathbf{B}}$ es cero.) Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ y los dos apuntan en la misma dirección ($\theta = 0$), por lo tanto $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB$. Si el vector $\vec{\mathbf{A}}$ es paralelo al vector $\vec{\mathbf{B}}$ pero los dos apuntan en direcciones opuestas ($\theta = 180°$), en consecuencia $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = -AB$. El producto escalar es negativo cuando $90° < \theta \leq 180°$.

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$, que se definieron en el capítulo 3, se encuentran en las direcciones x, y y z positivas, respectivamente, de un sistema coordenado de mano derecha. Por lo tanto, se sigue de la definición de $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ que los productos escalares de estos vectores unitarios son

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \qquad \textbf{(7.4)}$$

Productos punto de vectores unitarios ▶

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \qquad \textbf{(7.5)}$$

Las ecuaciones 3.18 y 3.19 establecen que dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se expresan en forma de vector unitario como

$$\vec{\mathbf{A}} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{\mathbf{B}} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}$$

Con la información que se proporciona en las ecuaciones 7.4 y 7.5 se muestra que el producto escalar de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se reduce a

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \qquad \textbf{(7.6)}$$

(Los detalles de la deducción se le dejan en el problema 5 al final del capítulo.) En el caso especial en el que $\vec{\mathbf{A}} = \vec{\mathbf{B}}$, se ve que

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2$$

Pregunta rápida 7.3 ¿Cuál de los siguientes enunciados es verdadero respecto a la correspondencia entre el producto punto de dos vectores y el producto de las magnitudes de los vectores? a) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es mayor que AB. b) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ es menor que AB. c) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser mayor o menor que AB, dependiendo del ángulo entre los vectores. d) $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ podría ser igual a AB.

EJEMPLO 7.2 El producto escalar

Los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se conocen por $\vec{\mathbf{A}} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$.

A) Determine el producto escalar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Conceptualizar No hay sistema físico a imaginar aquí. En vez de ello, es un ejercicio matemático que involucra dos vectores.

Categorizar Puesto que se tiene una definición para el producto escalar, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Sustituya las expresiones vectoriales específicas para $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} &= (2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}) \cdot (-\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}) \\ &= -2\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{i}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} \cdot 2\hat{\mathbf{j}} \\ &= -2(1) + 4(0) - 3(0) + 6(1) = -2 + 6 = \boxed{4}\end{aligned}$$

Se obtiene el mismo resultado cuando se aplica directamente la ecuación 7.6, donde $A_x = 2$, $A_y = 3$, $B_x = -1$ y $B_y = 2$.

B) Encuentre el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$.

SOLUCIÓN

Evalúe las magnitudes de $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ con el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{5}$$

Aplique la ecuación 7.2 y el resultado del inciso (A) para encontrar el ángulo:

$$\cos\theta = \frac{\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}}{AB} = \frac{4}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{4}{\sqrt{65}} = \boxed{60.3°}$$

EJEMPLO 7.3 **Trabajo consumido por una fuerza constante**

Una partícula móvil en el plano xy se somete a un desplazamiento conocido por $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})$ m cuando una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}} = (5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre la partícula.

A) Calcule las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento de la partícula.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Aunque este ejemplo es un poco más físico que el anterior, en cuanto que identifica una fuerza y un desplazamiento, es similar en términos de su estructura matemática.

Categorizar Ya que se proporcionan dos vectores y se pide encontrar sus magnitudes, este ejemplo se clasifica como un problema de sustitución.

Aplique el teorema de Pitágoras para encontrar las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (2.0)^2} = \boxed{5.4\text{ N}}$$

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2.0)^2 + (3.0)^2} = \boxed{3.6\text{ m}}$$

B) Calcule el trabajo consumido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula.

SOLUCIÓN

Sustituya las expresiones para $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$ en la ecuación 7.3 y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = [(5.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}})\text{ N}] \cdot [(2.0\hat{\mathbf{i}} + 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{ m}]$$

$$= (5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 5.0\hat{\mathbf{i}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 2.0\hat{\mathbf{i}} + 2.0\hat{\mathbf{j}} \cdot 3.0\hat{\mathbf{j}})\text{ N} \cdot \text{m}$$

$$= [10 + 0 + 0 + 6]\text{ N} \cdot \text{m} = \boxed{16\text{ J}}$$

7.4 Trabajo consumido por una fuerza variable

Considere una partícula que se desplaza a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza que varía con la posición. La partícula se desplaza en la dirección de x creciente, desde $x = x_i$ a $x = x_f$. En tal situación, no se aplica $W = F\Delta r\cos\theta$ para calcular el trabajo consumido por la fuerza, porque esta correspondencia sólo se aplica cuando $\vec{\mathbf{F}}$ es constante en magnitud y dirección. Sin embargo, si piensa que la partícula se somete a un desplazamiento muy pequeño Δx, como se muestra en la figura 7.7a, la componente x de la fuerza, F_x, es aproximadamente constante en este intervalo pequeño; para este desplazamiento pequeño, se puede aproximar el trabajo invertido en la partícula mediante la fuerza como

$$W \approx F_x\,\Delta x$$

que es el área del rectángulo sombreado en la figura 7.7a. Si toma en cuenta F_x en función de la curva x dividida en un gran número de tales intervalos, el trabajo total consumido por

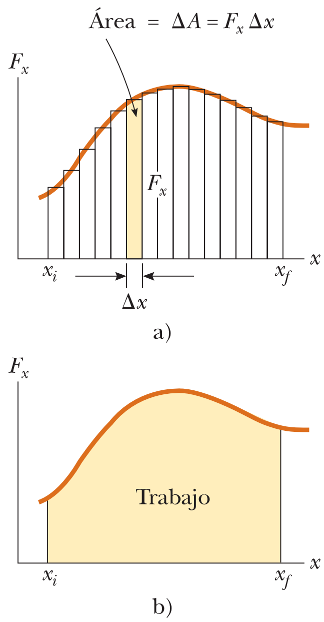


Figura 7.7 a) El trabajo consumido en una partícula por la componente de fuerza F_x para el desplazamiento pequeño Δx es $F_x \Delta x$, que es igual al área del rectángulo sombreado. El trabajo total consumido por el desplazamiento de x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de las áreas de todos los rectángulos. b) El trabajo invertido por la componente F_x de la fuerza variable cuando la partícula se traslada de x_i a x_f es *exactamente* igual al área bajo esta curva.

el desplazamiento desde x_i a x_f es aproximadamente igual a la suma de un gran número de tales términos:

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

Si se permite que el tamaño de los desplazamientos pequeños se aproxime a cero, el número de términos en la suma aumenta sin límite, pero el valor de la suma se aproxima a un valor definido que es igual al área limitada por la curva F_x y el eje x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx$$

En consecuencia, el trabajo invertido por F_x en la partícula conforme se traslada de x_i a x_f se puede expresar como

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \tag{7.7}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación 7.1 cuando la componente $F_x = F \cos \theta$ es constante.

Si más de una fuerza actúa sobre un sistema *y el sistema se puede modelar como una partícula*, el trabajo total consumido en el sistema es justo el trabajo invertido por la fuerza neta. Si la fuerza neta en la dirección x se expresa como ΣF_x, el trabajo total, o *trabajo neto*, consumido cuando la partícula se traslada de x_i a x_f es

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x\right) dx$$

Para el caso general de una fuerza neta $\Sigma \vec{\mathbf{F}}$ cuya magnitud y dirección puede variar, se aplica el producto escalar,

$$\sum W = W_{\text{neto}} = \int \left(\sum \vec{\mathbf{F}}\right) \cdot d\vec{\mathbf{r}} \tag{7.8}$$

donde la integral se calcula sobre la trayectoria que toma la partícula a través del espacio.

Si no es posible modelar el sistema como una partícula (por ejemplo, si el sistema consiste de múltiples partículas que se mueven unas respecto de otras), no se puede usar la ecuación 7.8, porque fuerzas diferentes sobre el sistema pueden moverse a través de diferentes desplazamientos. En este caso, se debe evaluar el trabajo invertido por cada fuerza por separado y después sumar algebraicamente los trabajos para encontrar el trabajo neto invertido en el sistema.

EJEMPLO 7.4 Cálculo del trabajo total a partir de una gráfica

Una fuerza que actúa sobre una partícula varía con x como se muestra en la figura 7.8. Calcule el trabajo consumido por la fuerza en la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 6.0$ m.

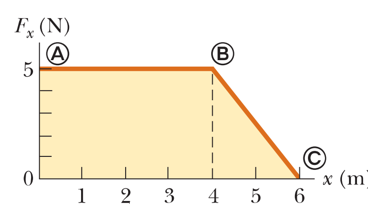


Figura 7.8 (Ejemplo 7.4) La fuerza que actúa sobre una partícula es constante para los primeros 4.0 m de movimiento y después disminuye linealmente con x de $x_{Ⓑ} = 4.0$ m a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m. El trabajo neto invertido por esta fuerza es el área bajo la curva.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere una partícula sometida a la fuerza de la figura 7.8. Observe que la fuerza permanece constante a medida que la partícula se traslada a través de los primeros 4.0 m y después disminuye linealmente a cero en 6.0 m.

Categorizar Ya que la fuerza varía durante todo el movimiento de la partícula, se deben aplicar las técnicas para el trabajo invertido por fuerzas variables. En este caso, se aplica la representación gráfica de la figura 7.8 para evaluar el trabajo consumido.

Analizar El trabajo consumido por la fuerza es igual al área bajo la curva de $x_{Ⓐ} = 0$ a $x_{Ⓒ} = 6.0$ m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de Ⓐ hasta Ⓑ más el área de la sección triangular de Ⓑ hasta Ⓒ.

Evalúe el área del rectángulo: $W_{Ⓐ Ⓑ} = (5.0\text{ N})(4.0\text{ m}) = 20\text{ J}$

Hallar el valor numérico del área del triángulo: $W_{Ⓑ Ⓒ} = \frac{1}{2}(5.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 5.0\text{ J}$

Encuentre el trabajo total consumido por la fuerza en la partícula: $W_{Ⓐ Ⓒ} = W_{Ⓐ Ⓑ} + W_{Ⓑ Ⓒ} = 20\text{ J} + 5.0\text{ J} = \boxed{25\text{ J}}$

Finalizar Ya que la gráfica de la fuerza consiste de líneas rectas, se pueden usar reglas para la búsqueda de las áreas de formas geométricas simples para evaluar el trabajo total invertido en este ejemplo. En un caso en el que la fuerza no varíe linealmente, tales reglas no se pueden aplicar y la función fuerza se debe integrar como en las ecuaciones 7.7 o 7.8.

Trabajo consumido en un resorte

En la figura 7.9 se muestra un modelo de sistema físico común para el que la fuerza varía con la posición. Un bloque sobre una superficie horizontal sin fricción se conecta a un resorte. Para muchos resortes, si el resorte está estirado o comprimido una distancia pequeña desde su configuración sin estirar (en equilibrio), ejerce en el bloque una fuerza que se puede representar matemáticamente como

$$\boxed{F_s = -kx} \quad \textbf{(7.9)}$$

◀ Fuerza de resorte

donde x es la posición del bloque en relación con su posición de equilibrio ($x = 0$) y k es una constante positiva llamada **constante de fuerza** o **constante de resorte** del resorte.

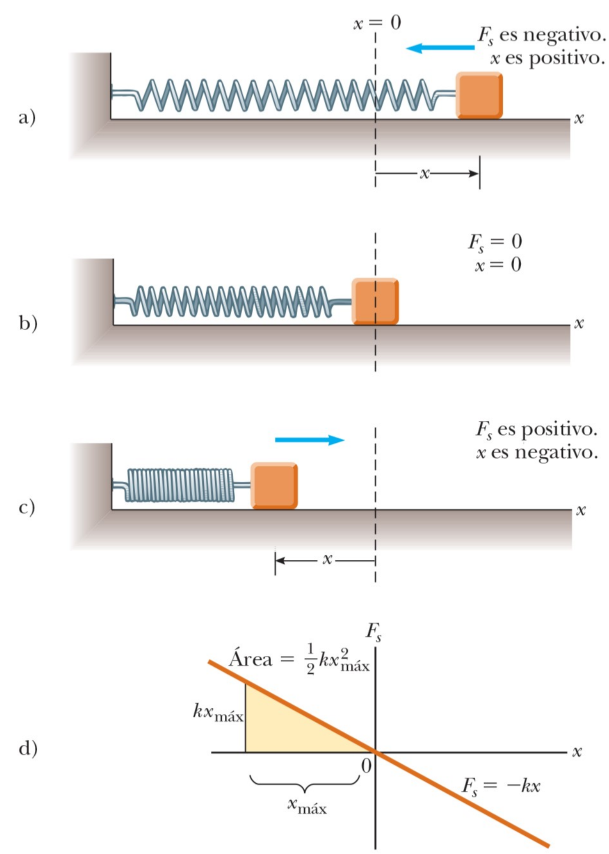


Figura 7.9 La fuerza que ejerce un resorte sobre un bloque varía con la posición x del bloque en relación con la posición de equilibrio $x = 0$. a) Cuando x es positivo (resorte estirado), la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda. b) Cuando x es cero (longitud natural del resorte), la fuerza del resorte es cero. c) Cuando x es negativo (resorte comprimido), la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha. d) Gráfica de F_s en función de x para el sistema bloque–resorte. El trabajo invertido por la fuerza del resorte en el bloque cuando se traslada desde $-x_{\text{máx}}$ a 0 es el área del triángulo sombreado, $\frac{1}{2}kx^2_{\text{máx}}$.

En otras palabras, la fuerza que se requiere para estirar o comprimir un resorte es proporcional a la cantidad de estiramiento o compresión x. Esta ley de fuerza para resortes se conoce como **ley de Hooke**. El valor de k es una medida de la *rigidez* del resorte. Los resortes rígidos tienen grandes valores k, y los resortes suaves tienen pequeños valores k. Como se puede ver de la ecuación 7.9, las unidades de k son N/m.

La forma vectorial de la ecuación 7.9 es

$$\vec{\mathbf{F}}_s = F_s\hat{\mathbf{i}} = -kx\hat{\mathbf{i}} \tag{7.10}$$

donde el eje x se eligió en la dirección de extensión o compresión del resorte.

El signo negativo en las ecuaciones 7.9 y 7.10 significa que la fuerza que ejerce el resorte siempre tiene una dirección *opuesta* al desplazamiento de equilibrio. Cuando $x > 0$, como en la figura 7.9a, de modo que el bloque está a la derecha de la posición de equilibrio, la fuerza del resorte se dirige hacia la izquierda, en la dirección x negativa. Cuando $x < 0$, como en la figura 7.9c, el bloque está a la izquierda del equilibrio y la fuerza del resorte se dirige hacia la derecha, en la dirección x positiva. Cuando $x = 0$, como en la figura 7.9b, el resorte no está estirado y $F_s = 0$. Puesto que la fuerza del resorte siempre actúa hacia la posición de equilibrio ($x = 0$), a veces se le llama *fuerza de restitución*.

Si el resorte se comprime hasta que el bloque está en el punto $-x_{\text{máx}}$ y después se libera, el bloque se traslada de $-x_{\text{máx}}$ a través de cero hasta $+x_{\text{máx}}$. Después invierte la dirección, regresa a $-x_{\text{máx}}$ y continúa oscilando de ida y vuelta.

Suponga que el bloque se empuja hacia la izquierda a una posición $-x_{\text{máx}}$ y después se libera. Identifique el bloque como el sistema y calcule el trabajo W_s invertido por la fuerza del resorte en el bloque conforme éste se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$. Al aplicar la ecuación 7.8 y suponer que el bloque se puede modelar como una partícula, se obtiene

$$W_s = \int \vec{\mathbf{F}}_s \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2 \tag{7.11}$$

donde se aplicó la integral $\int x^n dx = x^{n+1}/(n+1)$ con $n = 1$. El trabajo consumido por la fuerza del resorte es positivo porque la fuerza está en la misma dirección que su desplazamiento (ambos hacia la derecha). Puesto que el bloque llega en $x = 0$ con cierta rapidez, continuará móvil hasta que alcance una posición $+x_{\text{máx}}$. El trabajo invertido por la fuerza del resorte sobre el bloque conforme se traslada de $x_i = 0$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es $W_s = -\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$ porque para esta parte del movimiento la fuerza del resorte es hacia la izquierda y su desplazamiento es hacia la derecha. En consecuencia, el trabajo *neto* invertido por la fuerza del resorte en el bloque conforme se traslada de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$ es *cero*.

La figura 7.9d es una gráfica de F_s en función de x. El trabajo calculado en la ecuación 7.11 es el área del triángulo sombreada, que corresponde al desplazamiento desde $-x_{\text{máx}}$ hasta 0. Ya que el triángulo tiene base $x_{\text{máx}}$ y altura $kx_{\text{máx}}$, su área es $\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$, el trabajo invertido por el resorte que se proporciona por la ecuación 7.11.

Si el bloque se somete a un desplazamiento arbitrario desde $x = x_i$ hasta $x = x_f$, el trabajo invertido por la fuerza del resorte en el bloque es

Trabajo consumido por un resorte ►

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \tfrac{1}{2}kx_i^2 - \tfrac{1}{2}kx_f^2 \tag{7.12}$$

De la ecuación 7.12 se ve que el trabajo invertido por la fuerza del resorte es cero para cualquier movimiento que termine donde comenzó ($x_i = x_f$). En el capítulo 8 se usará este resultado importante cuando se describa con mayor detalle el movimiento de este sistema.

Las ecuaciones 7.11 y 7.12 describen el trabajo empleado por el resorte sobre el bloque. Ahora considere el trabajo invertido en el bloque por un *agente externo* conforme el agente aplica una fuerza sobre el bloque y el bloque se mueve *muy lentamente* de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$, como en la figura 7.10. Se puede calcular este trabajo al notar que, en cualquier valor de la posición, la *fuerza aplicada* $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte $\vec{\mathbf{F}}_s$, de modo que $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}} = F_{\text{ap}}\hat{\mathbf{i}} = -\vec{\mathbf{F}}_s = -(-kx\hat{\mathbf{i}}) = kx\hat{\mathbf{i}}$. Debido a eso, el trabajo realizado por esta fuerza aplicada (el agente externo) en el sistema bloque–resorte es

$$W_{\text{ap}} = \int \vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_{x_i}^{x_f} (kx\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\hat{\mathbf{i}}) = \int_{-x_{\text{máx}}}^{0} kx\,dx = -\tfrac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$$

Este trabajo es igual al negativo del trabajo invertido por la fuerza del resorte para este desplazamiento (ecuación 7.11). El trabajo es negativo porque el agente externo debe empujar hacia adentro sobre el resorte para evitar que se expanda y esta dirección es opuesta a la dirección del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza conforme el bloque se traslada desde $-x_{\text{máx}}$ a 0.

Para un desplazamiento arbitrario del bloque, el trabajo consumido en el sistema por el agente externo es

$$W_{\text{ap}} = \int_{x_i}^{x_f} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}kx_i^{\,2} \tag{7.13}$$

Advierta que esta ecuación es el negativo de la ecuación 7.12.

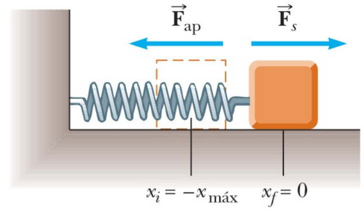


Figura 7.10 Un bloque se traslada desde $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = 0$ sobre una superficie sin fricción conforme se aplica una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ al bloque. Si el proceso se realiza muy lentamente, la fuerza aplicada es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza del resorte en todo momento.

Pregunta rápida 7.4 Un dardo se carga en una pistola de juguete, la cual se activa por un resorte al empujarlo hacia adentro una distancia x. Para la carga siguiente, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Cuánto trabajo se requiere para cargar el segundo dardo en comparación con el que se requiere para cargar el primero? a) cuatro veces más, b) dos veces más, c) el mismo, d) la mitad, e) una cuarta parte.

EJEMPLO 7.5 Medición de *k* para un resorte

Una técnica común aplicada para medir la constante de fuerza de un resorte se demuestra por la configuración de la figura 7.11. El resorte cuelga verticalmente (figura 7.11a) y un objeto de masa m se une a su extremo inferior. Bajo la acción de la "carga" mg, el resorte se estira una distancia d desde su posición de equilibrio (figura 7.11b).

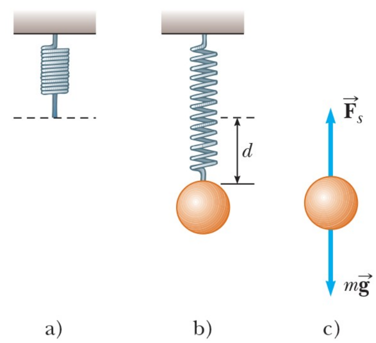


Figura 7.11 (Ejemplo 7.5) Determinación de la constante de fuerza k de un resorte. La elongación d la produce un objeto unido, que tiene un peso mg.

A) Si un resorte se estira 2.0 cm por un objeto suspendido que tiene una masa de 0.55 kg, ¿cuál es la constante de fuerza del resorte?

SOLUCIÓN

Conceptualizar Considere la figura 7.11b, que muestra lo que le ocurre al resorte cuando el objeto se une a él. Simule esta situación al colgar un objeto sobre una banda elástica.

Categorizar El objeto en la figura 7.11b no acelera, de modo que se le modela como una partícula en equilibrio.

Analizar Puesto que el objeto está en equilibrio, la fuerza neta sobre él es cero y la fuerza hacia arriba del resorte equilibra la fuerza gravitacional hacia abajo $m\vec{\mathbf{g}}$ (figura 7.11c).

Al aplicar la ley de Hooke produce $|\vec{\mathbf{F}}_s| = kd = mg$ y al resolver para k:

$$k = \frac{mg}{d} = \frac{(0.55\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)}{2.0 \times 10^{-2}\text{ m}} = 2.7 \times 10^2\text{ N/m}$$

B) ¿Cuánto trabajo invierte el resorte sobre el objeto conforme se estira esta distancia?

SOLUCIÓN

Aplique la ecuación 7.12 para encontrar el trabajo invertido por el resorte sobre el objeto:

$$W_s = 0 - \tfrac{1}{2}kd^2 = -\tfrac{1}{2}(2.7 \times 10^2\text{ N/m})(2.0 \times 10^{-2}\text{ m})^2$$
$$= -5.4 \times 10^{-2}\text{ J}$$

Finalizar A medida que el objeto se mueve a través de los 2.0 cm de distancia, la fuerza gravitacional también realiza trabajo sobre él. Este trabajo es positivo porque la fuerza gravitacional es hacia abajo y así es el desplazamiento del punto de aplicación de esta fuerza. Respecto a la ecuación 7.12 y la discusión posterior, ¿esperaría que el trabajo realizado por la fuerza gravitacional sea $+5.4 \times 10^{-2}$ J? Descúbralo.

Evalúe el trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el objeto:

$$W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg)(d)\cos 0 = mgd$$
$$= (0.55\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2}\text{ m}) = 1.1 \times 10^{-1}\text{ J}$$

Si usted esperaba que el trabajo invertido por la gravedad simplemente fuera el invertido por el resorte con un signo positivo, ¡es posible que le sorprenda este resultado! Para comprender por qué éste no es el caso, es necesario explorar más, como se hace en la siguiente sección.

7.5 Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

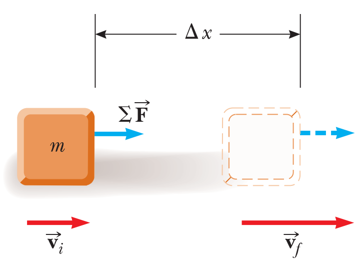


Figura 7.12 Un objeto que se somete a un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}}$ y un cambio en velocidad bajo la acción de una fuerza neta constante $\sum \vec{\mathbf{F}}$.

Ya se investigó el trabajo y se le identificó como un mecanismo de transferencia de energía en un sistema. Un resultado posible de hacer trabajo sobre un sistema es que el sistema cambia su rapidez. En esta sección se investiga esta situación y se introduce el primer tipo de energía que un sistema puede tener, llamada *energía cinética*.

Considere un sistema que consiste de un solo objeto. La figura 7.12 muestra un bloque de masa m que se mueve a través de un desplazamiento dirigido hacia la derecha bajo la acción de una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$, también dirigida hacia la derecha. Se sabe de la segunda ley de Newton que el bloque se mueve con una aceleración $\vec{\mathbf{a}}$. Si el bloque (y por tanto la fuerza) se mueven a través de un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta x\hat{\mathbf{i}} = (x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}}$, el trabajo neto realizado sobre el bloque por la fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ es

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} \sum F\, dx \qquad \textbf{(7.14)}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton, se sustituye para la magnitud de la fuerza neta $\sum F = ma$ y después se realizan las siguientes manipulaciones de la regla de la cadena en el integrando:

$$W_{\text{neto}} = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dt}\, dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}\, dx = \int_{v_i}^{v_f} mv\, dv \qquad \textbf{(7.15)}$$

$$W_{\text{neto}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

donde v_i es la rapidez del bloque cuando está en $x = x_i$ y v_f es su rapidez en x_f.

La ecuación 7.15 se generó por la situación específica de movimiento unidimensional, pero es un resultado general. Dice que el trabajo invertido por la fuerza neta en una partícula de masa m es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una cantidad $\frac{1}{2}mv^2$. La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ representa la energía asociada con el movimiento de la partícula. Esta cantidad es tan importante que se le ha dado un nombre especial, **energía cinética**:

Energía cinética ►

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. Por ejemplo, un objeto de 2.0 kg que se mueve con una rapidez de 4.0 m/s tiene una energía cinética de 16 J. La tabla 7.1 menciona las energías cinéticas de diferentes objetos.

La ecuación 7.15 afirma que el trabajo realizado en una partícula por una fuerza neta $\sum \vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre él es igual al cambio en energía cinética de la partícula. Con frecuencia es conveniente escribir la ecuación 7.15 en la forma

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K \qquad \textbf{(7.17)}$$

Otra forma de escribirla es $K_f = K_i + W_{\text{neto}}$, que dice que la energía cinética final de un objeto es igual a su energía cinética inicial más el cambio debido al trabajo neto invertido sobre él.

TABLA 7.1

Energías cinéticas de diferentes objetos

Objeto	Masa (kg)	Rapidez (m/s)	Energía cinética (J)
Tierra que orbita el Sol	5.98×10^{24}	2.98×10^{4}	2.66×10^{33}
Luna que orbita la Tierra	7.35×10^{22}	1.02×10^{3}	3.82×10^{28}
Cohete que se mueve con rapidez de escape[a]	500	1.12×10^{4}	3.14×10^{10}
Automóvil a 65 mi/h	2 000	29	8.4×10^{5}
Atleta que corre	70	10	3 500
Piedra que se deja caer desde 10 m	1.0	14	98
Pelota de golf con rapidez terminal	0.046	44	45
Gota de lluvia con rapidez terminal	3.5×10^{-5}	9.0	1.4×10^{-3}
Molécula de oxígeno en aire	5.3×10^{-26}	500	6.6×10^{-21}

[a] Rapidez de escape es la rapidez mínima que un objeto debe lograr cerca de la superficie de la Tierra para alejarse infinitamente de ésta.

La ecuación 7.17 se generó al suponer que se realiza trabajo en una partícula. También se podría hacer trabajo sobre un sistema deformable, en el que las partes del sistema se muevan unas respecto de otras. En este caso, también se encuentra que la ecuación 7.17 es válida en tanto el trabajo neto se encuentre al sumar los trabajos invertidos por cada fuerza y sumarlos, tal como se discutió anteriormente en relación con la ecuación 7.8.

La ecuación 7.17 es un resultado importante conocido como **teorema trabajo–energía cinética**:

> Cuando se consume trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez, el trabajo neto consumido en el sistema es igual al cambio en energía cinética del sistema.

◀ Teorema trabajo–energía cinética

El teorema trabajo–energía cinética indica que la rapidez de un sistema *aumenta* si el trabajo neto invertido sobre él es *positivo* porque la energía cinética final es mayor que la energía cinética inicial. La rapidez *disminuye* si el trabajo neto es *negativo* porque la energía cinética final es menor que la energía cinética inicial.

Puesto que hasta el momento sólo se ha investigado movimiento traslacional a través del espacio, se llegó al teorema trabajo–energía cinética al analizar situaciones que involucran movimiento traslacional. Otro tipo de movimiento es el *movimiento rotacional*, en el que un objeto gira en torno a un eje. Este tipo de movimiento se estudiará en el capítulo 10. El teorema trabajo–energía cinética también es válido para sistemas que se someten a un cambio en la rapidez rotacional debido al trabajo realizado sobre el sistema. El molino de viento en la fotografía al principio de este capítulo es un ejemplo de trabajo que causa movimiento rotacional.

El teorema trabajo–energía cinética pondrá en claro un resultado visto anteriormente en este capítulo que puede parecer extraño. En la sección 7.4 se llegó a un resultado de trabajo neto realizado cero cuando un resorte empujó un bloque de $x_i = -x_{\text{máx}}$ a $x_f = x_{\text{máx}}$. Note que, ya que la rapidez del bloque cambia continuamente, puede parecer complicado analizar este proceso. Sin embargo, la cantidad ΔK en el teorema trabajo–energía cinética sólo se refiere a los puntos inicial y final para las magnitudes de velocidad; no depende de los detalles de la trayectoria seguida entre dichos puntos. Por lo tanto, dado que la rapidez es cero tanto en el punto inicial como en el final del movimiento, el trabajo neto invertido en el bloque es cero. Con frecuencia este concepto de independencia con la trayectoria se verá en planteamientos similares de problemas.

Además se regresa al final del ejemplo 7.5 para el misterio en la etapa finalizar. ¿Por qué el trabajo invertido por la gravedad no fue sólo el trabajo consumido por el resorte con un signo positivo? Note que el trabajo invertido por la gravedad es mayor que la magnitud del trabajo consumido por el resorte. Por lo tanto, el trabajo total invertido por todas las fuerzas en el objeto es positivo. Ahora piense cómo crear la situación en que las *únicas* fuerzas sobre el objeto son la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional. Debe soportar el objeto en el punto más alto y después *quitar* su mano y dejar que el objeto caiga. Si lo hace,

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.6

Condiciones para el teorema trabajo–energía cinética

El teorema trabajo–energía cinética es importante pero limitado en su aplicación; no es un principio general. En muchas situaciones, otros cambios en el sistema ocurren además de su rapidez, y existen otras interacciones con el entorno además del trabajo. Un principio más general que involucra energía es la *conservación de energía* en la sección 8.1.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.7

El teorema trabajo–energía cinética: rapidez, no velocidad

El teorema trabajo–energía cinética relaciona el trabajo con un cambio en la *rapidez* de un sistema, no con un cambio en su velocidad. Por ejemplo, si un objeto está en movimiento circular uniforme, su rapidez es constante. Aun cuando su velocidad cambie, no se realiza trabajo sobre el objeto por la fuerza que causa el movimiento circular.

sabe que, cuando el objeto alcanza una posición 2.0 cm abajo de su mano, se estará *moviendo*, que es consistente con la ecuación 7.17. En el objeto se invierte trabajo neto positivo y el resultado es que tiene una energía cinética conforme pasa a través del punto 2.0 cm. La única manera de evitar que el objeto tenga una energía cinética después de moverse 2.0 cm es bajarlo lentamente con su mano. Sin embargo, después, existe una tercera fuerza invirtiendo trabajo en el objeto, la fuerza normal de su mano. Si este trabajo se calcula y suma al invertido por la fuerza del resorte y la fuerza gravitacional, el trabajo neto invertido en el objeto es cero, que es consistente porque no es móvil en el punto 2.0 cm.

Antes se indicó que el trabajo se considera un mecanismo para la transferencia de energía en un sistema. La ecuación 7.17 es un enunciado matemático de este concepto. Cuando se invierte trabajo en un sistema W_{neto}, el resultado es una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. El resultado en el sistema, en el caso de la ecuación 7.17, es un cambio ΔK de energía cinética. En la siguiente sección se investiga otro tipo de energía que se puede almacenar en un sistema como resultado de realizar trabajo en el sistema.

Pregunta rápida 7.5 Se carga un dardo en una pistola de juguete, accionada por resorte, al empujar el resorte hacia adentro una distancia x. Para la siguiente carga, el resorte se comprime una distancia $2x$. ¿Qué tan rápido deja la pistola el segundo dardo, en comparación con el primero? a) cuatro veces más rápido, b) dos veces más rápido, c) la misma, d) la mitad de rápido, e) un cuarto de rápido.

EJEMPLO 7.6 Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción

Un bloque de 6.0 kg, inicialmente en reposo, se jala hacia la derecha, a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, mediante una fuerza horizontal constante de 12 N. Encuentre la rapidez del bloque después de que se ha movido 3.0 m.

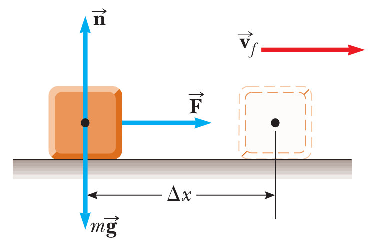


Figura 7.13 (Ejemplo 7.6) Bloque que se jala hacia la derecha sobre una superficie sin fricción mediante una fuerza horizontal constante.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La figura 7.13 ilustra esta situación. Suponga que jala un carro de juguete a través de una mesa con una banda elástica horizontal unida al frente del carro. La fuerza se mantiene constante al asegurar que la banda elástica estirada siempre tiene la misma longitud.

Categorizar Se podrían aplicar las ecuaciones de cinemática para determinar la respuesta, pero practique la aproximación de energía. El bloque es el sistema y tres fuerzas externas actúan en el sistema. La fuerza normal equilibra la fuerza gravitacional en el bloque y ninguna de estas fuerzas que actúan verticalmente realiza trabajo sobre el bloque porque sus puntos de aplicación se desplazan horizontalmente.

Analizar La fuerza externa neta que actúa sobre el bloque es la fuerza horizontal de 12 N.

Hallar el trabajo invertido por esta fuerza en el bloque:

$$W = F\,\Delta x = (12\text{ N})(3.0\text{ m}) = 36\text{ J}$$

Use el teorema trabajo–energía para el bloque y note que su energía cinética inicial es cero:

$$W = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

Resuelva para v_f:

$$v_f = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2(36\text{ J})}{6.0\text{ kg}}} = \boxed{3.5\text{ m/s}}$$

Finalizar Le sería útil resolver este problema de nuevo, al representar el bloque como una partícula bajo una fuerza neta para encontrar su aceleración y luego como una partícula bajo aceleración constante para encontrar su velocidad final.

¿Qué pasaría si? Suponga que la magnitud de la fuerza en este ejemplo se duplica a $F' = 2F$. El bloque de 6.0 kg acelera a 3.5 m/s debido a esta fuerza aplicada mientras se mueve a través de un desplazamiento $\Delta x'$. ¿Cómo se compara el desplazamiento $\Delta x'$ con el desplazamiento original Δx?

Respuesta Si se jala más fuerte, el bloque debe acelerar a una cierta rapidez en una distancia más corta, así que se espera que $\Delta x' < \Delta x$. En ambos casos, el bloque experimenta el mismo cambio en energía cinética ΔK. Matemáticamente, a partir del teorema trabajo–energía cinética, se encuentra que

$$W = F'\,\Delta x' = \Delta K = F\,\Delta x$$

$$\Delta x' = \frac{F}{F'}\,\Delta x = \frac{F}{2F}\,\Delta x = \tfrac{1}{2}\Delta x$$

y la distancia es más corta, como se sugiere por el argumento conceptual.

EJEMPLO CONCEPTUAL 7.7 **¿La rampa reduce el trabajo requerido?**

Un hombre quiere cargar un refrigerador en una camioneta con el uso de una rampa a un ángulo θ, como se muestra en la figura 7.14. Él afirma que se debe requerir menos trabajo para cargar la camioneta si la longitud L de la rampa aumenta. ¿Esta afirmación es válida?

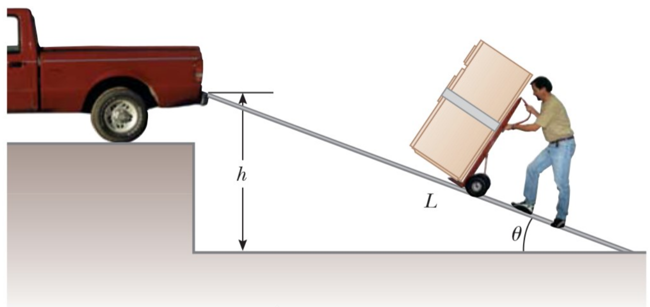


Figura 7.14 (Ejemplo conceptual 7.7) Un refrigerador unido a una carretilla con ruedas sin fricción se mueve por una rampa con rapidez constante.

SOLUCIÓN

No. Suponga que el refrigerador se sube por la rampa en una carretilla con rapidez constante. En este caso, para el sistema del refrigerador y la carretilla, $\Delta K = 0$. La fuerza normal que ejerce la rampa sobre el sistema se dirige 90° al desplazamiento de su punto de aplicación y por lo tanto no realiza trabajo sobre el sistema. Puesto que $\Delta K = 0$, el teorema trabajo–energía cinética produce

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{por hombre}} + W_{\text{por gravedad}} = 0$$

El trabajo invertido por la fuerza gravitacional es igual al producto del peso mg del sistema, la distancia L a través de la que se desplaza el refrigerador y cos $(\theta + 90°)$. En consecuencia,

$$W_{\text{por hombre}} = -\,W_{\text{por gravedad}} = -\,(mg)(L)[\cos\,(\theta + 90°)]$$
$$= mgL \,\text{sen}\, \theta = mgh$$

donde $h = L \,\text{sen}\, \theta$ es la altura de la rampa. Por lo tanto, el hombre debe realizar la misma cantidad de trabajo mgh sobre el sistema *sin importar* la longitud de la rampa. El trabajo sólo depende de la altura de la rampa. Aunque se requiere menos fuerza con una rampa más larga, el punto de aplicación de dicha fuerza se mueve a través de un mayor desplazamiento.

7.6 Energía potencial de un sistema

Hasta el momento en este capítulo se ha definido un sistema en general, pero la atención se ha enfocado principalmente sobre partículas u objetos solos bajo la influencia de fuerzas externas. Considere ahora sistemas de dos o más partículas u objetos que interactúan a través de una fuerza que es *interna* al sistema. La energía cinética de tal sistema es la suma algebraica de las energías cinéticas de todos los integrantes del sistema. Sin embargo, puede haber sistemas en los que un objeto sea tan masivo que se pueda modelar como fijo y su energía cinética sea despreciable. Por ejemplo, si se considera un sistema bola–Tierra mientras la bola cae a la Tierra, la energía cinética del sistema se puede considerar sólo como la energía cinética de la bola. La Tierra se mueve tan lentamente en este proceso que se puede ignorar su energía cinética. Por otra parte, la energía cinética de un sistema de dos electrones debe incluir las energías cinéticas de ambas partículas.

Piense en un sistema que consiste de un libro y la Tierra, que interactúa a través de la fuerza gravitacional. Se hace algo de trabajo sobre el sistema al levantar el libro lentamente desde el reposo a través de una desplazamiento vertical $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (y_f - y_i)\,\hat{\mathbf{j}}$, como en la figura 7.15. De acuerdo con la discusión del trabajo como una transferencia de energía, este trabajo invertido en el sistema debe aparecer como un aumento en energía del sistema.

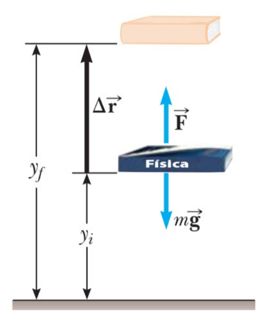


Figura 7.15 El trabajo invertido por un agente externo en el sistema del libro y la Tierra a medida que el libro se levanta lentamente desde una altura y_i a una altura y_f es igual a $mgy_f - mgy_i$.

El libro está en reposo antes de realizar el trabajo y está en reposo después de realizar el trabajo. Por lo tanto, no hay cambio en la energía cinética del sistema.

Puesto que el cambio de energía del sistema no es en la forma de energía cinética, debe aparecer como alguna otra forma de almacenamiento de energía. Después de levantar el libro, se le podría liberar y dejar que caiga de vuelta a la posición y_i. Note que el libro (y, por lo tanto, el sistema) ahora tiene energía cinética y su fuente está en el trabajo que se hizo al levantar el libro. Mientras el libro estaba en el punto más alto, la energía del sistema tenía el *potencial* para convertirse en energía cinética, pero no lo hizo hasta que al libro se le permitió caer. En consecuencia, al mecanismo de almacenamiento de energía antes de que el libro se libere se le llama **energía potencial**. Se encontrará que la energía potencial de un sistema sólo se asocia con tipos específicos de fuerzas que actúan entre integrantes de un sistema. La cantidad de energía potencial en el sistema se determina mediante la *configuración* del mismo. Mover los integrantes del sistema a diferentes posiciones o girarlos cambia su configuración y por ende su energía potencial.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.8

Energía potencial

La frase *energía potencial* no se refiere a algo que tenga el potencial de convertirse en energía. La energía potencial *es* energía.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.9

La energía potencial pertenece a un sistema

La energía potencial siempre se asocia con un *sistema* de dos o más objetos en interacción. Cuando un objeto pequeño se mueve cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la gravedad, a veces se puede hacer referencia a la energía potencial "asociada con el objeto" en lugar de "asociada con el sistema", que es lo más apropiado, porque la Tierra no se mueve significativamente. Sin embargo, en el texto no se hará alusión a la energía potencial "del objeto" porque esta frase ignora el papel de la Tierra.

Ahora deduzca una expresión para la energía potencial asociada con un objeto en cierta ubicación sobre la superficie de la Tierra. Considere un agente externo que levanta un objeto de masa m desde una altura inicial y_i sobre el suelo a una altura final y_f, como en la figura 7.15. Se supone que el levantamiento se hace lentamente, sin aceleración, de modo que la fuerza aplicada del agente se representa como igual en magnitud a la fuerza gravitacional en el objeto: el objeto se modela como una partícula en equilibrio que se mueve con velocidad constante. El trabajo invertido por el agente externo sobre el sistema (objeto y Tierra) conforme el objeto se somete a este desplazamiento hacia arriba, se conoce por el producto de la fuerza aplicada hacia arriba $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}$ y el desplazamiento hacia arriba de esta fuerza, $\Delta\vec{\mathbf{r}} = \Delta y\hat{\mathbf{j}}$:

$$W_{\text{neto}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i \qquad \textbf{(7.18)}$$

donde este resultado es el trabajo neto invertido en el sistema porque la fuerza aplicada es la única fuerza sobre el sistema desde el entorno. Advierta la similitud entre la ecuación 7.18 y la ecuación 7.15. En cada ecuación, el trabajo invertido en un sistema es igual a una diferencia entre los valores final e inicial de una cantidad. En la ecuación 7.15, el trabajo representa una transferencia de energía en el sistema y el incremento en energía del sistema es cinética en forma. En la ecuación 7.18, el trabajo representa una transferencia de energía al sistema y la energía del sistema aparece en una forma diferente, a lo que se llamó energía potencial.

En consecuencia, la cantidad mgy se puede identificar como la **energía potencial gravitacional** U_g:

Energía potencial gravitacional ►

$$U_g \equiv mgy \qquad \textbf{(7.19)}$$

Las unidades de la energía potencial gravitacional son joules, las mismas unidades que el trabajo y la energía cinética. La energía potencial, como el trabajo y la energía cinética, es una cantidad escalar. Note que la ecuación 7.19 sólo es válida para objetos cerca de la superficie de la Tierra, donde g es aproximadamente constante.[3]

Al usar la definición de energía potencial gravitacional, la ecuación 7.18 ahora se puede rescribir como

$$W_{\text{neto}} = \Delta U_g \qquad \textbf{(7.20)}$$

que matemáticamente describe que el trabajo neto invertido en el sistema en esta situación aparece como un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

La energía potencial gravitacional sólo depende de la altura vertical del objeto sobre la superficie de la Tierra. La misma cantidad de trabajo se debe invertir sobre un sistema objeto–Tierra ya sea que el objeto se levante verticalmente desde la Tierra o se empuje desde el mismo punto hacia arriba de un plano inclinado sin fricción para terminar en la misma altura. Este enunciado se verifica para una situación específica como empujar un refrigerador sobre una rampa en el ejemplo conceptual 7.7. Se puede demostrar que

[3] La suposición de que g es constante es válida en tanto que el desplazamiento vertical del objeto sea pequeño en comparación con el radio de la Tierra.

este enunciado es verdadero en general al calcular el trabajo invertido en un objeto por un agente que mueve el objeto a lo largo de un desplazamiento que tiene componentes tanto vertical como horizontal:

$$W_{\text{neto}} = (\vec{\mathbf{F}}_{\text{ap}}) \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}} = (mg\hat{\mathbf{j}}) \cdot [(x_f - x_i)\hat{\mathbf{i}} + (y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_f - mgy_i$$

donde no hay término que involucre a x en el resultado final porque $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$.

Al resolver problemas, debe elegir una configuración de referencia para la cual la energía potencial gravitacional del sistema se haga igual a algún valor de referencia, que normalmente es cero. La elección de configuración de referencia es completamente arbitraria porque la cantidad importante es la *diferencia* en energía potencial, y esta diferencia es independiente de la elección de la configuración de referencia.

Con frecuencia es conveniente elegir como la configuración de referencia para la energía potencial gravitacional la configuración en la que un objeto está en la superficie de la Tierra, pero esta elección no es esencial. Frecuentemente el enunciado del problema sugiere aplicar una configuración conveniente.

Pregunta rápida 7.6 Elija la respuesta correcta. La energía potencial gravitacional de un sistema a) siempre es positiva, b) siempre es negativa, c) puede ser negativa o positiva.

EJEMPLO 7.8 El bolichista y el dedo lastimado

Una bola de boliche sostenida por un bolichista descuidado se desliza de sus manos y cae sobre un dedo de su pie. Si elige el nivel del suelo como el punto $y = 0$ de su sistema coordenado, estime el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra mientras cae la bola. Repita el cálculo usando la coronilla de la cabeza del bolichista como el origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

Conceptualizar La bola de boliche cambia su posición vertical en relación con la superficie de la Tierra. Asociado con este cambio de posición, hay un cambio en la energía potencial gravitacional del sistema.

Categorizar Se evalúa un cambio de energía potencial gravitacional definido en esta sección, de modo que este ejemplo se clasifique como un problema de sustitución.

El enunciado del problema dice que la configuración de referencia del sistema bola–Tierra que corresponde a energía potencial cero es cuando el punto más bajo de la bola está en el suelo. Para encontrar el cambio de energía del sistema, es necesario estimar unos cuantos valores. Una bola de boliche tiene una masa de aproximadamente 7 kg, y la parte superior del dedo del pie de una persona está aproximadamente a 0.03 m sobre el suelo. Además, se debe suponer que la bola cae desde una altura de 0.5 m.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra justo antes de que la bola de boliche se libere:

$$U_i = mgy_i = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.5\text{ m}) = 34.3\text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra cuando la bola llega al dedo del bolichista:

$$U_f = mgy_f = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(0.03\text{ m}) = 2.06\text{ J}$$

Evalúe el cambio en energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra:

$$\Delta U_g = 2.06\text{ J} - 34.3\text{ J} = -32.24\text{ J}$$

En este caso probablemente se conserve sólo un dígito debido a lo burdo de las estimaciones; en consecuencia, se estima que el cambio en energía potencial gravitacional es $\boxed{-30\text{ J}}$. El sistema tiene 30 J de energía potencial gravitacional antes de que la bola inicie su caída y aproximadamente cero de energía potencial cuando la bola llega a la parte superior del dedo.

El segundo caso indica que la configuración de referencia del sistema para energía potencial cero se elige cuando la bola está en la cabeza del bolichista (aun cuando la bola nunca está en tal posición en su movimiento). Se estima que esta posición es 1.50 m sobre el suelo.

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra justo antes de que la bola de boliche se libere desde su posición 1 m abajo de la cabeza del bolichista:

$$U_i = mgy_i = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-1\text{ m}) = -68.6\text{ J}$$

Calcule la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra cuando la bola llega al dedo del bolichista ubicado 1.47 m bajo la cabeza del bolichista:

$$U_f = mgy_f = (7\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)(-1.47\text{ m}) = -100.8\text{ J}$$

Evalúe el cambio en la energía potencial gravitacional del sistema bola–Tierra:

$$\Delta U_g = -100.8\text{ J} - (-68.6\text{ J}) = -32.2\text{ J} \approx \boxed{-30\text{ J}}$$

Este valor es el mismo que antes, como debe ser.

Energía potencial elástica

Ahora que está familiarizado con la energía potencial gravitacional de un sistema, explore un segundo tipo de energía potencial que puede tener un sistema. Considere un sistema que consta de un bloque y un resorte, como se muestra en la figura 7.16. La fuerza que el resorte ejerce sobre el bloque se conoce por $F_s = -kx$ (ecuación 7.9). El trabajo invertido por una fuerza aplicada externa F_{ap} en un sistema que consiste de un bloque conectado al resorte se proporciona por la ecuación 7.13:

$$W_{ap} = \tfrac{1}{2}kx_f^2 - \tfrac{1}{2}kx_i^2 \quad \textbf{(7.21)}$$

En esta situación, las coordenadas inicial y final x del bloque se miden desde su posición de equilibrio, $x = 0$. De nuevo (como en el caso gravitacional) se ve que el trabajo invertido en el sistema es igual a la diferencia entre los valores inicial y final de una expresión relacionada con la configuración del sistema. La función de **energía potencial elástica** asociada con el sistema bloque–resorte se define mediante

Energía potencial elástica ►

$$\boxed{U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2} \quad \textbf{(7.22)}$$

La energía potencial elástica del sistema se puede percibir como la energía almacenada en el resorte deformado (uno que está comprimido o estirado desde su posición de equilibrio). La energía potencial elástica almacenada en un resorte es cero siempre que

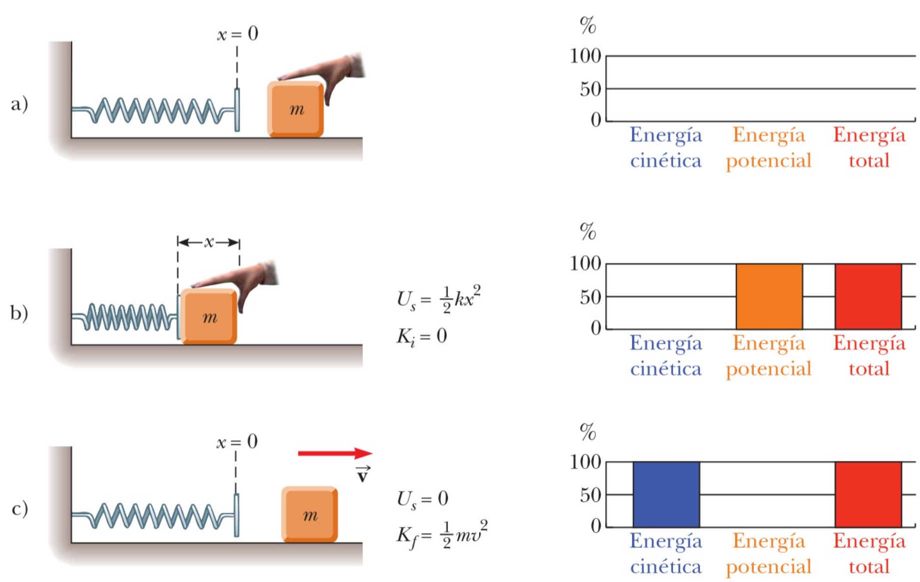


Figura 7.16 a) Un resorte no deformado sobre una superficie horizontal sin fricción. b) Se empuja un bloque de masa m contra el resorte y lo comprime una distancia x. La energía potencial elástica se almacena en el sistema resorte–bloque. c) Cuando el bloque se libera desde el reposo, la energía potencial elástica se transforma en energía cinética del bloque. Las gráficas de barras de energía a la derecha de cada parte de la figura ayudan a seguir la pista de la energía en el sistema.

el resorte no esté deformado ($x = 0$). La energía se almacena en el resorte sólo cuando el resorte está estirado o comprimido. Puesto que la energía potencial elástica es proporcional a x^2, se ve que U_s siempre es positiva en un resorte deformado.

Considere la figura 7.16, que muestra un resorte sobre una superficie horizontal sin fricción. Cuando se empuja un bloque contra el resorte y el resorte se comprime una distancia x (figura 7.16b), la energía potencial elástica almacenada en el resorte es $\frac{1}{2}kx^2$. Cuando el bloque se libera desde el reposo, el resorte ejerce una fuerza sobre el bloque y regresa a su longitud original. La energía potencial elástica almacenada se transforma en energía cinética del bloque (figura 7.16c).

La figura 7.16 muestra una representación gráfica importante de información relacionada con energía de sistemas llamada **gráfica de barras de energía**. El eje vertical representa la cantidad de energía de una clase determinada en el sistema. El eje horizontal muestra las clases de energía en el sistema. La gráfica de barras de la figura 7.16a muestra que el sistema contiene energía cero porque el resorte está relajado y el bloque no se mueve. Entre la figura 7.16a y 7.16b, la mano realiza trabajo sobre el sistema, comprime el resorte y almacena energía potencial elástica en el sistema. En la figura 7.16c, el resorte regresó a su longitud relajada y el sistema ahora contiene energía cinética asociada con el bloque en movimiento.

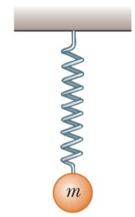


Figura 7.17 (Pregunta rápida 7.7) Una bola conectada a un resorte sin masa suspendido verticalmente. ¿Qué formas de energía potencial se asocian con el sistema cuando la bola se desplaza hacia abajo?

Pregunta rápida 7.7 Una bola se conecta a un resorte ligero suspendido verticalmente, como se muestra en la figura 7.17. Cuando se jala hacia abajo desde su posición de equilibrio y se libera, la bola oscila arriba y abajo. **i)** En el sistema de *la bola, el resorte y la Tierra*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento? a) cinética y potencial elástica, b) cinética y potencial gravitacional, c) cinética, potencial elástica y potencial gravitacional, d) potencial elástica y potencial gravitacional. **ii)** En el sistema de *la bola y el resorte*, ¿qué formas de energía existen durante el movimiento? Elija de las mismas posibilidades de la a) a la d).

7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

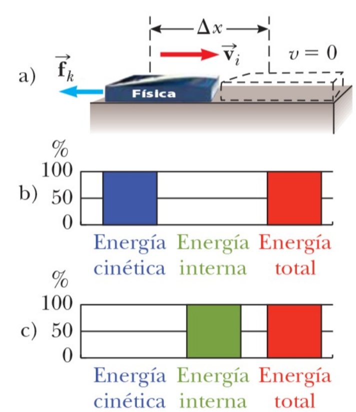


Figura 7.18 a) Un libro que se desliza hacia la derecha sobre una superficie horizontal frena en presencia de una fuerza de fricción cinética que actúa hacia la izquierda. b) Gráfica de barras de energía que muestra la energía en el sistema del libro y la superficie en el instante de tiempo inicial. La energía del sistema es toda energía cinética. c) Después de que el libro se detiene, la energía del sistema es toda energía interna.

Ahora se introduce un tercer tipo de energía que tiene un sistema. Imagine que usted acelera con su mano el libro en la figura 7.18a y lo desliza hacia la derecha sobre la superficie de una mesa pesada y frena debido a la fuerza de fricción. Suponga que la *superficie* es el sistema. Debido a eso la fuerza de fricción al deslizarse el libro realiza trabajo sobre la superficie. La fuerza sobre la superficie es hacia la derecha y el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza es hacia la derecha. El trabajo invertido en la superficie es positivo, pero la superficie no se mueve después de que el libro se detiene. Sobre la superficie se realizó trabajo positivo, aunque no hay aumento en la energía cinética de la superficie o la energía potencial de sistema alguno.

A partir de su experiencia cotidiana con el deslizamiento sobre superficies con fricción, probablemente usted puede adivinar que la superficie se *calentará* después de que el libro se deslice sobre ella. (¡Frote sus manos vigorosamente para descubrirlo!) El trabajo que se hizo sobre la superficie se fue en calentar la superficie en lugar de aumentar su rapidez o cambiar la configuración de un sistema. A la energía asociada con la temperatura de un sistema se le llama **energía interna**, que se simboliza E_{int}. (En el capítulo 20 se definirá de manera más general la energía interna.) En este caso, el trabajo invertido en la superficie de hecho representa la energía transferida hacia dentro del sistema, pero aparece en el sistema como energía interna en lugar de energía cinética o potencial.

Considere el libro y la superficie en la figura 7.18a juntos como un sistema. Inicialmente, el sistema tiene energía cinética porque el libro es móvil. Después de que el libro llegó al reposo, la energía interna del sistema aumentó: el libro y la superficie están más calientes que antes. Se puede considerar el trabajo invertido por fricción dentro del sistema (esto es, entre el libro y la superficie) como un *mecanismo de transformación* para energía. Este trabajo transforma la energía cinética del sistema en energía interna. De igual modo, cuando un libro cae recto hacia abajo sin resistencia del aire, el trabajo invertido por la fuerza gravitacional dentro del sistema libro–Tierra transforma la energía potencial gravitacional del sistema a energía cinética.

Las figuras 7.18b y 7.18c muestran gráficas de barras de energía para la situación en la figura 7.18a. En la figura 7.18b, la gráfica de barras muestra que el sistema contiene energía cinética en el instante en que su mano libera el libro. En este instante se define la cantidad de energía interna de referencia en el sistema igual a cero. En la figura 7.18c, después de que el libro deja de deslizarse, la energía cinética es cero y ahora el sistema contiene energía interna. Observe que la cantidad de energía interna en el sistema, después de que el libro se detiene, es igual a la cantidad de energía cinética en el sistema en el instante inicial. Esta igualdad se describe mediante un principio importante llamado *conservación de energía*. Este principio se explorará en el capítulo 8.

Ahora considere con más detalle un objeto que se mueve hacia abajo, cerca de la superficie de la Tierra. El trabajo invertido por la fuerza gravitacional en el objeto no depende de si cae vertical o se desliza hacia abajo de un plano muy inclinado. Todo lo que importa es el cambio en la elevación del objeto. Sin embargo, la transformación de energía a energía interna debida a fricción en dicho plano depende de la distancia que el objeto se desliza. En otras palabras, la trayectoria no hace diferencia cuando se considera el trabajo invertido por la fuerza gravitacional, pero sí hace una diferencia cuando se considera la transformación de energía debida a fuerzas de fricción. Se puede usar esta dependencia variable con la trayectoria para clasificar fuerzas como conservativas o no conservativas. De las dos fuerzas mencionadas, la fuerza gravitacional es conservativa y la fuerza de fricción es no conservativa.

Fuerzas conservativas

Las **fuerzas conservativas** tienen estas dos propiedades equivalentes:

Propiedades de fuerzas conservativas ►

1. El trabajo invertido por una fuerza conservativa sobre una partícula móvil entre dos puntos cualesquiera es independiente de la trayectoria tomada por la partícula.
2. El trabajo invertido por una fuerza conservativa en una partícula móvil a lo largo de cualquier trayectoria cerrada es cero. (Una trayectoria cerrada es aquella en la que el punto de partida y el punto final son idénticos.)

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.10

Advertencia sobre ecuaciones similares

Compare la ecuación 7.23 con la ecuación 7.20. Estas ecuaciones son similares excepto por el signo negativo, que es una fuente común de confusión. La ecuación 7.20 dice que trabajo positivo se invierte *por un agente externo* en un sistema que causa un aumento en la energía potencial del sistema (sin cambio en la energía cinética o interna). La ecuación 7.23 establece que el trabajo invertido *en una componente de un sistema por una fuerza conservativa interna a un sistema aislado* causa una disminución en la energía potencial del sistema.

La fuerza gravitacional es un ejemplo de fuerza conservativa; la fuerza que un resorte ideal ejerce en cualquier objeto unido al resorte es otra. El trabajo invertido por la fuerza gravitacional en un objeto móvil entre dos puntos cualesquiera cerca de la superficie de la Tierra es $W_g = -mg\hat{\mathbf{j}} \cdot [(y_f - y_i)\hat{\mathbf{j}}] = mgy_i - mgy_f$. A partir de esta ecuación, observe que W_g sólo depende de las coordenadas y inicial y final del objeto y por tanto es independiente de la trayectoria. Además, W_g es cero cuando el objeto se traslada en cualquier trayectoria cerrada (donde $y_i = y_f$).

Para el caso del sistema objeto–resorte, el trabajo W_s invertido por la fuerza del resorte se conoce por $W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$ (ecuación 7.12). Se ve que la fuerza del resorte es conservativa porque W_s sólo depende de las coordenadas x, inicial y final del objeto y es cero para cualquier trayectoria cerrada.

Es posible asociar una energía potencial para un sistema con una fuerza que actúa entre integrantes del sistema, pero sólo se puede hacer para fuerzas conservativas. En general, el trabajo W_c invertido por una fuerza conservativa en un objeto que es integrante de un sistema conforme el objeto se traslada de una posición a otra es igual al valor inicial de la energía potencial del sistema menos el valor final:

$$W_c = U_i - U_f = -\Delta U \qquad \textbf{(7.23)}$$

Como ejemplo, compare esta ecuación general con la ecuación específica para el trabajo invertido por la fuerza de resorte (ecuación 7.12) como la extensión de los cambios del resorte.

Fuerzas no conservativas

Una fuerza es **no conservativa** si no satisface las propiedades 1 y 2 para fuerzas conservativas. Se define la suma de las energías cinética y potencial de un sistema como la **energía mecánica** del sistema:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \tag{7.24}$$

donde K incluye la energía cinética de todos los integrantes móviles del sistema y U incluye todos los tipos de energía potencial en el sistema. Las fuerzas no conservativas que actúan dentro de un sistema causan un *cambio* en la energía mecánica del sistema. Por ejemplo, para un libro que se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, la energía mecánica del sistema libro–superficie se transforma en energía interna, como se discutió anteriormente. Sólo parte de la energía cinética del libro se transforma en energía interna en el libro. El resto aparece como energía interna en la superficie. (Cuando tropieza y se desliza por el suelo de un gimnasio, no sólo la piel en sus rodillas se calienta, ¡también lo hace el piso!) Puesto que la fuerza de fricción cinética transforma la energía mecánica de un sistema en energía interna, esta es una fuerza no conservativa.

Como ejemplo de la dependencia del trabajo con la trayectoria para una fuerza no conservativa, considere la figura 7.19. Suponga que desplaza un libro entre dos puntos sobre una mesa. Si el libro se desplaza en una línea recta a lo largo de la trayectoria azul entre los puntos Ⓐ y Ⓑ de la figura 7.19, realiza cierta cantidad de trabajo contra la fuerza de fricción cinética para mantener al libro móvil con una rapidez constante. Ahora, piense que empuja el libro a lo largo de la trayectoria semicircular café en la figura 7.19. Realiza más trabajo contra la fricción a lo largo de esta trayectoria curva que a lo largo de la trayectoria recta porque la trayectoria curva es más larga. El trabajo invertido en el libro depende de la trayectoria, así que la fuerza de fricción *no puede* ser conservativa.

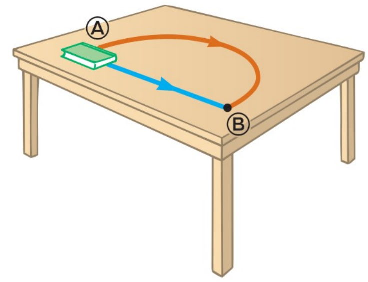


Figura 7.19 El trabajo invertido contra la fuerza de fricción cinética depende de la trayectoria tomada mientras el libro se traslada de Ⓐ a Ⓑ. El trabajo es mayor a lo largo de la trayectoria café que a lo largo de la trayectoria azul.

7.8 Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

En la sección anterior se encontró que el trabajo consumido en un integrante de un sistema por una fuerza conservativa entre los integrantes del sistema no depende de la trayectoria seguida por el integrante en movimiento. El trabajo sólo depende de las coordenadas inicial y final. En consecuencia, se puede definir una **función de energía potencial** $\boldsymbol{U}$ tal que el trabajo invertido dentro del sistema por la fuerza conservativa sea igual a la disminución en la energía potencial del sistema. Conciba un sistema de partículas en el que la configuración cambia debido al movimiento de una partícula a lo largo del eje x. El trabajo realizado por una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ conforme una partícula se traslada a lo largo del eje x es[4]

$$W_c = \int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx = -\Delta U \tag{7.25}$$

donde F_x es la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección del desplazamiento. Esto es: el trabajo invertido por una fuerza conservativa que actúa entre integrantes de un sistema es igual al negativo del cambio en la energía potencial del sistema asociado con dicha fuerza cuando cambia la configuración del sistema. La ecuación 7.25 también se puede expresar como

$$\Delta U = U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\, dx \tag{7.26}$$

[4] Para un desplazamiento general, el trabajo realizado en dos o tres dimensiones también es igual a $-\Delta U$, donde $U = U(x, y, z)$. Esta ecuación se escribe formalmente como $W_c = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = U_i - U_f$.

En consecuencia, ΔU es negativa cuando F_x y dx están en la misma dirección, como cuando se baja un objeto en un campo gravitacional o cuando un resorte empuja un objeto hacia el equilibrio.

Con frecuencia es conveniente establecer alguna ubicación particular x_i de un integrante de un sistema como representativo de una configuración de referencia y medir todas las diferencias de energía potencial en relación con él. En tal caso es posible definir la función de energía potencial como

$$U_f(x) = -\int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + U_i \tag{7.27}$$

Frecuentemene el valor de U_i se considera cero para la configuración de referencia. No importa qué valor se asigne a U_i porque cualquier valor distinto de cero simplemente desplaza a $U_f(x)$ en una cantidad constante y sólo el *cambio* en energía potencial es físicamente significativo.

Si el punto de aplicación de la fuerza se somete a un desplazamiento infinitesimal dx, el cambio infinitesimal en la energía potencial del sistema dU se expresa como

$$dU = -F_x dx$$

Por lo tanto, la fuerza conservativa se relaciona con la función de energía potencial mediante la correspondencia[5]

Relación de fuerza entre integrantes de un sistema y la energía potencial del sistema ▶

$$\boxed{F_x = -\frac{dU}{dx}} \tag{7.28}$$

Es decir, **la componente *x* de una fuerza conservativa que actúa sobre un objeto dentro de un sistema es igual a la derivada negativa de la energía potencial del sistema en relación con *x*.**

Es fácil comprobar la ecuación 7.28 para los dos ejemplos ya analizados. En el caso del resorte deformado, $U_s = \frac{1}{2}kx^2$; debido a eso,

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

que corresponde a la fuerza restauradora en el resorte (ley de Hooke). Ya que la función de energía potencial gravitacional es $U_g = mgy$, se sigue de la ecuación 7.28 que $F_g = -mg$ cuando deriva U_g respecto de y en lugar de x.

Ahora se ve que U es una función importante porque de ella se deduce una fuerza conservativa. A más de esto, la ecuación 7.28 pone en claro que sumar una constante a la energía potencial no es importante porque la derivada de una constante es cero.

Pregunta rápida 7.8 ¿Qué representa la pendiente de una gráfica de $U(x)$ en función de x? a) la magnitud de la fuerza sobre el objeto, b) el negativo de la magnitud de la fuerza sobre el objeto, c) la componente x de la fuerza sobre el objeto, d) el negativo de la componente x de la fuerza sobre el objeto.

---

[5] En tres dimensiones, la expresión es

$$\vec{\mathbf{F}} = -\frac{\partial U}{\partial x}\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial U}{\partial y}\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial U}{\partial z}\,\hat{\mathbf{k}}$$

donde $(\partial U/\partial x)$ y así sucesivamente son derivadas parciales. En el lenguaje del cálculo vectorial, $\vec{\mathbf{F}}$ es igual al negativo del *gradiente* de la cantidad escalar $U(x, y, z)$.

7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

Con frecuencia el movimiento de un sistema se puede entender cualitativamente mediante una gráfica de su energía potencial en función de la posición de un integrante del sistema. Considere la función energía potencial para un sistema bloque–resorte, dada por $U_s = \frac{1}{2}kx^2$. Esta función se grafica en función de x en la figura 7.20a. La fuerza F_x que ejerce el resorte en el bloque se relaciona con U_s a través de la ecuación 7.28:

$$F_s = -\frac{dU_s}{dx} = -kx$$

Como se vio en la pregunta rápida 7.8, la componente x de la fuerza es igual al negativo de la pendiente de la curva U en función de x. Cuando el bloque se coloca en reposo en la posición de equilibrio del resorte ($x = 0$), donde $F_x = 0$, permanecerá ahí a menos que alguna fuerza externa F_{ext} actúe sobre él. Si esta fuerza externa estira el resorte desde el equilibrio, x es positivo y la pendiente dU/dx es positiva; debido a eso, la fuerza F_s que ejerce el resorte es negativa y el bloque acelera de regreso hacia $x = 0$ cuando se libera. Si la fuerza externa comprime el resorte, x es negativa y la pendiente es negativa; por lo tanto, F_s es positiva y una vez más la masa acelera hacia $x = 0$ al momento de liberarse.

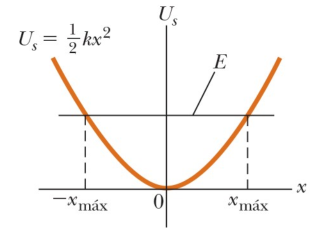
A partir de este análisis, se concluye que la posición $x = 0$ para un sistema bloque–resorte es aquella de **equilibrio estable**. Es decir: cualquier movimiento que se aleje de esta posición da como resultado una fuerza que se dirige de regreso hacia $x = 0$. En general, **las configuraciones de un sistema en equilibrio estable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un mínimo.**

Si el bloque en la figura 7.20 se mueve hacia una posición inicial $x_{\text{máx}}$ y en tal caso se libera del reposo, su energía total inicialmente es la energía potencial $\frac{1}{2}kx_{\text{máx}}^2$ almacenada en el resorte. Conforme el bloque comienza a moverse, el sistema adquiere energía cinética y pierde energía potencial. El bloque oscila (se mueve hacia atrás y hacia adelante) entre los dos puntos $x = -x_{\text{máx}}$ y $x = +x_{\text{máx}}$, llamados *puntos de retorno*. De hecho, puesto que ninguna energía se transforma en energía interna debido a la fricción, el bloque oscila entre $-x_{\text{máx}}$ y $+x_{\text{máx}}$ por siempre. (Estas oscilaciones se discuten más en el capítulo 15.)

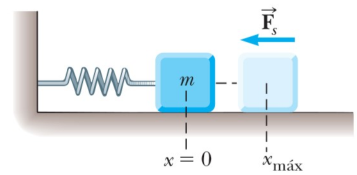
Otro sistema mecánico simple con una configuración de equilibrio estable es una bola que rueda en el fondo de un tazón. En cualquier momento la bola se desplaza de su posición más baja y tiende a regresar a dicha posición cuando se libera.

Ahora considere una partícula móvil a lo largo del eje x bajo la influencia de una fuerza conservativa F_x, donde la curva U con x es como la que se muestra en la figura 7.21. Nuevamente, $F_x = 0$ en $x = 0$, y por ende la partícula está en equilibrio en este punto. Sin embargo, esta posición es de **equilibrio inestable** por la explicación que sigue: suponga que la partícula se desplaza hacia la derecha ($x > 0$). Ya que la pendiente es negativa para $x > 0$, $F_x = -dU/dx$ es positiva y la partícula acelera alejándose de $x = 0$. Si en vez de ello la partícula está en $x = 0$ y se desplaza hacia la izquierda ($x < 0$), la fuerza es negativa porque la pendiente es positiva para $x < 0$ y la partícula de nuevo acelera alejándose de la posición de equilibrio. En esta situación la posición $x = 0$ es de equilibrio inestable porque, para cualquier desplazamiento a partir de este punto, la fuerza empuja la partícula más lejos del equilibrio y hacia una posición de menor energía potencial. Un lápiz que se equilibra sobre su punta está en una posición de equilibrio inestable. Si el lápiz se desplaza un poco de su posición absolutamente vertical y después se libera, es seguro que caerá. En general, **las configuraciones de un sistema en equilibrio inestable corresponden a aquellas para las que $U(x)$ del sistema es un máximo.**

Por último, una configuración llamada **equilibrio neutro** surge cuando U es constante en alguna región. Pequeños desplazamientos de un objeto desde una posición en esta región no producen fuerzas restauradoras ni perturbadoras. Una bola que yace sobre una superficie horizontal plana es un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro.



a)



b)

Figura 7.20 a) Energía potencial como función de x para el sistema bloque–resorte sin fricción que se muestra en b). El bloque oscila entre los puntos de retorno, que tienen las coordenadas $x = \pm x_{\text{máx}}$. Observe que la fuerza restauradora que ejerce el resorte siempre actúa hacia $x = 0$, la posición de equilibrio estable.

PREVENCIÓN DE RIESGOS OCULTOS 7.11

Diagramas de energía

Un error común es pensar que la energía potencial en la gráfica de un diagrama de energía representa altura. Por ejemplo, no es el caso en la figura 7.20, donde el bloque sólo se mueve horizontalmente.

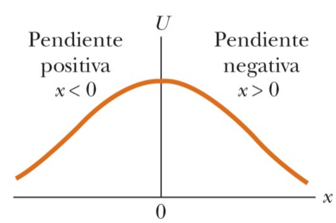


Figura 7.21 Gráfica de U con x para una partícula que tiene una posición de equilibrio inestable ubicada en $x = 0$. Para cualquier desplazamiento finito de la partícula, la fuerza sobre la partícula se dirige alejándose de $x = 0$.

EJEMPLO 7.9 Fuerza y energía a escala atómica

La energía potencial asociada con la fuerza entre dos átomos neutros en una molécula se representa mediante la función energía potencial de Lennard–Jones:

$$U(x) = 4\epsilon\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right]$$

donde x es la separación de los átomos. La función $U(x)$ contiene dos parámetros σ y ϵ que están determinados por los experimentos. Valores muestra para la interacción entre dos átomos en una molécula son $\sigma = 0.263$ nm y $\epsilon = 1.51 \times 10^{-22}$ J. Con una hoja de cálculo o herramienta similar, grafique esta función y encuentre la distancia más probable entre los dos átomos.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Los dos átomos en la molécula se identifican como un sistema. Respecto a nuestra interpretación de que existen moléculas estables, se espera encontrar equilibrio estable cuando los dos átomos estén separados por cierta distancia de equilibrio.

Categorizar Ya que existe una función energía potencial, la fuerza entre los átomos se clasifica como conservativa. Para una fuerza conservativa, la ecuación 7.28 describe la correspondencia entre la fuerza y la función energía potencial.

Analizar Existe equilibrio estable para una distancia de separación en que la energía potencial del sistema de dos átomos (la molécula) es un mínimo.

Tome la derivada de la función $U(x)$:

$$\frac{dU(x)}{dx} = 4\epsilon\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{x}\right)^{6}\right] = 4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x^{7}}\right]$$

Minimice la función $U(x)$ al hacer su derivada igual a cero:

$$4\epsilon\left[\frac{-12\sigma^{12}}{x_{eq}{}^{13}} + \frac{6\sigma^{6}}{x_{eq}{}^{7}}\right] = 0 \quad\rightarrow\quad x_{eq} = (2)^{1/6}\sigma$$

Evalúe x_{eq}, la separación de equilibrio de los dos átomos en la molécula:

$$x_{eq} = (2)^{1/6}\,(0.263\text{ nm}) = \boxed{2.95 \times 10^{-10}\text{ m}}$$

Grafique la función de Lennard–Jones en ambos lados de este valor crítico para generar el diagrama de energía como se muestra en la figura 7.22.

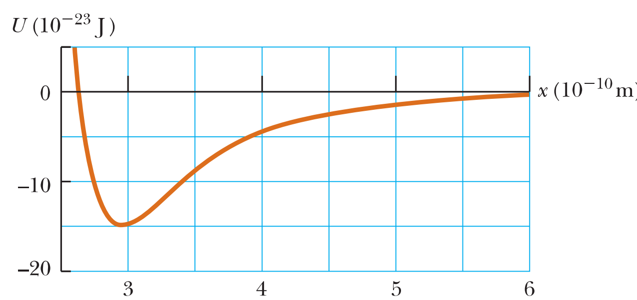


Figura 7.22 (Ejemplo 7.9) Curva de energía potencial asociada con una molécula. La distancia x es la separación entre los dos átomos que conforman la molécula.

Finalizar Note que $U(x)$ es extremadamente grande cuando los átomos están muy cerca uno del otro, es un mínimo cuando los átomos están en su separación crítica y después aumenta de nuevo conforme los átomos se separan. Cuando $U(x)$ es mínima, los átomos están en equilibrio estable, lo que indica que la separación más probable entre ellos se presenta en este punto.

Resumen

DEFINICIONES

Con mucha frecuencia, un **sistema** es una sola partícula, un conjunto de partículas o una región del espacio, y puede variar en tamaño y forma. La **frontera del sistema** separa al sistema del **medio ambiente.**

El **trabajo** W invertido en un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ en el sistema es el producto de la magnitud Δr del desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y la componente $F \cos \theta$ de la fuerza a lo largo de la dirección del desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}}$:

$$W \equiv F\,\Delta r \cos \theta \qquad \textbf{(7.1)}$$

Si una fuerza variable realiza trabajo en una partícula conforme la partícula se traslada a lo largo del eje x desde x_i hasta x_f, el trabajo consumido por la fuerza en la partícula se proporciona por

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad \textbf{(7.7)}$$

donde F_x es la componente de fuerza en la dirección x.

El **producto escalar** (producto punto) de dos vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ se define mediante la correspondencia

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} \equiv AB \cos \theta \qquad \textbf{(7.2)}$$

donde el resultado es una cantidad escalar y θ es el ángulo entre los dos vectores. El producto escalar obedece a las leyes conmutativa y distributiva.

La **energía cinética** de una partícula de masa m que se mueve con una rapidez v es

$$K \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \textbf{(7.16)}$$

Si una partícula de masa m está a una distancia y sobre la superficie de la Tierra, la **energía potencial gravitacional** del sistema partícula-Tierra es

$$U_g \equiv mgy \qquad \textbf{(7.19)}$$

La **energía potencial elástica** almacenada en un resorte con constante de fuerza k es

$$U_s \equiv \tfrac{1}{2}kx^2 \qquad \textbf{(7.22)}$$

Una fuerza es **conservativa** si el trabajo que realiza en una partícula que es integrante del sistema, conforme la partícula se mueve entre dos puntos, es independiente de la trayectoria que sigue la partícula entre los dos puntos. Además, una fuerza es conservativa si el trabajo que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula se mueve a través de una trayectoria cerrada arbitraria y regresa a su posición inicial. Una fuerza que no satisface estos criterios se dice que es **no conservativa**.

La **energía mecánica total de un sistema** se define como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_{\text{mec}} \equiv K + U \qquad \textbf{(7.24)}$$

CONCEPTOS Y PRINCIPIOS

El **teorema trabajo–energía cinética** establece que, si una fuerza externa invierte trabajo en un sistema, y el único cambio en el sistema es en su rapidez,

$$W_{\text{neto}} = K_f - K_i = \Delta K = \tfrac{1}{2}mv_f^{\,2} - \tfrac{1}{2}mv_i^{\,2} \qquad \textbf{(7.15, 7.17)}$$

Una **función de energía potencial** U se asocia sólo con una fuerza conservativa. Si una fuerza conservativa $\vec{\mathbf{F}}$ actúa entre integrantes de un sistema mientras un integrante se mueve a lo largo del eje x de x_i a x_f, el cambio en la energía potencial del sistema es igual al negativo del trabajo invertido por dicha fuerza:

$$U_f - U_i = -\int_{x_i}^{x_f} F_x \, dx \qquad \textbf{(7.26)}$$

Los sistemas están en tres clases de configuraciones de equilibrio cuando la fuerza neta en un integrante del sistema es cero. Las configuraciones de **equilibrio estable** corresponden cuando $U(x)$ es un mínimo. Las configuraciones de **equilibrio inestable** corresponden cuando $U(x)$ es un máximo. El **equilibrio neutro** surge cuando U es constante mientras un integrante del sistema se mueve en alguna región.

Preguntas

O Indica pregunta complementaria.

1. Discuta si algún trabajo se invierte por cada uno de los siguientes agentes y, si es así, si el trabajo es positivo o negativo: a) un pollo que rasca la tierra, b) una persona que estudia, c) una grúa que levanta una cubeta de concreto, d) la fuerza gravitacional sobre la cubeta del inciso c), e) los músculos de la pierna de una persona en el acto de sentarse.

2. Cite dos ejemplos en los que se ejerza una fuerza sobre un objeto sin realizar trabajo alguno sobre el objeto.

3. Cuando un péndulo oscila hacia atrás y hacia adelante, las fuerzas que actúan sobre el objeto suspendido son la fuerza gravitacional, la tensión en la cuerda de soporte y la resistencia del aire. a) ¿Cuál de estas fuerzas, si alguna, no realiza trabajo en el péndulo? b) ¿Cuál de estas fuerzas realiza trabajo negativo en todo momento durante su movimiento? c) Describa el trabajo que invierte la fuerza gravitacional mientras el péndulo oscila.

4. **O** Sea $\hat{\mathbf{N}}$ que representa la dirección horizontal al norte, $\widehat{\mathbf{NE}}$ que representa el noreste (la mitad entre norte y este), $\widehat{\mathbf{up}}$ representa la dirección vertical hacia arriba, etcétera. Cada especificación de dirección se considera como un vector unitario. Clasifique de mayor a menor los siguientes productos punto. Observe que cero es mayor que un número negativo. Si dos cantidades son iguales, muestre ese hecho en su clasificación. a) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{N}}$, b) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \widehat{\mathbf{NE}}$, c) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$, d) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, e) $\hat{\mathbf{N}} \cdot \widehat{\mathbf{up}}$, f) $\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}$, g) $\widehat{\mathbf{SE}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$, h) $\widehat{\mathbf{up}} \cdot \widehat{\mathbf{down}}$.

5. ¿Para qué valores del ángulo θ entre dos vectores su producto escalar es a) positivo y b) negativo?

6. **O** La figura 7.9a muestra un resorte ligero extendido que ejerce una fuerza F_s hacia la izquierda sobre el bloque. **i)** ¿El bloque ejerce una fuerza sobre el resorte? Elija toda respuesta correcta. a) No, no lo hace. b) Sí, hacia la izquierda. c) Sí, hacia la derecha. d) Su magnitud es mayor que F_s. e) Su magnitud es igual a F_s. f) Su magnitud es menor que F_s. **ii)** ¿El resorte ejerce una fuerza sobre la pared? Elija toda respuesta correcta de la misma lista, de a) a f).

7. Cierto resorte uniforme tiene constante de resorte k. Ahora el resorte se corta a la mitad. ¿Cuál es la relación entre k y la constante de resorte k' de cada resorte más pequeño resultante? Explique su razonamiento.

8. ¿La energía cinética puede ser negativa? Explique.

9. Discuta el trabajo invertido por un pitcher que lanza una pelota de beisbol. ¿Cuál es la distancia aproximada a través de la cual actúa la fuerza mientras se lanza la pelota?

10. **O** La bala 2 tiene el doble de masa que la bala 1. Ambas se disparan de modo que tienen la misma rapidez. La energía cinética de la bala 1 es K. La energía cinética de la bala 2 es a) $0.25K$, b) $0.5K$, c) $0.71K$, d) K, e) $2K$, f) $4K$.

11. **O** Si la rapidez de una partícula se duplica, ¿qué ocurre con su energía cinética? a) Se vuelve cuatro veces mayor. b) Se vuelve dos veces mayor. c) Se vuelve $\sqrt{2}$ veces mayor. d) No cambia. e) Se vuelve la mitad.

12. Un estudiante tiene la idea de que el trabajo total invertido en un objeto es igual a su energía cinética final. ¿Este enunciado es cierto siempre, a veces o nunca? Si a veces es cierto, ¿bajo qué circunstancias? Si es siempre o nunca, explique por qué.

13. ¿Una fuerza normal puede realizar trabajo? Si no, ¿por qué no? Si sí, dé un ejemplo.

14. **O** ¿Qué se puede decir acerca de la rapidez de una partícula si el trabajo neto realizado sobre ella es cero? a) Es cero. b) Disminuye. c) No cambia. d) No se puede extraer una conclusión.

15. **O** Un carro se pone a rodar a través de una mesa a nivel, con la misma rapidez en cada pista. Si corre en un tramo de arena, el carro ejerce sobre la arena una fuerza horizontal promedio de 6 N y recorre una distancia de 6 cm a través de la arena conforme llega al reposo. **i)** Si en vez de ello el carro corre en un tramo de grava sobre la que ejerce una fuerza horizontal promedio de 9 N, ¿cuánto recorrerá el carro en la grava hasta detenerse? Elija una respuesta. a) 9 cm, b) 6 cm, c) 4 cm, d) 3 cm, e) ninguna de estas respuestas. **ii)** Si en vez de ello el carro corre en un tramo de harina, rueda 18 cm antes de detenerse. ¿Cuál es la magnitud promedio de la fuerza horizontal que el carro ejerce sobre la harina? a) 2 N, b) 3 N, c) 6 N, d) 18 N, e) ninguna de estas respuestas. **iii)** Si en vez de ello el carro corre sin obstáculo alguno, ¿cuánto recorrerá? a) 6 cm, b) 18 cm, c) 36 cm, d) una distancia infinita.

16. La energía cinética de un objeto depende del marco de referencia en el que se observa su movimiento. Dé un ejemplo para ilustrar este punto.

17. **O** Para estirar 10 cm desde su longitud sin deformar, se requieren 4 J para un resorte que se describe mediante la ley de Hooke. ¿Cuánto trabajo adicional se requiere para estirar el resorte 10 cm adicionales? Elija una: a) ninguna, b) 2 J, c) 4 J, d) 8 J, e) 12 J, f) 16 J.

18. Si sólo una fuerza externa actúa sobre una partícula, ¿necesariamente cambia la a) energía cinética de la partícula? b) ¿Su velocidad?

19. **O** **i)** Clasifique las aceleraciones gravitacionales que mediría para a) un objeto de 2 kg a 5 cm arriba del suelo, b) un objeto de 2 kg a 120 cm sobre el suelo, c) un objeto de 3 kg a 120 cm sobre el suelo y d) un objeto de 3 kg a 80 cm sobre el suelo. Mencione primero el que tiene aceleración con mayor magnitud. Si dos son iguales, muestre su igualdad en la lista. **ii)** Clasifique las fuerzas gravitacionales sobre los mismos cuatro objetos, primero la mayor magnitud. **iii)** Clasifique las energías potenciales gravitacionales (del sistema objeto–Tierra) para los mismos cuatro objetos, primero la mayor, y considere $y = 0$ en el suelo.

20. Se le encomienda regresar a sus anaqueles los libros de una biblioteca. Levante un libro del suelo hasta el anaquel superior. La energía cinética del libro sobre el suelo fue cero y la energía cinética del libro en el anaquel superior es cero, así que no ocurre cambio en la energía cinética aunque usted hizo algo de trabajo en levantar el libro. ¿Se violó el teorema trabajo–energía cinética?

21. Los músculos del cuerpo ejercen fuerzas cuando se levanta, empuja, corre, salta, etcétera. ¿Estas fuerzas son conservativas?

22. ¿Qué forma tendría la gráfica de U con x si una partícula estuviese en una región de equilibrio neutro?

23. **O** A un cubo de hielo se le da un empujón y se desliza sin fricción sobre una mesa a nivel. ¿Qué es correcto? a) Está en equilibrio estable. b) Está en equilibrio inestable. c) Está en equilibrio neutro. d) No está en equilibrio.

24. Para limpiarlas, usted quita todas las teclas removibles de un teclado de computadora. Cada tecla tiene la forma de una pequeña caja con un lado abierto. Por accidente, tira las teclas en el suelo. Explique por qué muchas más de ellas aterrizan con el lado de la letra hacia abajo que con el lado abierto.

25. ¿Quién estableció por primera vez el teorema trabajo–energía cinética? ¿Quién demostró que es útil al resolver muchos problemas prácticos? Realice una investigación para responder estas preguntas.

Problemas

Sección 7.2 Trabajo invertido por una fuerza constante

1. Un bloque de 2.50 kg de masa se empuja 2.20 m a lo largo de una mesa horizontal sin fricción por una fuerza constante de 16.0 N dirigida 25.0° debajo de la horizontal. Determine el trabajo invertido sobre el bloque por a) la fuerza aplicada, b) la fuerza normal que ejerce la mesa y c) la fuerza gravitacional. d) Determine el trabajo neto invertido en el bloque.

2. Una gota de lluvia de 3.35×10^{-5} kg de masa cae verticalmente con rapidez constante bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Modele la gota como partícula. Mientras cae 100 m, ¿cuál es el trabajo consumido en la gota a) por la fuerza gravitacional y b) por la resistencia del aire?

3. Batman, cuya masa es de 80.0 kg, está colgado en el extremo libre de una soga de 12.0 m, el otro extremo está fijo de la rama de un árbol arriba de él. Al flexionar repetidamente la cintura, hace que la soga se ponga en movimiento, y eventualmente la hace balancear lo suficiente para que pueda llegar a una repisa cuando la soga forma un ángulo de 60.0° con la vertical. ¿Cuánto trabajo invirtió la fuerza gravitacional en Batman en esta maniobra?

4. ● El objeto 1 empuja sobre el objeto 2 mientras se mueven juntos, como un buldózer que empuja una piedra. Suponga que el objeto 1 realiza 15.0 J de trabajo sobre el objeto 2. ¿El objeto 2 realiza trabajo sobre el objeto 1? Explique su respuesta. Si es posible, determine cuánto trabajo y explique su razonamiento.

Sección 7.3 Producto escalar de dos vectores

5. Para dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, demuestre que $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$. *Sugerencia:* Escriba $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$ en forma de vectores unitarios y aplique las ecuaciones 7.4 y 7.5.

6. El vector $\vec{\mathbf{A}}$ tiene una magnitud de 5.00 unidades y $\vec{\mathbf{B}}$ tiene una magnitud de 9.00 unidades. Los dos vectores forman un ángulo de 50.0° uno con el otro. Hallar $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$.

Nota: En los problemas del 7 al 10, calcule respuestas numéricas a tres cifras significativas, como siempre.

7. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}})$ actúa en una partícula que experimenta un desplazamiento $\Delta\vec{\mathbf{r}} = (3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$ m. Hallar a) el trabajo invertido por la fuerza en la partícula y b) el ángulo entre $\vec{\mathbf{F}}$ y $\Delta\vec{\mathbf{r}}$.

8. Encuentre el producto escalar de los vectores en la figura P7.8.

9. Con la definición del producto escalar, encuentre los ángulos entre los siguientes: a) $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$, b) $\vec{\mathbf{A}} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, c) $\vec{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$.

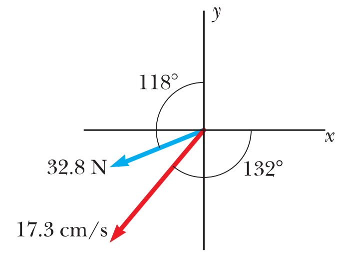


Figura P7.8

10. Para los vectores $\vec{\mathbf{A}} = 3\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - \hat{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = 2\hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}}$, encuentre $\vec{\mathbf{C}} \cdot (\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}})$.

11. Sea $\vec{\mathbf{B}} = 5.00$ m a 60.0°. Sea $\vec{\mathbf{C}}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{\mathbf{A}}$ y un ángulo de dirección mayor que el de $\vec{\mathbf{A}}$ en 25.0°. Sea $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 30.0\ \text{m}^2$ y $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{C}} = 35.0\ \text{m}^2$. Encuentre $\vec{\mathbf{A}}$.

Sección 7.4 Trabajo consumido por una fuerza variable

12. La fuerza que actúa en una partícula es $F_x = (8x - 16)$ N, donde x está en metros. a) Grafique esta fuerza con x desde $x = 0$ hasta $x = 3.00$ m. b) A partir de su gráfica, encuentre el trabajo neto realizado por esta fuerza sobre la partícula conforme se traslada de $x = 0$ a $x = 3.00$ m.

13. La fuerza que actúa sobre una partícula varía como se muestra en la figura P7.13. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza en la partícula conforme se mueve a) de $x = 0$ a $x = 8.00$ m, b) de $x = 8.00$ m a $x = 10.0$ m, y c) de $x = 0$ a $x = 10.0$ m.

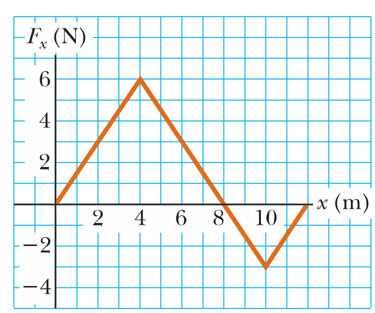


Figura P7.13

14. Una fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (4x\,\hat{\mathbf{i}} + 3y\,\hat{\mathbf{j}})$ N actúa sobre un objeto mientras el objeto se mueve en la dirección x desde el origen hasta $x = 5.00$ m. Encuentre el trabajo $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ invertido por la fuerza sobre el objeto.

15. Una partícula se somete a una fuerza F_x que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. Encuentre el trabajo invertido por la fuerza en la partícula mientras se mueve a) de $x = 0$ a $x = 5.00$ m, b) de $x = 5.00$ a $x = 10.0$ m, y c) de $x = 10.0$ m a $x = 15.0$ m. d) ¿Cuál es el trabajo total invertido por la fuerza sobre la distancia $x = 0$ a $x = 15.0$ m?

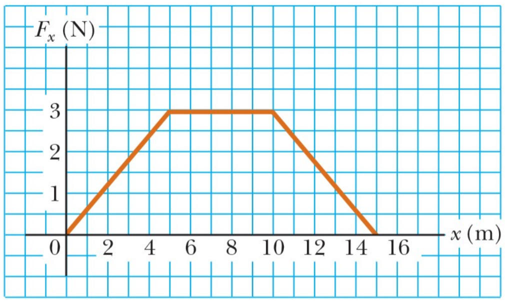


Figura P7.15 Problemas 15 y 32.

16. Un arquero jala hacia atrás la cuerda de su arco 0.400 m al ejercer una fuerza que aumenta uniformemente de cero a 230 N. a) ¿Cuál es la constante de resorte equivalente del arco? b) ¿Cuánto trabajo realiza el arquero al estirar su arco?

17. Cuando un objeto de 4.00 kg cuelga verticalmente en cierto resorte ligero descrito por la ley de Hooke, el resorte se estira 2.50 cm. Si se quita el objeto de 4.00 kg, a) ¿cuánto se estirará el resorte si se le cuelga un objeto de 1.50 kg? b) ¿Cuánto trabajo debe realizar un agente externo para estirar el mismo resorte 4.00 cm desde su posición sin estirar?

18. La ley de Hooke describe cierto resorte ligero de 35.0 cm de longitud sin estirar. Cuando un extremo se une a la parte superior de un marco de puerta y del otro extremo se cuelga un objeto de 7.50 kg, la longitud del resorte es 41.5 cm. a) Encuentre su constante de resorte. b) La carga y el resorte se desmontan. Dos personas jalan en direcciones opuestas en los extremos del resorte, cada una con una fuerza de 190 N. Encuentre la longitud del resorte en esta situación.

19. En un sistema de control, un acelerómetro consiste de un objeto de 4.70 g que se desliza sobre un riel horizontal. Un resorte de masa pequeña une al objeto a una pestaña en un extremo del riel. La grasa en el riel hace despreciable la fricción estática, pero amortigua rápidamente las vibraciones del objeto deslizante. Cuando el acelerómetro se mueve con una aceleración estable de $0.800g$, el objeto llega a una posición 0.500 cm de su posición de equilibrio. Encuentre la constante de fuerza requerida para el resorte.

20. Un resorte ligero, con constante de fuerza 3.85 N/m, se comprime 8.00 cm mientras se mantiene entre un bloque de 0.250 kg a la izquierda y un bloque de 0.500 kg a la derecha, ambos en reposo sobre una superficie horizontal. El resorte ejerce una fuerza en cada bloque, y tiende a separarlos. Los bloques se sueltan simultáneamente desde el reposo. Encuentre la aceleración con la que cada bloque comienza a moverse, dado que el coeficiente de fricción cinética entre cada bloque y la superficie es a) 0, b) 0.100 y c) 0.462.

21. Un vagón de 6 000 kg rueda a lo largo de la vía con fricción despreciable. El vagón se lleva al reposo mediante una combinación de dos resortes en espiral, como se ilustra en la figura P7.21. Ambos resortes se describen mediante la ley de Hooke con $k_1 = 1\,600$ N/m y $k_2 = 3\,400$ N/m. Después de que el primer resorte se comprime una distancia de 30.0 cm, el segundo resorte actúa con el primero para aumentar la fuerza mientras se presenta una compresión adicional como se muestra en la gráfica. El vagón llega al reposo 50.0 cm después de que hace el primer contacto con el sistema de dos resortes. Encuentre la rapidez inicial del vagón.

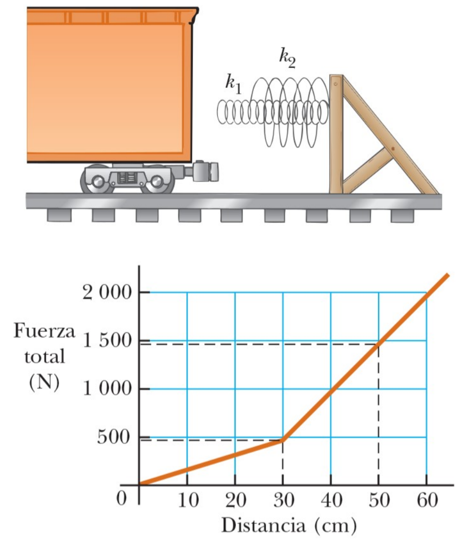


Figura P7.21

22. Se dispara una bala de 100 g de un rifle que tiene un cañón de 0.600 m de largo. Elija el origen como la ubicación donde la bala comienza a moverse. En tal caso la fuerza (en newtons) que ejercen sobre la bala los gases en expansión es $15\,000 + 10\,000x - 25\,000x^2$, donde x está en metros. a) Determine el trabajo invertido por el gas en la bala conforme la bala recorre la longitud del cañón. b) **¿Qué pasaría si?** Si el cañón mide 1.00 m de largo, ¿cuánto trabajo se consume y cómo se compara este valor con el trabajo calculado en el inciso a)?

23. Un resorte ligero, con constante de resorte 1 200 N/m, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte 1 800 N/m. Un objeto de 1.50 kg de masa cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describa estos resortes como *en serie*.

24. Un resorte ligero, con constante de resorte k_1, cuelga de un soporte elevado. De su extremo inferior cuelga un segundo resorte ligero, que tiene constante de resorte k_2. Un objeto de masa m cuelga en reposo del extremo inferior del segundo resorte. a) Encuentre la distancia de extensión total del par de resortes. b) Encuentre la constante de resorte efectiva del par de resortes como sistema. Describa estos resortes como *en serie*.

25. Una partícula pequeña de masa m se jala hacia lo alto de un medio cilindro sin fricción (de radio R) mediante una cuerda que pasa sobre lo alto del cilindro, como se ilustra en la figura P7.25. a) Si supone que la partícula se mueve con rapidez constante, demuestre que $F = mg\cos\theta$. *Nota:* Si la partícula se mueve con rapidez constante, la componente de su aceleración tangente al cilindro debe ser cero en todo momento. b) Mediante integración directa de $W = \int \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, encuentre el trabajo invertido al mover la partícula con rapidez constante desde el fondo hasta lo alto del medio cilindro.

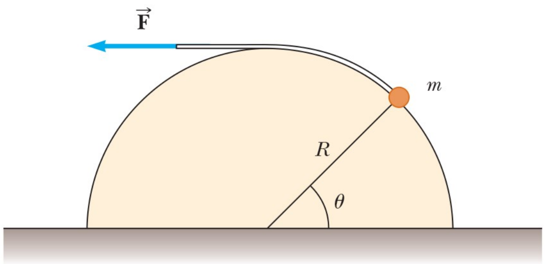


Figura P7.25

26. Exprese las unidades de la constante de fuerza de un resorte en unidades fundamentales del SI.

27. **Problema de repaso.** La gráfica de la figura P7.27 especifica una correspondencia funcional entre las dos variables u y v. a) Encuentre $\int_a^b u\, dv$. b) Encuentre $\int_b^a u\, dv$. c) Encuentre $\int_a^b v\, du$.

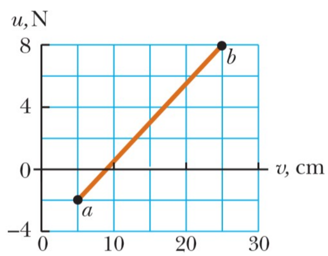


Figura P7.27

28. Un dispensador de charolas en una cafetería sostiene una pila de charolas sobre un anaquel que cuelga de cuatro resortes en espiral idénticos bajo tensión, uno cerca de cada esquina del anaquel. Cada charola es rectangular, de 45.3 cm por 35.6 cm, 0.450 cm de grosor y 580 g de masa. Demuestre que la charola superior en la pila siempre está a la misma altura sobre el piso, aunque haya muchas charolas en el dispensador. Encuentre la constante de resorte que cada uno debe tener para que el dispensador funcione en esta forma conveniente. ¿Alguna parte de la información es innecesaria para esta determinación?

Sección 7.5 Energía cinética y el teorema trabajo–energía cinética

29. Una partícula de 0.600 kg tiene una rapidez de 2.00 m/s en el punto Ⓐ y energía cinética de 7.50 J en el punto Ⓑ. ¿Cuáles son a) su energía cinética en Ⓐ, b) su rapidez en Ⓑ y c) el trabajo neto invertido en la partícula conforme se mueve de Ⓐ a Ⓑ?

30. Una bola de 0.300 kg tiene una rapidez de 15.0 m/s. a) ¿Cuál es su energía cinética? b) **¿Qué pasaría si?** Si su rapidez se duplica, ¿cuál sería su energía cinética?

31. Un objeto de 3.00 kg tiene una velocidad de $(6.00\,\hat{\mathbf{i}} - 2.00\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) ¿Cuál es su energía cinética en este momento? b) ¿Cuál es el trabajo neto invertido en el objeto si su velocidad cambia a $(8.00\,\hat{\mathbf{i}} + 4.00\,\hat{\mathbf{j}})$ m/s? *Nota:* De la definición del producto punto, $v^2 = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

32. Una partícula de 4.00 kg se somete a una fuerza neta que varía con la posición, como se muestra en la figura P7.15. La partícula comienza a moverse en $x = 0$, muy cerca del reposo. ¿Cuál es su rapidez en a) $x = 5.00$ m, b) $x = 10.0$ m y c) $x = 15.0$ m?

33. Un martinete de 2 100 kg se usa para enterrar una viga I de acero en la tierra. El martinete cae 5.00 m antes de quedar en contacto con la parte superior de la viga. Después clava la viga 12.0 cm más en el suelo mientras llega al reposo. Aplicando consideraciones de energía, calcule la fuerza promedio que la viga ejerce sobre el martinete mientras éste llega al reposo.

34. ● Un carro de 300 g rueda a lo largo de una pista recta con velocidad de $0.600\,\hat{\mathbf{i}}$ m/s en $x = 0$. Un estudiante sostiene un imán enfrente del carro para temporalmente jalar hacia adelante sobre él, en seguida el carro se desplaza hacia un montículo de arena que se convierte en una pequeña pila. Estos efectos se representan cuantitativamente mediante la gráfica de la componente x de la fuerza neta sobre el carro como una función de la posición, en la figura P7.34. a) ¿El carro rodará todo el camino hasta la pila de arena? Explique cómo puede decirlo. b) Si es así, encuentre la rapidez a la que sale en $x = 7.00$ cm. Si no, ¿qué máxima coordenada x alcanza?

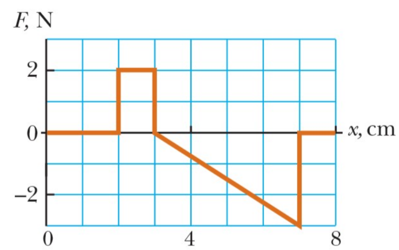


Figura P7.34

35. ● Se puede considerar al teorema trabajo–energía cinética como una segunda teoría de movimiento, paralela a las leyes de Newton, en cuanto que describe cómo las influencias externas afectan el movimiento de un objeto. En este problema, resuelva los incisos a) y b) por separado de los incisos c) y d), de modo que pueda comparar las predicciones de las dos teorías. En un cañón de rifle, una bala de 15.0 g acelera desde el reposo a una rapidez de 780 m/s. a) Encuentre el trabajo que se invierte en la bala. b) Si supone que el cañón del rifle mide 72.0 cm de largo, encuentre la magnitud de la fuerza neta promedio que actúa sobre él, como $\Sigma F = W/(\Delta r \cos\theta)$. c) Encuentre la aceleración constante de una bala que parte del reposo y gana una rapidez de 780 m/s en una distancia de 72.0 cm. d) Si supone ahora que la bala tiene 15.0 g de masa, encuentre la fuerza neta que actúa sobre ésta como $\Sigma F = ma$. e) ¿Qué conclusión puede extraer al comparar sus resultados?

36. En el cuello de la pantalla de cierto televisor blanco y negro, un cañón de electrones contiene dos placas metálicas cargadas, separadas 2.80 cm. Una fuerza eléctrica acelera cada electrón en el haz desde el reposo hasta 9.60% de la rapidez de la luz sobre esta distancia. a) Determine la energía cinética del electrón mientras deja el cañón de electrones. Los electrones portan esta energía a un material fosforescente en la superficie interior de la pantalla del televisor y lo hacen brillar. Para un electrón que pasa entre las placas en el cañón de electrones, determine, b) la magnitud de la fuerza eléctrica constante que actúa sobre el electrón, c) la aceleración y d) el tiempo de vuelo.

Sección 7.6 Energía potencial de un sistema

37. Un carro de montaña rusa, de 1 000 kg, inicialmente está en lo alto de un bucle, en el punto Ⓐ. Luego se mueve 135 pies a un ángulo de 40.0° bajo la horizontal, hacia un punto inferior Ⓑ. a) Elija el carro en el punto Ⓑ como la configuración cero para energía potencial gravitacional del sistema montaña rusa-

Tierra. Hallar la energía potencial del sistema cuando el carro está en los puntos Ⓐ y Ⓑ y el cambio en energía potencial conforme se mueve el carro. b) Repita el inciso a), pero haga la configuración cero con el carro en el punto Ⓐ.

38. Un niño de 400 N está en un columpio unido a cuerdas de 2.00 m de largo. Encuentre la energía potencial gravitacional del sistema niño–Tierra en relación con la posición más baja del niño cuando a) las cuerdas están horizontales, b) las cuerdas forman un ángulo de 30.0° con la vertical y c) el niño está en el fondo del arco circular.

Sección 7.7 Fuerzas conservativas y no conservativas

39. ● Una partícula de 4.00 kg se mueve desde el origen a la posición C, que tiene coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m (figura P7.39). Una fuerza en la partícula es la fuerza gravitacional que actúa en la dirección y negativa. Con la ecuación 7.3, calcule el trabajo invertido por la fuerza gravitacional en la partícula conforme va de O a C a lo largo de a) OAC, b) OBC y c) OC. Sus resultados deben ser idénticos. ¿Por qué?

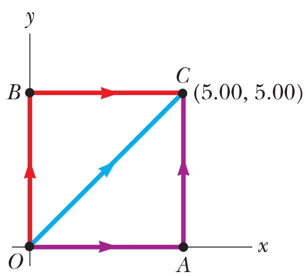


Figura P7.39 Problemas del 39 al 42.

40. a) Suponga que una fuerza constante actúa en un objeto. La fuerza no varía con el tiempo o con la posición o la velocidad del objeto. Comience con la definición general del trabajo invertido por una fuerza

$$W = \int_i^f \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

y demuestre que la fuerza es conservativa. b) Como caso especial, suponga que la fuerza $\vec{\mathbf{F}} = (3\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})$ N actúa en una partícula que se mueve de O a C en la figura P7.39. Calcule el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula conforme se mueve a lo largo de cada una de las tres trayectorias OAC, OBC y OC. Compruebe que sus tres respuestas son idénticas.

41. ● Una fuerza que actúa en una partícula móvil en el plano xy se conoce por $\vec{\mathbf{F}} = (2y\hat{\mathbf{i}} + x^2\hat{\mathbf{j}})$ N, donde x y y están en metros. Las partículas se mueven desde la posición original a la final en las coordenadas $x = 5.00$ m y $y = 5.00$ m como se muestra en la figura P7.39. Calcule el trabajo invertido por $\vec{\mathbf{F}}$ en la partícula cuando ésta se mueve a lo largo de a) OAC, b) OBC y c) OC. d) $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativa o no conservativa.

42. ● Una partícula se mueve en el plano xy en la figura P7.39 bajo la influencia de una fuerza de fricción con 3.00 N de magnitud y actúa en dirección opuesta al desplazamiento de la partícula. Calcule el trabajo invertido por la fuerza de fricción en la partícula conforme se mueve a lo largo de las siguientes trayectorias cerradas: a) la trayectoria OA seguida por la trayectoria de regreso AO, b) la trayectoria OA seguida por AC y la trayectoria de regreso CO, y c) la trayectoria OC seguida por la trayectoria de regreso CO. d) Cada una de las tres respuestas es distinta de cero. ¿Cuál es el significado de esta observación?

Sección 7.8 Correspondencia entre fuerzas conservativas y energía potencial

43. Una sola fuerza conservativa actúa sobre una partícula de 5.00 kg. La ecuación $F_x = (2x + 4)$ N describe la fuerza, donde x está en metros. Conforme la partícula se mueve a lo largo del eje x, de $x = 1.00$ m a $x = 5.00$ m, calcule a) el trabajo invertido por esta fuerza en la partícula, b) el cambio en la energía potencial del sistema y c) la energía cinética que tiene la partícula en $x = 5.00$ m si su rapidez es 3.00 m/s en $x = 1.00$ m.

44. Una sola fuerza conservativa que actúa en una partícula varía como $\vec{\mathbf{F}} = (-Ax + Bx^2)\,\hat{\mathbf{i}}$ N, donde A y B son constantes y x está en metros. a) Calcule la función energía potencial $U(x)$ asociada con esta fuerza, y tome $U = 0$ en $x = 0$. b) Encuentre el cambio de energía potencial y el cambio de energía cinética del sistema conforme la partícula se traslada de $x = 2.00$ m a $x = 3.00$ m.

45. La energía potencial de un sistema de dos partículas separadas por una distancia r se conoce por $U(r) = A/r$, donde A es una constante. Encuentre la fuerza radial $\vec{\mathbf{F}}$ que cada partícula ejerce sobre la otra.

46. Una función energía potencial para una fuerza en dos dimensiones es de la forma $U = 3x^3y - 7x$. Encuentre la fuerza que actúa en el punto (x, y).

Sección 7.9 Diagramas de energía y equilibrio de un sistema

47. Para la curva energía potencial que se muestra en la figura P7.47, a) determine si la fuerza F_x es positiva, negativa o cero en los cinco puntos indicados. b) Señale los puntos de equilibrio estable, inestable y neutro. c) Bosqueje la curva para F_x con x desde $x = 0$ hasta $x = 9.5$ m.

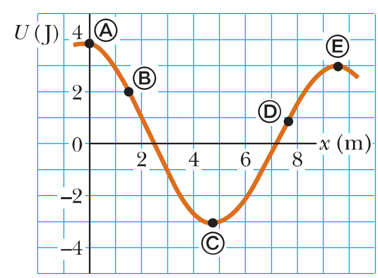


Figura P7.47

48. Un cono circular recto se puede equilibrar sobre una superficie horizontal en tres diferentes formas. Bosqueje estas tres configuraciones de equilibrio e identifíquelas como posiciones de equilibrio estable, inestable o neutro.

49. Una partícula de 1.18 kg de masa se une entre dos resortes idénticos en una mesa horizontal sin fricción. Ambos resortes tienen constante de resorte k e inicialmente no están estirados. a) La partícula se jala una distancia x a lo largo de una dirección perpendicular a la configuración inicial de los resortes, como se muestra en la figura P7.49. Demuestre que la fuerza ejercida por los resortes sobre la partícula es

$$\vec{\mathbf{F}} = -2kx\left(1 - \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

b) Demuestre que la energía potencial del sistema es

$$U(x) = kx^2 + 2kL\left(L - \sqrt{x^2 + L^2}\right)$$

c) Elabore una gráfica de $U(x)$ en función de x e identifique todos los puntos de equilibrio. Suponga $L = 1.20$ m y $k = 40.0$ N/m. d) Si la partícula se jala 0.500 m hacia la derecha y después se libera, ¿cuál es su rapidez cuando llega al punto de equilibrio $x = 0$?

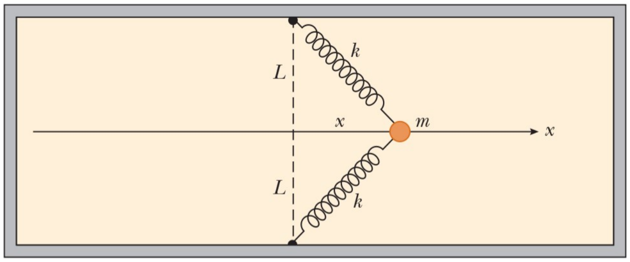


Figura P7.49

Problemas adicionales

50. Una bolita en el fondo de un tazón es un ejemplo de un objeto en posición de equilibrio estable. Cuando un sistema físico se desplaza en una cantidad x desde equilibrio estable, sobre él actúa una fuerza restauradora, que tiende a regresar al sistema su configuración de equilibrio. La magnitud de la fuerza restauradora puede ser una función complicada de x. Por ejemplo, cuando un ion en un cristal se desplaza de su sitio reticular, la fuerza restauradora puede no ser una simple función de x. En tales casos, por lo general se puede imaginar la función $F(x)$ como expresada por una serie de potencias en x como $F(x) = -(k_1x + k_2x^2 + k_3x^3 + \ldots)$. Aquí, el primer término es la ley de Hooke, que describe la fuerza que ejerce un solo resorte para desplazamientos pequeños. Por lo general en pequeñas desviaciones desde el equilibrio se ignoran los términos de orden superior; sin embargo, en algunos casos, puede ser deseable mantener también el segundo término. Si la fuerza restauradora se representa como $F = -(k_1x + k_2x^2)$, ¿cuánto trabajo se invierte al desplazar el sistema de $x = 0$ a $x = x_{máx}$ mediante una fuerza aplicada $-F$?

51. Un jardinero de beisbol lanza una pelota de 0.150 kg con una rapidez de 40.0 m/s y un ángulo inicial de 30.0°. ¿Cuál es la energía cinética de la pelota en el punto más alto de su trayectoria?

52. La constante de resorte del resorte de suspensión de un automóvil aumenta con la carga creciente debido a un muelle helicoidal que es más ancho en la base, y cambia de manera uniforme a un diámetro más pequeño cerca de la parte superior. El resultado es un viaje más suave sobre superficies de camino normal de los muelles helicoidales, pero el automóvil no va hasta abajo en los baches porque, cuando se colapsan los muelles inferiores, los muelles más rígidos cerca de lo alto absorben la carga. Para un resorte helicoidal piramidal que se comprime 12.9 cm con una carga de 1 000 N y 31.5 cm con una carga de 5 000 N, a) evalúe las constantes a y b en la ecuación empírica $F = ax^b$ y b) encuentre el trabajo necesario para comprimir el resorte 25.0 cm.

53. ● Un resorte ligero tiene una longitud sín estirar de 15.5 cm. Se describe mediante la ley de Hooke con constante de resorte 4.30 N/m. Un extremo del resorte horizontal se mantiene en un eje vertical fijo, y el otro extremo se une a un disco de masa m que se puede mover sin fricción sobre una superficie horizontal. El disco se pone en movimiento en un círculo con un periodo de 1.30 s. a) Encuentre la extensión del resorte x conforme depende de m. Evalúe x para b) $m = 0.070\ 0$ kg, c) $m = 0.140$ kg, d) $m = 0.180$ kg y e) $m = 0.190$ kg. f) Describa el patrón de variación de x como dependiente de m.

54. Dos bolas de acero, cada una con 25.4 mm de diámetro, se mueven en direcciones opuestas a 5 m/s, corren una hacia la otra frontalmente y rebotan. a) ¿Su interacción dura sólo un instante o un intervalo de tiempo distinto de cero? Establezca su evidencia. Una de las bolas se comprime en una prensa de banco mientras se hacen mediciones precisas de la cantidad de compresión resultante. Los resultados muestran que la ley de Hooke es un buen modelo del comportamiento elástico de la bola. Para un dato, una fuerza de 16 kN ejercida por cada mandíbula de la prensa de banco resulta en una reducción de 0.2 mm en el diámetro de la bola. El diámetro regresa a su valor original cuando la fuerza se quita. b) Al modelar la bola como resorte, encuentre su constante de resorte. c) Calcule una estimación de la energía cinética de cada una de las bolas antes de chocar. En su solución, explique su lógica. d) Calcule una estimación para la cantidad máxima de compresión que cada bola experimenta cuando chocan. e) Calcule una estimación del orden de magnitud para el intervalo de tiempo durante el que están en contacto las bolas. En su solución, explique su razonamiento. (En el capítulo 15 aprenderá a calcular el tiempo de contacto preciso en este modelo.)

55. ● Considere $U = 5$ en $x = 0$ y calcule la energía potencial como función de x, correspondiente a la fuerza $(8e^{-2x})\hat{\mathbf{i}}$. Explique si la fuerza es conservativa o no conservativa y cómo puede decirlo.

56. La función energía potencial de un sistema se conoce por $U(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$. a) Determine la fuerza F_x como una función de x. b) ¿Para qué valores de x la fuerza es igual a cero? c) Grafique $U(x)$ con x y F_x en función de x e indique los puntos de equilibrio estable e inestable.

57. El lanzador de bola en una máquina de pinball tiene un resorte con una constante de fuerza de 1.20 N/cm (figura P7.57). La superficie sobre la que se mueve la bola está inclinada 10.0° respecto de la horizontal. El resorte inicialmente se comprime 5.00 cm. Encuentre la rapidez de lanzamiento de una bola de 100 g cuando se suelta el émbolo. La fricción y la masa del émbolo son despreciables.

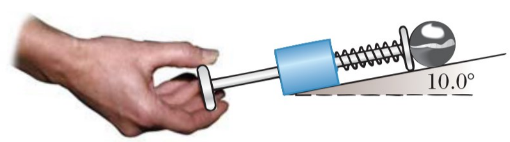


Figura P7.57

58. ● **Problema de repaso.** Dos fuerzas constantes actúan sobre un objeto de 5.00 kg que se mueve en el plano xy, como se muestra en la figura P7.58. La fuerza $\vec{\mathbf{F}}_1$ es de 25.0 N a 35.0° y $\vec{\mathbf{F}}_2$ es de 42.0 N a 150°. En el tiempo $t = 0$, el objeto está en el origen y tiene velocidad $(4.00\hat{\mathbf{i}} + 2.50\hat{\mathbf{j}})$ m/s. a) Exprese las dos fuerzas en notación de vector unitario. Use notación de vectores unitarios para sus otras respuestas. b) Encuentre la fuerza total que se ejerce sobre el objeto. c) Encuentre la aceleración del objeto. Ahora, considere el instante $t = 3.00$ s, y encuentre d) la velocidad del objeto, e) su posición, f) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_f^2$ y g) su energía cinética a partir de $\frac{1}{2}mv_i^2 + \Sigma \vec{\mathbf{F}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{r}}$. h) ¿Qué conclusión puede extraer al comparar las respuestas a los incisos f) y g)?

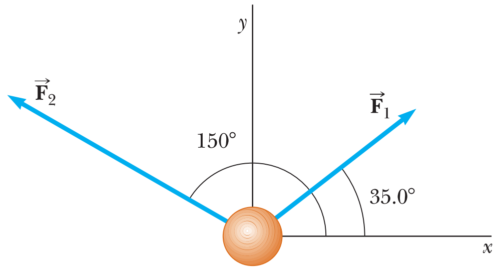


Figura P7.58

59. Una partícula se mueve a lo largo del eje x desde $x = 12.8$ m hasta $x = 23.7$ m bajo la influencia de una fuerza

$$F = \frac{375}{x^3 + 3.75x}$$

donde F está en newtons y x en metros. Con el uso de integración numérica, determine el trabajo invertido por esta fuerza en la partícula durante este desplazamiento. Su resultado debe ser exacto hasta 2%.

60. ● Cuando diferentes cargas cuelgan de un resorte, el resorte se estira a diferentes longitudes, como se muestra en la tabla siguiente. a) Elabore una gráfica de la fuerza aplicada con la extensión del resorte. Mediante ajuste por mínimos cuadrados, determine la línea recta que ajusta mejor los datos. ¿Quiere usar todos los datos o debe ignorar algunos de ellos? Explique. b) A partir de la pendiente de la línea de mejor ajuste, encuentre la constante de resorte k. c) El resorte se extiende a 105 mm. ¿Qué fuerza ejerce sobre el objeto suspendido?

***F* (*N*)**	2.0	4.0	6.0	8.0	10	12	14	16	18	20	22
***L* (mm)**	15	32	49	64	79	98	112	126	149	175	190

Respuestas a las preguntas rápidas

7.1 a). La fuerza no realiza trabajo sobre la Tierra porque la fuerza se dirige hacia el centro del círculo y por lo tanto es perpendicular a la dirección de su desplazamiento.

7.2 c), a), d), b). El trabajo realizado en c) es positivo y de mayor valor posible porque el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es cero. El trabajo invertido en a) es cero porque la fuerza es perpendicular al desplazamiento. En d) y b), la fuerza aplicada invierte trabajo negativo porque en ningún caso existe una componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento. La situación b) es la de valor más negativo porque el ángulo entre la fuerza y el desplazamiento es 180°.

7.3 d). Debido al intervalo de valores de la función coseno, $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}$ tiene valores que varían de AB a $-AB$.

7.4 a). Puesto que el trabajo invertido al comprimir un resorte es proporcional al cuadrado de la distancia de compresión x, duplicar el valor de x hace que el trabajo aumente cuatro veces.

7.5 b). Ya que el trabajo es proporcional al cuadrado de la distancia de compresión x y la energía cinética es proporcional al cuadrado de la rapidez v, duplicar la distancia de compresión duplica la rapidez.

7.6 c). El signo de la energía potencial gravitacional depende de su elección de configuración cero. Si los dos objetos en el sistema están más juntos que en la configuración cero, la energía potencial es negativa. Si están más separados, la energía potencial es positiva.

7.7 **i**), c). Este sistema muestra cambios en energía cinética, así como en ambos tipos de energía potencial. **ii**), a). Puesto que la Tierra no se incluye en el sistema, no hay energía potencial gravitacional asociada con el sistema.

7.8 d). La pendiente de una gráfica $U(x)$ en función de x es por definición $dU(x)/dx$. De la ecuación 7.28, se ve que esta expresión es igual al negativo de la componente x de la fuerza conservativa que actúa sobre un objeto que es parte del sistema.