TRABAJO Y ENERGÍA

Capítulo 6

El descenso por una pendiente nevada es un divertimento o mucho trabajo, depende de cómo se interprete.

¿Sabía que, de hecho, sobre el esquiador se está realizando trabajo? (Véase el ejemplo 6.12.)

El trabajo y la energía se encuentran entre los conceptos más importantes de la física, así como en nuestra vida diaria. En física, una fuerza realiza **trabajo** cuando actúa sobre un objeto que se mueve a través de una distancia y existe una componente de la fuerza a lo largo de la línea de movimiento. Si la fuerza es constante, en una sola dimensión el trabajo realizado es igual a la fuerza multiplicada por la distancia. (Esta definición difiere del concepto de trabajo en nuestro uso cotidiano. Cuando un alumno estudia en la preparación de un examen, el único trabajo que realiza desde el punto de vista de la física es el que verifica al mover su lápiz o al pasar las páginas del libro.)

Íntimamente asociado al concepto de trabajo se encuentra el concepto de **energía**. Cuando un sistema realiza trabajo sobre otro, se transfiere energía entre los dos sistemas. Por ejemplo, al empujar un columpio se realiza un trabajo y la energía química de nuestro cuerpo se transfiere al columpio y aparece en forma de energía cinética del movimiento o energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-columpio. Existen muchas formas de energía. La energía cinética está asociada al movimiento de un cuerpo. La energía potencial es energía asociada con la configuración de un sistema, tal como la distancia de separación entre dos cuerpos que se atraen. La energía térmica está asociada al movimiento aleatorio de las moléculas dentro de un sistema y está íntimamente relacionada con su temperatura.

En este capítulo estudiaremos los conceptos de trabajo, energía cinética y energía potencial. Estos conceptos surgen de las leyes de Newton, por lo tanto, los conceptos que introduciremos en este capítulo son una continuación de los introducidos en los capítulos previos.

Estos nuevos conceptos nos proporcionan métodos potentes para resolver una amplia clase de problemas. Muchos de los problemas del final de este capítulo podrían resolverse usando los conceptos y los métodos desarrollados en los capítulos previos. Sin embargo, es importante que resista la tentación de hacerlo de esta forma. Los conceptos y los métodos de este capítulo se continúan desarrollando en el capítulo 7.

6.1 Trabajo y energía cinética

Movimiento en una dimensión con fuerzas constantes

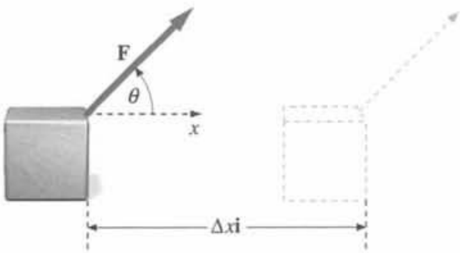


Figura 6.1

El trabajo W realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}$ cuyo punto de aplicación se traslada una distancia $\Delta x\mathbf{i}$, es

$$W = F_x \, \Delta x = F\cos\theta \, \Delta x \tag{6.1}$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

en donde θ es el ángulo entre las direcciones de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{i}$ y Δx es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza, como se indica en la figura 6.1.

El trabajo es una magnitud escalar que es positiva si Δx y F_x tienen signos iguales, y negativa si tienen signos opuestos. Las dimensiones del trabajo son las de una fuerza por una distancia. La unidad de trabajo y energía del SI es el **julio** (J), igual al producto de un newton por un metro:

$$1\text{ J} = 1\text{ N}\cdot\text{m} \tag{6.2}$$

(En el sistema habitual utilizado en los Estados Unidos la unidad de trabajo es el pie-libra: 1ft·lb = 1,356 J.) Una unidad conveniente de trabajo y energía en física atómica y nuclear es el electrón voltio (eV):

$$1\text{ eV} = 1{,}6\times 10^{-19}\text{ J} \tag{6.3}$$

Los múltiplos comúnmente utilizados son el keV (1000 eV) y el MeV (10^6 eV). El trabajo necesario para extraer un electrón de un átomo es del orden de varios eV, mientras que el trabajo necesario para extraer un protón o un neutrón de un núcleo atómico es del orden de varios MeV.

Ejercicio Se ejerce una fuerza de 12 N sobre un bloque bajo un ángulo $\theta = 20°$, como indica la figura 6.1. ¿Qué trabajo realiza la fuerza sobre el bloque, si éste se desplaza 3 m a lo largo de la mesa? (*Respuesta* 33,8 J.)

Cuando hay varias fuerzas que realizan trabajo, el trabajo total se calcula sumando el trabajo realizado por cada una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x_1 + F_{2x}\,\Delta x_2 + F_{3x}\,\Delta x_3 + \ldots$$

Una partícula es cualquier objeto que se mueve de tal forma que todas sus partes experimentan los mismos desplazamientos durante cualquier instante de tiempo. Es decir, un objeto puede asimilarse a una partícula en tanto que todo él permanezca completamente rígido y se mueva sin girar.

Cuando varias fuerzas realizan trabajo sobre una *partícula*, los desplazamientos de los puntos de aplicación de cada una de estas fuerzas son iguales. Sea Δx el desplazamiento del punto de aplicación de una de las fuerzas:

$$W_{\text{total}} = F_{1x}\,\Delta x + F_{2x}\,\Delta x + \ldots = (F_{1x} + F_{2x} + \ldots)\Delta x = F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x \tag{6.4}$$

Si una partícula está obligada a moverse en el eje x, la fuerza neta que experimenta únicamente tiene una componente x. Es decir, $\mathbf{F}_{\text{neta}} = F_{\text{neta}\,x}\mathbf{i}$. Por consiguiente, el trabajo total ejercido sobre una partícula puede determinarse, encontrando primero la fuerza neta y después multiplicando la fuerza neta por el desplazamiento.

Teorema del trabajo-energía cinética

Existe una importante relación entre el trabajo neto realizado sobre una partícula y la velocidad de ésta en las posiciones inicial y final. Si F_{neta} es la fuerza neta que actúa sobre una partícula tenemos, según la segunda ley de Newton:

$$F_{\text{neta}\,x} = ma_x$$

Si la fuerza es constante, la aceleración es constante y el desplazamiento está relacionado con la velocidad inicial v_{i} y con la velocidad final v_{f} mediante la fórmula $v_{\text{f}}^2 = v_{\text{i}}^2 + 2a_x\Delta x$, válida cuando la aceleración es constante (ecuación 2.16). A partir de la expresión anterior se obtiene para a_x

$$a_x = \frac{1}{2\Delta x}(v_{\text{f}}^2 - v_{\text{i}}^2)$$

Sustituyendo a_x en $F_{\text{neta x}} = ma_x$ y multiplicando ambos miembros por Δx se tiene

$$F_{\text{neta}\,x}\,\Delta x = \tfrac{1}{2}\,mv_{\text{f}}^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_{\text{i}}^2$$

Reconocemos que el primer miembro es el trabajo total realizado sobre la partícula. Así

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}\,mv_{\text{f}}^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_{\text{i}}^2 \qquad (6.5)$$

La magnitud $\frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de **energía cinética** E_{c} de la partícula:

$$E_{\text{c}} = \tfrac{1}{2}\,mv^2 \qquad (6.6)$$

DEFINICIÓN —ENERGÍA CINÉTICA

El segundo miembro de la ecuación 6.5 representa el cambio de energía cinética experimentado por la partícula. Así,

El trabajo total realizado sobre la partícula es igual a la *variación* de energía cinética de la misma:

$$W_{\text{total}} = \Delta E_{\text{c}} \qquad (6.7)$$

TEOREMA TRABAJO-ENERGÍA CINÉTICA

Este resultado se conoce con el nombre de **teorema trabajo-energía cinética**. Aquí sólo lo hemos deducido para una fuerza neta constante. Sin embargo, como veremos más adelante, este teorema es válido incluso cuando la fuerza neta varía y el movimiento no es en línea recta.

Ejercicio Una muchacha de masa 50 kg corre con una velocidad de 3,5 m/s. ¿Cuál es su energía cinética? (*Respuesta* 306 J.)

EJEMPLO 6.1 | La grúa que carga

Un camión de masa 3000 kg se carga en un buque mediante una grúa que ejerce una fuerza ascendente de 31 kN sobre el camión. Esta fuerza, que es suficientemente grande para vencer la fuerza de la gravedad y empezar a levantar el camión, se aplica a lo largo de una distancia de 2 m. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la grúa, (*b*) el trabajo realizado por la gravedad, y (*c*) la velocidad ascendente del camión después de haber subido 2 m.

Planteamiento del problema Hacer un dibujo esquemático del camión en sus posiciones final e inicial, eligiendo como dirección positiva de y la dirección del desplazamiento (figura 6.2). Use el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética final del camión. La velocidad final del camión se puede obtener a partir de la energía cinética final. El trabajo total es la suma de los resultados de (a) y (b).

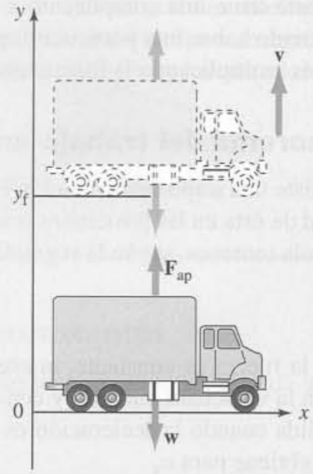


Figura 6.2

(a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza aplicada:

$$W_{ap} = F_{ap\,y}\,\Delta y = F_{ap}\cos 0°\,\Delta y = (31\text{ kN})(1)(2\text{ m}) = \boxed{62{,}0\text{ kJ}}$$

(b) Calcular el trabajo realizado por la gravedad:

$$W_g = mg_y\,\Delta y = mg\cos 180°\,\Delta y = (3000\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(-1)(2\text{ m}) = \boxed{-58{,}9\text{ kJ}}$$

(c) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y obtener v_f:

$$W_{total} = \Delta E_c$$

$$W_{ap} + W_g = E_{c_f} - E_{c_i} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$

$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2(W_{ap} + W_g)}{m} = 0 + \frac{2(62{,}000\text{ J} - 58{,}900\text{ J})}{3000\text{ kg}} = 2{,}09\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_f = \boxed{1{,}45\text{ m/s}}$$

Observación Para el cálculo del trabajo realizado hemos tratado por separado cada una de las fuerzas. También podríamos obtener el trabajo total sumando primero las fuerzas para obtener la fuerza neta, y aplicando después la expresión $W_{total} = F_{neta\,y}\,\Delta y$. En cualquier caso, el teorema trabajo-energía cinética sólo es válido para el trabajo total.

Ejercicio Determinar la velocidad final del camión si la misma fuerza ascendente se aplica durante 2 m después de haber alcanzado una velocidad ascendente de 1 m/s. (*Respuesta* 1,73 m/s. Obsérvese que la respuesta no es 1,4 m/s + 1 m/s. ¿Por qué?)

EJEMPLO 6.2 | La fuerza sobre un electrón

En un tubo de televisión se acelera un electrón desde el reposo hasta una energía cinética de 2,5 keV a lo largo de una distancia de 80 cm. (La fuerza que acelera el electrón es una fuerza eléctrica debida al campo eléctrico que se genera en el tubo.) Determinar la fuerza que actúa sobre el electrón suponiendo que es constante y tiene la dirección del movimiento.

Planteamiento del problema Como el electrón parte del reposo, el trabajo realizado es igual a la energía cinética final.

El trabajo realizado es igual al cambio de la energía cinética. Dado que se conoce el valor de la energía cinética inicial y final, calcular la fuerza:

$$W_{total} = \Delta E_c$$

$$F_x\,\Delta x = E_{c_f} - E_{c_i}$$

$$F_x = \frac{E_{c_f} - E_{c_i}}{\Delta x} = \frac{2500\text{ eV} - 0}{0{,}8\text{ m}} \times \frac{1{,}6 \times 10^{-19}\text{ J}}{1\text{ eV}} = \boxed{5{,}0 \times 10^{-16}\text{ N}}$$

Observación Al tratar la electricidad veremos que el trabajo realizado por unidad de carga eléctrica se denomina diferencia de potencial y se mide en voltios. Así, 1 eV es la energía adquirida o perdida por una partícula de carga e (por ejemplo, un electrón o un protón) cuando su diferencia de potencial varía en 1 V.

EJEMPLO 6.3 | Una carrera de trineos

Durante sus vacaciones de invierno un profesor participa en una carrera de trineos tirados por perros en un lago helado. Para iniciar la carrera tira de su trineo (masa total 80 kg) con una fuerza de 180 N que forma un ángulo de 20° con la horizontal. Determinar (*a*) el trabajo realizado y (*b*) la velocidad final del trineo después de un recorrido $\Delta x = 5$ m, suponiendo que parte del reposo y que no existe rozamiento.

Planteamiento del problema El trabajo realizado por el profesor es $F_x\,\Delta x$, donde elegimos la dirección del desplazamiento como dirección positiva de x. Éste es también el trabajo *total* realizado sobre el trineo, ya que las otras fuerzas, mg y F_n no tienen componentes x (figura 6.3). La velocidad final del trineo se determina aplicando el teorema trabajo-energía cinética al trineo.

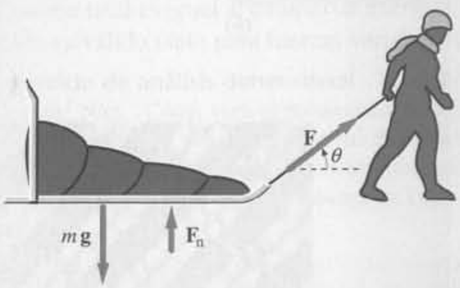


Figura 6.3

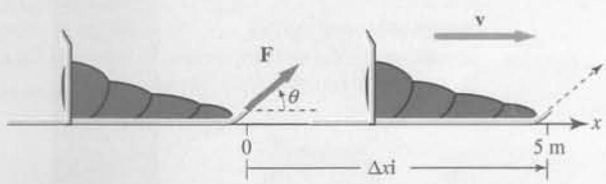


Figura 6.4

(a) 1. Hacer un esquema del trineo en su posición inicial y en su posición después que se ha movido 5 m. Dibujar el eje x en la dirección del movimiento (figura 6.4)

2. El trabajo realizado por el profesor sobre el trineo es $F_x\,\Delta x$. (También es el trabajo total realizado en el trineo, ya que las otras fuerzas que actúan lo hacen en la dirección perpendicular al movimiento):

$$W = F_x\,\Delta x = F\cos\theta\,\Delta x$$
$$= (180\text{ N})(\cos 20°)(5\text{ m}) = \boxed{846\text{ J}}$$

(b) Aplicar el teorema trabajo-energía cinética y resolver despejando la velocidad final:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2$$
$$v_f^2 = v_i^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m}$$
$$= 0 + \frac{2(846\text{ J})}{80\text{ kg}}$$
$$= 21{,}1\text{ m}^2\text{s}^2$$
$$v_f = \boxed{4{,}60\text{ m/s}}$$

Observación No es necesario elaborar detalladamente las unidades. Si tenemos una ecuación escrita correctamente y todas las magnitudes están expresadas en unidades del SI, el resultado vendrá dado en unidades del SI correctas. Sin embargo, como comprobación de la ecuación podemos demostrar que 1 J/kg = 1 m^2/s^2. En efecto, 1 J/kg = 1 N·m/kg = 1 (kg·m/s^2) m/kg = 1 m^2/s^2.

Ejercicio ¿Cuál será el módulo de la fuerza que deberá ejercer el profesor si el trineo parte con una velocidad de 2 m/s y su velocidad final es de 4,5 m/s después de recorrer una distancia de 5 m? (*Respuesta* 138 N.)

¿Qué ocurre si una persona sostiene un peso en una posición fija? Consume energía, pero, ¿realiza trabajo? De acuerdo con la definición de trabajo, la persona no realiza trabajo *sobre el peso*, porque éste no se mueve (figura 6.5). Sin embargo, sus músculos se contraen y se relajan continuamente mientras se sostiene el peso. En este proceso, la energía química interna del cuerpo de la persona se convierte en energía térmica (figura 6.6).

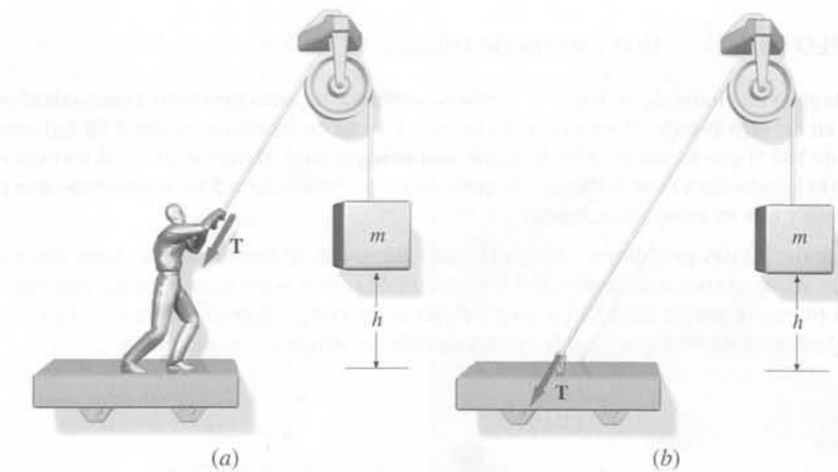


Figura 6.5 (*a*) El hombre que sostiene el peso en una posición fija no realiza ningún trabajo. (*b*) La misma tarea puede realizarse atando la cuerda a un punto fijo.

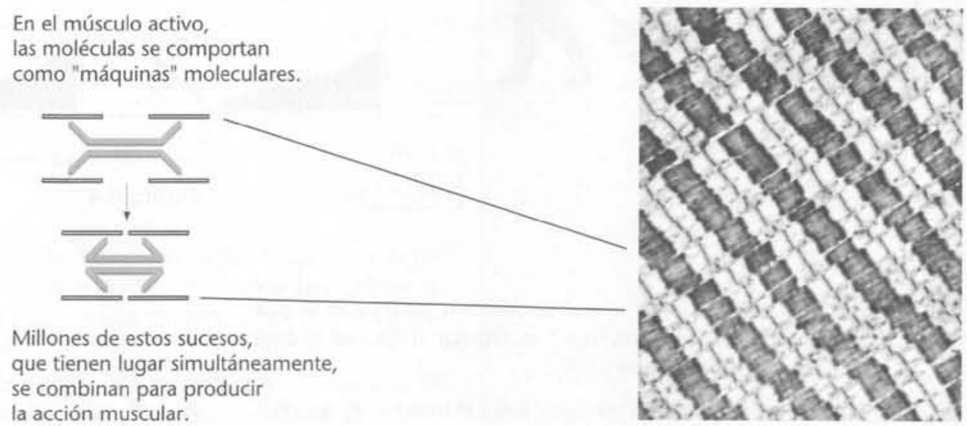


Figura 6.6 Trabajo muscular. Aunque el hombre que sostiene el peso en la figura 6.5 no haga trabajo sobre éste, su cuerpo consume energía a nivel molecular, ya que ciertas estructuras del músculo se deslizan entre ellas durante la extensión y la contracción muscular.

Trabajo realizado por una fuerza variable

En la figura 6.7 se representa una fuerza constante F_x en función de la posición x. El trabajo realizado sobre una partícula cuyo desplazamiento es Δx viene representado por el área comprendida bajo la curva fuerza en función de la posición, indicada por el sombreado de la figura 6.7.

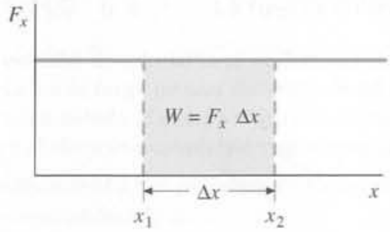


Figura 6.7 El trabajo realizado por una fuerza constante viene representado gráficamente por el área comprendida bajo la curva correspondiente, F_x en función de x.

Muchas fuerzas varían con la distancia. Por ejemplo, un muelle ejerce una fuerza proporcional a la distancia si se estira o se comprime. La fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre un vehículo espacial varía en razón inversa con el cuadrado de la distancia que separa los dos cuerpos. Es posible (figura 6.8) aproximar una fuerza variable por una serie de fuerzas constantes. El trabajo realizado por una fuerza variable será, por lo tanto:

$$W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F_x\, \Delta x_i = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \tag{6.8}$$

Este límite es la integral de $F_x\, dx$. Así, el trabajo realizado por una fuerza variable F_x que actúa sobre una partícula cuando ésta se desplaza de x_1 a x_2 es

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\, dx = \text{área bajo la curva de } F_x \text{ en función de } x \tag{6.9}$$

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

En cada intervalo de desplazamiento Δx_i, la fuerza es esencialmente constante. Por este motivo, el trabajo realizado es igual al área del rectángulo de altura F_{x_i} y anchura Δx_i. Como se demostró anteriormente en la sección 6.1, este trabajo es igual al cambio de la energía cinética en este intervalo de desplazamiento (si la fuerza es la fuerza neta). El trabajo total es

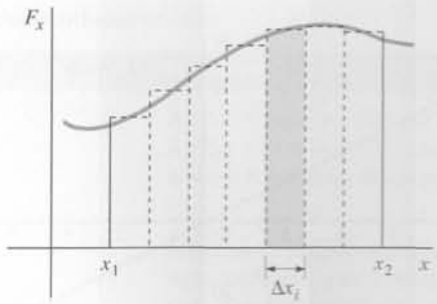


Figura 6.8 Una fuerza variable puede aproximarse mediante una serie de fuerzas constantes en intervalos pequeños. El trabajo realizado por una fuerza constante en cada intervalo es el área del rectángulo bajo la curva de esta fuerza. La suma de estas áreas rectangulares es la suma del trabajo realizado por la serie de fuerzas constantes que aproxima la fuerza variable. En el límite de Δx_i infinitesimalmente pequeño, la suma de las áreas de los rectángulos es igual al área comprendida bajo la curva completa.

la suma de las áreas para todos los intervalos de desplazamiento. De aquí se deduce que el trabajo total es igual al cambio de energía cinética del desplazamiento completo. Así, $W_{\text{total}} = \Delta E_c$ es válido tanto para fuerzas variables como para fuerzas constantes.

Ejercicio de análisis dimensional Un muelle se caracteriza por su constante de fuerza k, de dimensiones[1] N/m. ¿Cómo varía el trabajo necesario para estirar un muelle una distancia x_0 en función de k y x_0? (*Respuesta* Como el trabajo tiene dimensiones de N · m, debe depender de k y x_0 según la combinación de kx_0^2. En el ejemplo 6.5 veremos que la expresión real es $W = \frac{1}{2}kx_0^2$. El factor $\frac{1}{2}$ se debe a que la fuerza varía desde 0 a un valor máximo de kx_0, y por lo tanto, su valor medio[2] es $\frac{1}{2}kx_0$.)

EJEMPLO 6.4 | Trabajo realizado sobre una partícula

Una fuerza F_x varía en función de x como se indica en la figura 6.9. Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando actúa sobre una partícula que se mueve de $x = 0$ a $x = 6$ m.

Planteamiento del problema El trabajo es el área bajo una curva. Dado que la curva de la figura está formada por tramos rectos, la aproximación más directa para el cálculo del área es usar fórmulas geométricas. (Otra forma alternativa es integrar, como se hace en el ejemplo 6.5.)

1. El trabajo se determina calculando al área bajo la curva F_x en función de x: $W = A_{\text{total}}$
2. Esta área es la suma de las dos áreas indicadas. El área de un triángulo se calcula multiplicando la base por la mitad de la altura:

$$W = A_{\text{total}} = A_1 + A_2 = (5\,\text{N})(4\,\text{m}) + \tfrac{1}{2}(5\,\text{N})(2\,\text{m}) = 20\,\text{J} + 5\,\text{J} = \boxed{25\,\text{J}}$$

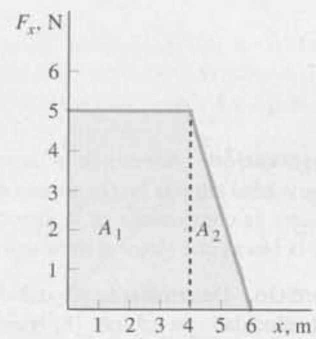


Figura 6.9

Ejercicio La fuerza indicada es la única fuerza que actúa sobre una partícula de masa 3 kg. Si la partícula parte del reposo en $x = 0$, ¿a qué velocidad se mueve cuando alcanza el valor $x = 6$ m? (*Respuesta* 4,08 m/s.)

EJEMPLO 6.5 | Trabajo de un muelle realizado sobre un bloque

Un bloque de 4 kg apoyado sobre una mesa sin rozamiento está sujeto a un muelle horizontal que obedece la ley de Hooke y ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -kx\mathbf{i}$, en donde x se mide desde la posición de equilibrio del bloque y $k = 400$ N/m. El muelle está originalmente comprimido con el bloque en la posición $x_1 = -5$ cm (figura 6.10). Calcular (*a*) el trabajo realizado por el muelle cuando el bloque se desplaza desde $x_1 = -5$ cm hasta su posición de equilibrio $x_2 = 0$ y (*b*) la velocidad del bloque en la posición $x_2 = 0$.

Planteamiento del problema Hacer un gráfico de F_x en función de x. El trabajo realizado sobre el bloque cuando éste se desplaza de x_1 a $x_2 = 0$ es igual al área bajo la curva de F_x en función de x entre estos límites (área sombreada en la figura 6.11), que puede calcularse integrando la fuerza sobre esta distancia. El trabajo realizado es igual a la variación de energía cinética, que coincide con la energía cinética final, ya que el valor inicial de esta magnitud es cero. La velocidad del bloque en el punto $x = 0$ puede calcularse a partir de la energía cinética del bloque.

[1] Las unidades de k del SI son N/m, pero sus dimensiones son $[M][T]^{-2}$.
[2] Aquí no se trata de una media respecto del tiempo, sino de una media respecto de la distancia.

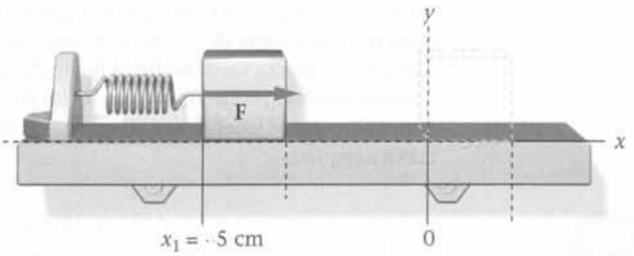


Figura 6.10

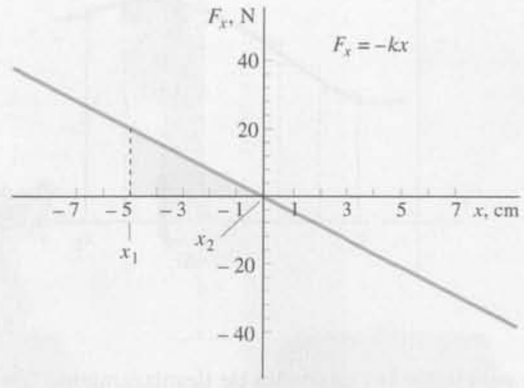


Figura 6.11

(a) El trabajo W realizado por el muelle sobre el bloque es la integral de $F_x\,dx$ desde $x_1 = -5$ cm a $x_2 = 0$:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -k\int_{x_1}^{x_2} x\,dx = -\tfrac{1}{2}kx^2\Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\tfrac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \tfrac{1}{2}(400\text{ N/m})(0{,}05\text{ m})^2 = \boxed{0{,}500\text{ J}}$$

(b) Aplicando el teorema trabajo-energía cinética y despejando v_2:

$$W_{\text{total}} = \tfrac{1}{2}\,mv_2^2 - \tfrac{1}{2}\,mv_1^2$$

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2W_{\text{total}}}{m} = 0 + \frac{2(0{,}500\text{ J})}{4\text{ kg}}$$

$$= 0{,}250\text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$v_2 = \boxed{0{,}500\text{ m/s}}$$

Observación Además de la fuerza del muelle, sobre el bloque actúan otras dos fuerzas: la fuerza de gravedad $m\mathbf{g}$ y la fuerza normal de la mesa $\mathbf{F}_n$. Estas dos fuerzas no realizan trabajo alguno, pues carecen de componente en la dirección del movimiento. Sólo el muelle trabaja sobre el bloque, ya que la fuerza que ejerce sí tiene una componente a lo largo de la distancia Δx.

Ejercicio Determinar la velocidad del bloque cuando alcanza la distancia $x = 3$ m si parte de $x = 0$ con velocidad $v_x = 0{,}5$ m/s. (*Respuesta* 0,4 m/s.)

Obsérvese que el ejemplo 6.5 *no* puede resolverse determinando la aceleración y después utilizando las ecuaciones de aceleración constante. La fuerza que el muelle ejerce sobre el bloque, $F_x = -kx$, varía con la posición y por lo tanto, la aceleración también es variable, con lo que la condición de aceleración constante no se cumple.

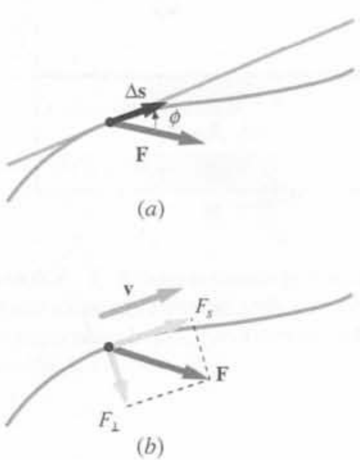


Figura 6.12 (*a*) Una partícula se desplaza a lo largo de una curva en el espacio. (*b*) La componente de la fuerza $F_\perp$ afecta a la dirección del movimiento, pero no a la velocidad. La componente tangencial F_s cambia el módulo de la velocidad, pero no su dirección. F_s es igual a la masa por la aceleración tangencial dv/dt. Sólo esta componente realiza trabajo sobre la partícula.

6.2 Producto escalar

La componente F_s en la figura 6.12 está relacionada con el ángulo ϕ entre $\mathbf{F}$ y $d\mathbf{s}$ por la expresión $F_s = F\cos\phi$, de tal modo que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ en un desplazamiento ds es

$$W = F_s\,ds = F\cos\phi\,ds$$

Este tipo de combinación entre dos vectores y el coseno del ángulo comprendido entre ambos es muy frecuente en física y recibe el nombre de **producto escalar** de dos vectores. El producto escalar entre dos vectores cualesquiera $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se escribe $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y se define como

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi \qquad (6.10)$$

DEFINICIÓN – PRODUCTO ESCALAR

TABLA 6.1 Propiedades del producto escalar

Si	se cumple
A y **B** son perpendiculares	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$ (pues $\phi = 90°$, $\cos 90° = 0$)
A y **B** son paralelos	$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB$ (pues $\phi = 0°$, $\cos 0° = 1$)
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$	$\mathbf{A} = 0$ ó $\mathbf{B} = 0$ ó **A** y **B** son perpendiculares
Además	
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2$	porque **A** es paralelo a sí mismo
$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$	regla conmutativa de la multiplicación
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$	regla distributiva de la multiplicación

en donde ϕ es el ángulo comprendido entre **A** y **B**. (El ángulo entre dos vectores se define como el ángulo entre sus direcciones en el espacio.) El producto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ puede considerarse como el producto de A y la componente de **B** en la dirección de **A** ($A[B\cos\phi]$) o como el producto de **B** por la componente de **A** en la dirección de **B** ($B[A\cos\phi]$) (ver figura 6.12). Las propiedades del producto escalar se resumen en la tabla 6.1.

El producto escalar también puede escribirse en función de las componentes rectangulares de los dos vectores usando vectores unitarios:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k})$$

El producto escalar de un vector unitario por sí mismo, como $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$, es 1, de modo que un término como $A_x\mathbf{i}\cdot B_x\mathbf{i}$ es igual a $A_x B_x$. Por otro lado, como los vectores **i**, **j** y **k** son mutuamente perpendiculares, el producto escalar de uno cualquiera de los otros, como $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$, es cero. Por lo tanto, productos como $A_x\mathbf{i}\cdot B_y\mathbf{j}$ (llamados términos cruzados) son igual a cero. El resultado es

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{6.11}$$

La componente de un vector a lo largo de un eje puede escribirse como el producto escalar del vector por el vector unitario sobre dicho eje. Por ejemplo, la componente A_x se obtiene del producto:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot\mathbf{i} = A \tag{6.12}$$

Esta relación sugiere un procedimiento algebraico para obtener una ecuación para las componentes a partir de una ecuación vectorial. Multiplicando la ecuación vectorial $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$ por **i** se obtiene $\mathbf{A}\cdot\mathbf{i} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{i}$, que conduce a $A_x + B_x = C_x$.

Para establecer la regla de la diferenciación del producto escalar, diferenciamos ambos miembros de la ecuación 6.11. Por brevedad lo hacemos para vectores de dos dimensiones.

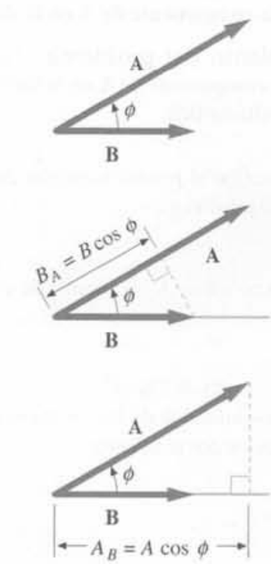
$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \frac{d}{dt}(A_xB_x + A_yB_y)\\ &= \frac{dA_x}{dt}B_x + A_x\frac{dB_x}{dt} + \frac{dA_y}{dt}B_y + A_y\frac{dB_y}{dt}\end{aligned}$$

Reordenando los términos se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) &= \frac{dA_x}{dt}B_x + \frac{dA_y}{dt}B_y + A_x\frac{dB_x}{dt} + A_y\frac{dB_y}{dt}\\ &= \left(\frac{dA_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_y}{dt}\mathbf{j}\right)\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j}) + (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j})\cdot\left(\frac{dB_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dB_y}{dt}\mathbf{j}\right)\end{aligned}$$

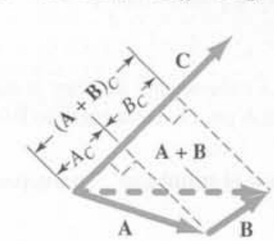
por lo tanto

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{6.13}$$



(*a*)

Figura 6.13 (*a*) El producto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ es el producto de A por la proyección de **B** sobre **A** o el producto de B sobre la proyección de **A** sobre **B**. Es decir, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi = AB_A = BA_B$.



(*b*)

(*b*) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})_C C$ (la proyección de $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ en la dirección de **C** por C). Sin embargo, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})_C = A_C + B_C$, por lo que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = (A_C + B_C)C = A_CC + B_CC = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$. Es decir, en el producto escalar el producto es distributivo respecto de la suma.

EJEMPLO 6.6 | Uso del producto escalar

(*a*) Hallar el ángulo formado por los vectores A = 3 mi + 2 mj y B = 4 mi − 3 mj (figura 6.14). (*b*) Calcular la componente de A en la dirección de B.

Planteamiento del problema Determinar el ángulo ϕ a partir de la definición del producto escalar. La componente de **A** en la dirección de **B** se determina a partir del producto escalar de **A** por el vector unitario **B**/*B*.

(a) 1. Escribir el producto escalar de **A** y **B** en función de *A*, *B* y cos ϕ y despejar cos ϕ:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}$$

2. Determinar **A** · **B** a partir de sus componentes:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y$$
$$= (3\text{ m})(4\text{ m}) + (2\text{ m})(-3\text{ m})$$
$$= 12\text{ m}^2 - 6\text{ m}^2 = 6\text{ m}^2$$

3. Los módulos de los vectores se obtienen del producto escalar del vector por sí mismo:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2$$
$$= (2\text{ m})^2 + (3\text{ m})^2 = 13\text{ m}^2,\ \text{de modo que}$$
$$A = \sqrt{13}\text{ m}$$

y

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = B^2 = B_x^2 + B_y^2$$
$$= (4\text{ m})^2 + (-3\text{ m})^2 = 25\text{ m}^2$$
$$B = 5\text{ m}$$

4. Sustituir estos valores en la ecuación obtenida en el paso 1 para cos ϕ y determinar ϕ:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{6\text{ m}^2}{(\sqrt{13}\text{ m})(5\text{ m})} = 0{,}333$$

$$\phi = \boxed{70{,}6°}$$

(b) La componente de **A** en la dirección de **B** es el producto escalar de **A** por el vector unitario **B**/*B*:

$$A_B = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{B} = \frac{6\text{ m}^2}{5\text{ m}} = \boxed{1{,}2\text{ m}}$$

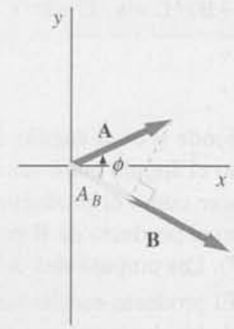


Figura 6.14

Comprobar el resultado La componente de *A* en la dirección de *B* es *A* cos ϕ = ($\sqrt{13}$ m) cos 70,6° = 1,2 m.

Ejercicio (*a*) Determinar **A** · **B** para **A** = 3 m**i** + 4 m**j** y **B** = 2 m**i** + 8 m**j**. (*b*) Determinar *A*, *B* y el ángulo formado entre **A** y **B** para estos vectores. (*Respuestas* (*a*) 38 m², (*b*) *A* = 5 m, *B* = 8,25 m, ϕ = 23°.)

En la notación del producto escalar, el trabajo *dW* realizado por una fuerza **F** sobre una partícula que experimenta un desplazamiento *d***s** es

$$dW = F\cos\phi\, ds = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad (6.14)$$

DIFERENCIAL DEL TRABAJO

donde $ds = |d\mathbf{s}|$ (el módulo de *d***s**). El trabajo realizado sobre la partícula cuando se desplaza del punto 1 al 2 es

$$W = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \qquad (6.15)$$

DEFINICIÓN GENERAL DEL TRABAJO

(Si la fuerza se mantiene constante, el trabajo puede expresarse como $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s}$, donde **s** es el desplazamiento neto.)

Cuando varias fuerzas $\mathbf{F}_i$ actúan sobre una partícula cuyo desplazamiento es $d\mathbf{s}$, el trabajo total es

$$dW_{\text{total}} = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s} + \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s} + \ldots = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots) \cdot d\mathbf{s} = (\Sigma \mathbf{F}_i) \cdot d\mathbf{s} \qquad (6.16)$$

EJEMPLO 6.7 | Caja que hacemos subir por una pendiente

Se empuja una caja por la pendiente de una rampa con una fuerza horizontal F de 100 N. Por cada 5 m que se recorre, la caja sube 3 m. Calcular el trabajo realizado por F cada 5 m de recorrido de la caja por la rampa (*a*) calculando directamente el producto escalar a partir de las componentes de F y del desplazamiento s, (*b*) multiplicando el producto de los módulos de F y de s por el coseno del ángulo que forman sus direcciones, (*c*) calculando F_s (la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento) y multiplicándola por el módulo del desplazamiento, y, (*d*) determinando la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza y multiplicándola por el módulo de la fuerza.

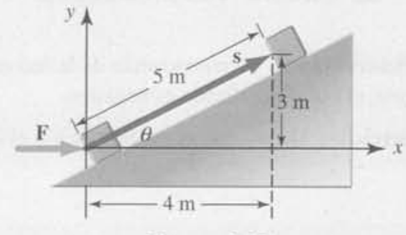


Figura 6.15

Planteamiento del problema Dibujar un esquema de la caja en su posición inicial y final. Utilizar un sistema de coordenadas con el eje x horizontal. Expresar los vectores fuerza y desplazamiento en sus componentes y efectuar el producto escalar. Determinar la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento y viceversa.

(a) Expresar **F** y **s** mediante sus componentes y realizar el producto escalar:

$$\mathbf{F} = 100\ \text{N}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$
$$\mathbf{s} = 4\ \text{m}\mathbf{i} + 3\ \text{m}\mathbf{j}$$
$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$
$$= (100\ \text{N})(4\ \text{m}) + 0(3\ \text{m}) = \boxed{400\ \text{J}}$$

(b) Calcular $Fs \cos \phi$, donde ϕ es el ángulo entre los dos vectores. Igualar esta expresión con el resultado del apartado (a) y determinar $\cos \phi$; al final, calcular el trabajo:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = Fs \cos \phi \quad \text{y} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y$$

por lo tanto

$$\cos \phi = \frac{F_x \Delta x + F_y \Delta y}{Fs} = \frac{(100\ \text{N})(4\ \text{m}) + 0}{(100\ \text{N})(5\ \text{m})} = 0{,}8$$

y

$$W = Fs \cos \phi$$
$$= (100\ \text{N})(5\ \text{m})0{,}8 = \boxed{400\ \text{J}}$$

(c) Determinar F_s y multiplicarlo por s:

$$F_s = F \cos \phi = (100\ \text{N})0{,}8 = 80\ \text{N}$$
$$W = F_s s = (80\ \text{N})(5\ \text{m}) = \boxed{400\ \text{J}}$$

(d) Multiplicar F y s_F, donde s_F es la componente de **s** en la dirección de **F**. Primero calcular s_F:

$$s_F = s \cos \phi = (5\ \text{m})0{,}8 = 4\ \text{m}$$
$$W = Fs_F = (100\ \text{N})(4\ \text{m}) = \boxed{400\ \text{J}}$$

Observación En este problema es más fácil calcular el trabajo usando el procedimiento del apartado (d). En otros casos puede convenir utilizar cualquiera de los otros procedimientos explicados en este problema. Conviene familiarizarse con cualquiera de estos procedimientos para poder usar el que más convenga en función del problema que se pretenda resolver.

EJEMPLO 6.8 | Desplazamiento de una partícula

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Una partícula experimenta un desplazamiento s = 2 mi – 5 mj a lo largo de una línea recta. Durante el desplazamiento, una fuerza constante F = 3 Ni + 4 Nj actúa sobre la partícula. Determinar (*a*) el trabajo realizado por la fuerza y (*b*) la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento.

Planteamiento del problema El trabajo W se determina calculando $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_x \Delta x + F_y \Delta y$. Combinándolo con la relación $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_s s$, podemos determinar la componente de **F** en la dirección del desplazamiento. Hacer un esquema que muestre **F**, **s** y $|F_s|$ (figura 6.16).

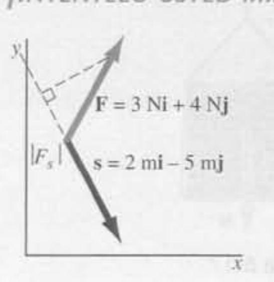


Figura 6.16

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) Calcular el trabajo realizado W.	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = \boxed{-14 \text{ N} \cdot \text{m}}$
(b) 1. Calcular $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}$ y utilizar el resultado para determinar la distancia $\lvert\mathbf{s}\rvert$.	$\lvert\mathbf{s}\rvert^2 = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s} = 29 \text{ m}^2$, $\lvert\mathbf{s}\rvert = \sqrt{29} \text{ m}$
2. Usando $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F_s s$, calcular F_s.	$F_s = \boxed{-2{,}60 \text{ N}}$

Observación La componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento es negativa; por lo tanto, el trabajo realizado es negativo.

Ejercicio Determinar el módulo de **F** y el ángulo ϕ entre **F** y Δ**s**. (*Respuesta* $F = 5$ N, $\phi = 121°$.)

EJEMPLO 6.9 | Diferenciación de un producto escalar

Demostrar que $d(v^2)/dt = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}$, donde v es el vector velocidad de módulo v, y a es la aceleración.

Planteamiento del problema Se utiliza la regla para diferenciar el producto escalar, ya que $v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

Aplicar al producto $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ la regla para diferenciar productos escalares:

$$\frac{d}{dt}(v^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})$$

$$= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}$$

por lo tanto,

$$\boxed{\frac{d}{dt}(v^2) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}$$

Observación Este ejemplo atañe únicamente a parámetros cinemáticos, por lo que la relación resultante es estrictamente cinemática. Asimismo, el resultado es válido siempre, ya que sólo se ha utilizado la definición de aceleración y el cálculo de la derivada de un producto.

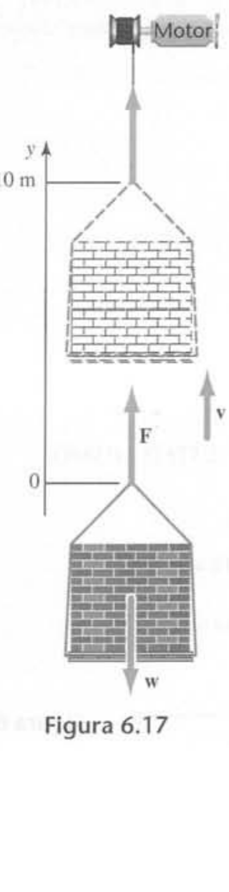


Figura 6.17

Potencia

La **potencia** P suministrada por una fuerza es el trabajo por unidad de tiempo que realiza dicha fuerza. Consideremos una partícula con velocidad instantánea **v**. En un intervalo corto de tiempo dt, la partícula se desplaza $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\, dt$. El trabajo realizado por una fuerza **F** que actúa sobre la partícula durante este intervalo de tiempo es

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dt$$

La potencia suministrada por la partícula es

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{6.17}$$

DEFINICIÓN —POTENCIA

La unidad del SI de potencia, julio por segundo, se denomina vatio (W):

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

Obsérvese la diferencia entre potencia y trabajo. Dos motores que elevan una determinada carga a igual distancia consumen la misma energía, pero el que lo levanta en menos tiempo es más potente. Al pagar la factura de consumo de electricidad o de gas a la compañía suministradora, pagamos la energía consumida, no la potencia. La factura viene expresada normalmente en kilovatios-hora (kW · h). Un kilovatio-hora de energía es

$$1 \text{ kW} \cdot \text{h} = (10^3 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3{,}6 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{s} = 3{,}6 \text{ MJ}$$

En el sistema habitual de los EEUU, la unidad de energía es el pie-libra y la unidad de potencia es el pie-libra por segundo. Un múltiplo común de esta unidad es el **caballo de vapor** (HP):

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 746 \text{ W}$$

EJEMPLO 6.10 | Potencia de un motor

Un pequeño motor mueve un ascensor que eleva una carga de ladrillos de peso 800 N a una altura de 10 m en 20 s. ¿Cuál es la potencia mínima que debe suministrar el motor?

Planteamiento del problema Para determinar la potencia *mínima* suponemos que los ladrillos se elevan a velocidad constante. Como la aceleración es cero, el módulo de la fuerza hacia arriba ejercida por el motor es igual al peso de los ladrillos, 800 N. La potencia transmitida por el motor es la suministrada por **F**.

La potencia viene dada por $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$:

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta = Fv \cos 0$$

$$= (800 \text{ N}) \frac{10 \text{ m}}{20 \text{ s}} (1) = \boxed{400 \text{ W}}$$

Observación Esta potencia mínima resultante de 400 W es algo superior a medio caballo de vapor.

Ejercicio (*a*) Determinar el trabajo total realizado por la fuerza. (*b*) Calcular la potencia dividiendo el trabajo total por el tiempo total. (*Respuestas* (*a*) 8000 J, (*b*) 400 W.)

EJEMPLO 6.11 | Potencia y energía cinética

Demostrar que la potencia transmitida sobre una partícula por la fuerza neta que actúa sobre ella se iguala con la tasa de cambio de la energía cinética de la partícula.

Planteamiento del problema La potencia transmitida por la fuerza neta viene dada por $\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v}$. Demostrar que $\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v} = dE_c/dt$, donde $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

1. Aplicar el resultado del ejemplo 6.9 junto con $\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{neta}}/m$ y determinar $\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v}$:

$$2\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$2\frac{\mathbf{F}_{\text{neta}}}{m} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)$$

2. La masa es constante, por lo que se puede introducir dentro del argumento de la derivada.

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$P_{\text{neta}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{dE_c}{dt}$$

Observación En la sección siguiente se usan los resultados de este ejemplo para obtener el teorema trabajo-energía cinética en tres dimensiones.

En el ejemplo 6.10 se ha calculado la potencia suministrada a los ladrillos por el extremo inferior de la cuerda. En este caso la tasa de cambio de la energía cinética de la cuerda es despreciable, por lo que la potencia suministrada por el motor a la cuerda es la misma potencia que la cuerda transmite a los ladrillos.

6.3 Trabajo y energía en tres dimensiones

A partir del ejemplo 6.11 tenemos $\mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v} = dE_c/dt$, donde $E_c = \frac{1}{2}mv^2$. El teorema trabajo-energía cinética en tres dimensiones puede establecerse integrando los dos términos de esta ecuación con respecto del tiempo. Esto nos conduce a

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot \mathbf{v}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dE_c}{dt} dt \tag{6.18}$$

Como $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\, dt$, donde $d\mathbf{s}$ es el desplazamiento durante el tiempo dt, y teniendo en cuenta, además, que $(dE_c/dt)dt = dE_c$, la ecuación 6.18 puede expresarse

$$\int_1^2 \mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot d\mathbf{s} = \int_1^2 dE_c$$

en donde la integral de la izquierda es el trabajo total W_{total} realizado sobre la partícula. (En el capítulo 7 se presentan las relaciones trabajo-energía para objetos a los que no se puede considerar como partículas.) El primer miembro de la expresión anterior puede integrarse, lo cual lleva a

$$W_{\text{total}} = \int_1^2 \mathbf{F}_{\text{neta}} \cdot d\mathbf{s} = E_{c2} - E_{c1} = \Delta E_c \tag{6.19}$$

ECUACIÓN TRABAJO – ENERGÍA CINÉTICA EN TRES DIMENSIONES

La ecuación 6.19 se obtiene directamente de la segunda ley de Newton del movimiento.

EJEMPLO 6.12 | Trabajo realizado sobre una esquiadora

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

Dos esquiadoras visitan una estación de esquí que tiene dos pistas, una para principiantes y otra para expertos. Ambas pistas comienzan al final de un telearrastre y acaban al comienzo de esta infraestructura. Sea *h* la distancia vertical entre el comienzo y el final de ambas pistas. Naturalmente, la pista para principiantes es más larga y con pendientes menos pronunciadas que la pista para esquiadores expertos. Las dos esquiadoras, una de las cuales es mucho mejor esquiadora que la otra, están probando unos esquís experimentales que no tienen rozamiento. Para hacer las cosas más interesantes, la menos experta apuesta con su amiga que si una va por la pista para expertos y la otra por la de principiantes, ambas llegaran al final común de las dos pistas a la misma velocidad. La experta acepta la apuesta (olvidándose que su amiga está siguiendo un curso de física) con la condición de que ambas comiencen desde el reposo en el mismo punto al final del telearrastre y que bajen toda la pista sin frenar. ¿Quién gana la apuesta, suponiendo que la resistencia con el aire es despreciable?

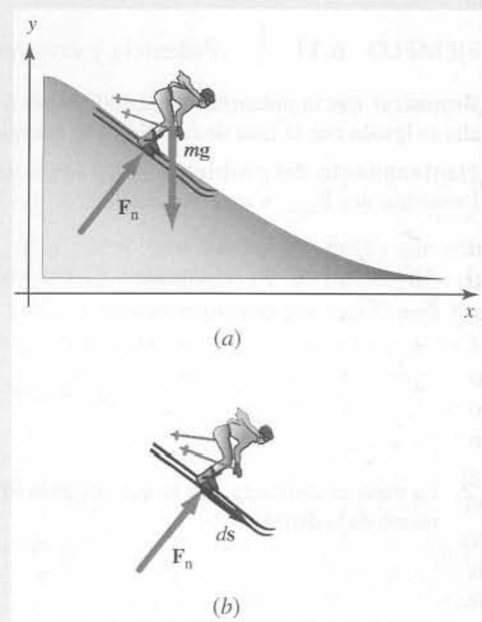


Figura 6.18

Planteamiento del problema Dado que las dos amigas deslizan con los esquís, pueden considerarse como dos partículas. Sobre cada una de las esquiadoras actúan dos fuerzas, la gravedad $m\mathbf{g}$ y la fuerza normal $\mathbf{F}_n$. Hacer un esquema de las fuerzas que actúan sobre una cualquiera de las esquiadoras dibujando los dos vectores e incluyendo los ejes de coordenadas (figura 6.18*a*). El teorema trabajo-energía, con $v_i = 0$, relaciona la velocidad final v_f con el trabajo total. (El teorema trabajo-energía cinética sólo funciona para partículas.)

1. La velocidad final está relacionada con la energía cinética final, que a su vez está relacionada con el trabajo total por el teorema trabajo-energía cinética: $W_{\text{total}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$

2. Para cada esquiadora, el trabajo total es el trabajo realizado por la fuerza normal más el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria: $W_{\text{total}} = W_n + W_g$

3. La fuerza $m\mathbf{g}$ sobre las esquiadoras es constante pero la fuerza normal $\mathbf{F}_n$ no lo es. Calcular primero el trabajo realizado por $\mathbf{F}_n$. Calcular el trabajo dW_n realizado sobre una de las esquiadoras por $\mathbf{F}_n$ para un desplazamiento infinitesimal ds (figura 6.18*b*) en una posición arbitraria a lo largo del descenso. $dW_n = \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{s} = F_n \cos\phi\, ds$

4. Determinar el ángulo ϕ entre las direcciones de $\mathbf{F}_n$ y ds. El desplazamiento ds es paralelo a la pendiente: $\phi = 90°$

5. Calcular el trabajo realizado por $\mathbf{F}_n$ durante todo el descenso: $dW_n = F_n \cos 90°\, ds = 0,$
$W_n = \int dW_n = 0$

6. La fuerza de la gravedad es constante, por lo tanto el trabajo realizado por la gravedad es $W_g = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s}$, donde $\mathbf{s}$ es el desplazamiento neto desde el inicio de la pista al final (figura 6.19): $W_g = m\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} = -mg\,\mathbf{j} \cdot (\Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j})$
$= -mg\,\Delta y$

7. Las esquiadoras descienden por la pendiente, por lo que Δy es negativo. De la figura 6.18*a*, vemos que $\Delta y = -h$: $\Delta y = -h$

8. Sustituyendo se obtiene: $W_g = mgh$

9. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética para determinar v_f: $W_n + W_g = \Delta E_c$

10. La velocidad final depende sólo de h, que es la misma para los dos descensos. Ambas esquiadoras tendrán la misma velocidad final. $0 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$

por lo tanto

$v_f = \sqrt{2gh}$

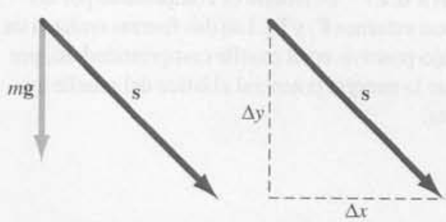


Figura 6.19

La esquiadora menos experta ha ganado la apuesta ya que ambas han llegado a la misma velocidad.

Observación La esquiadora más experta invertirá un tiempo menor en llegar a la línea de llegada, pero la apuesta no era ésta. Lo que se ha demostrado en este ejercicio es que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad se iguala a *mgh*. No depende de la forma de la colina ni del camino tomado. Depende únicamente de la diferencia de altura entre el punto de salida y el de llegada.

En el ejemplo 6.12 hemos visto que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria es independiente del camino seguido. Este hecho nos lleva al concepto de energía potencial, concepto al que dedicamos la sección que sigue.

6.4 Energía potencial

El trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética. Sin embargo, frecuentemente nos interesa el trabajo realizado por un *sistema* de dos o más partículas.[1] En muchos casos el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre un *sistema* no incrementa su energía cinética, sino que se almacena como **energía potencial**, es decir, energía asociada a la configuración del sistema.

Consideremos el levantamiento de una barra de pesas de masa m a una altura h. El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es $-mgh$. La barra empieza y acaba en estado de reposo. Como la energía cinética de la barra no varía, el trabajo total sobre la barra es cero. Esto significa que el atleta que levanta la barra de pesas ejerce sobre ella una fuerza de $+mgh$. Consideremos ahora la barra y el planeta Tierra (pero no el levantador de las pesas) como un *sistema* de partículas. Las fuerzas externas que actúan sobre el *sistema Tierra-barra* son la atracción gravitatoria que el atleta ejerce *sobre la Tierra*, la fuerza que sus pies ejercen sobre la Tierra y la fuerza *mg* que sus manos ejercen sobre la barra (figura 6.20). (Puede despreciarse la fuerza gravitatoria que el levantador ejerce sobre la barra.) La barra se mueve, pero el movimiento de la Tierra es despreciable, de modo que la única fuerza externa ejercida sobre el sistema que realiza trabajo es la fuerza ejercida por el atleta sobre la barra. El trabajo total realizado sobre el sistema Tierra-barra por fuerzas *externas* al sistema es *mgh*. Este trabajo se almacena como energía potencial, la cual está asociada a la configuración del sistema Tierra-barra. Ese tipo de energía se llama energía potencial gravitatoria.

Un muelle es otro ejemplo de sistema que almacena energía mediante su configuración. Si se estira o se comprime un muelle, la energía asociada con la longitud del muelle se alma-

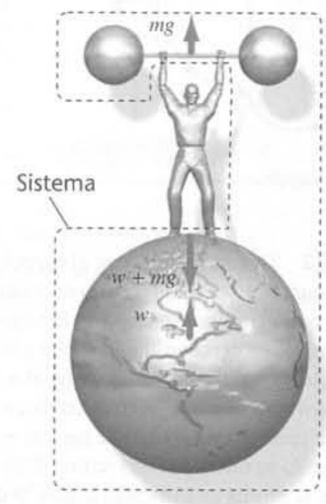


Figura 6.20 Sistema formado por una barra de pesas y la Tierra, pero no el atleta. Al levantar la barra, el atleta trabaja sobre este sistema.

[1] Los sistemas de partículas se tratan más ampliamente en el capítulo 8.

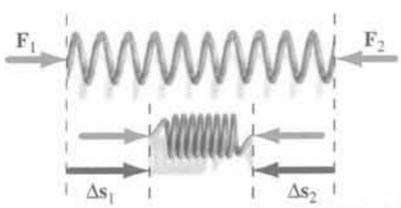


Figura 6.21 El muelle es comprimido por las fuerzas externas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Las dos fuerzas realizan un trabajo positivo en el muelle comprimiéndolo, por lo que la energía potencial elástica del muelle aumenta.

cena como energía potencial. Consideremos el muelle de la figura 6.21: si se comprime mediante fuerzas iguales y de sentido contrario, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, estas fuerzas suman cero y la fuerza neta que se ejerce sobre el muelle sigue siendo cero, por lo que no hay ningún cambio en la energía cinética del muelle. El trabajo que se ejerce sobre el sistema no se almacena como energía cinética sino como energía potencial elástica; la configuración de este sistema ha cambiado, como queda patente por el cambio de la longitud del muelle. El trabajo total realizado sobre el muelle es positivo porque las dos fuerzas realizan un trabajo positivo. (El trabajo realizado por $\mathbf{F}_1$ es positivo porque tanto la fuerza como el desplazamiento de su punto de aplicación $\Delta\mathbf{s}_1$ van en la misma dirección, y lo mismo puede decirse de $\mathbf{F}_2$ y $\Delta\mathbf{s}_2$.)

Fuerzas conservativas

Cuando un esquiador asciende mediante un telesquí a lo alto de una pista de altura h, el trabajo realizado por la máquina sobre él es mgh y el realizado por la gravedad $-mgh$. Cuando el esquiador se desliza desde arriba hasta el punto más bajo de la pista, el trabajo realizado por la gravedad es $+mgh$, independientemente de la forma de la pista (como se ha visto en el ejemplo 6.12). El trabajo total realizado por la gravedad sobre el esquiador en el viaje de ida y vuelta es cero, independientemente de la trayectoria seguida. Se dice que la fuerza de la gravedad ejercida sobre el esquiador es una **fuerza conservativa**.

Una fuerza es conservativa si el trabajo total que realiza sobre una partícula es cero cuando la partícula recorre un trayectoria cerrada y vuelve a su posición inicial.

DEFINICIÓN —FUERZA CONSERVATIVA

La figura 6.22 nos muestra que esta definición implica lo siguiente:

El trabajo realizado por una fuerza conservativa es independiente de la trayectoria seguida por la partícula cuando se mueve de un punto a otro.

DEFINICIÓN ALTERNATIVA —FUERZA CONSERVATIVA

Consideremos ahora el esquiador y la Tierra como un *sistema de dos partículas*. (El telesquí no forma parte del sistema.) Cuando el telesquí conduce al esquiador a lo alto de la pista realiza el trabajo mgh sobre el sistema esquiador-Tierra. Este trabajo es almacenado en forma de energía potencial del sistema. Cuando el esquiador desciende por la pista, esta energía potencial se convierte en energía cinética de movimiento.

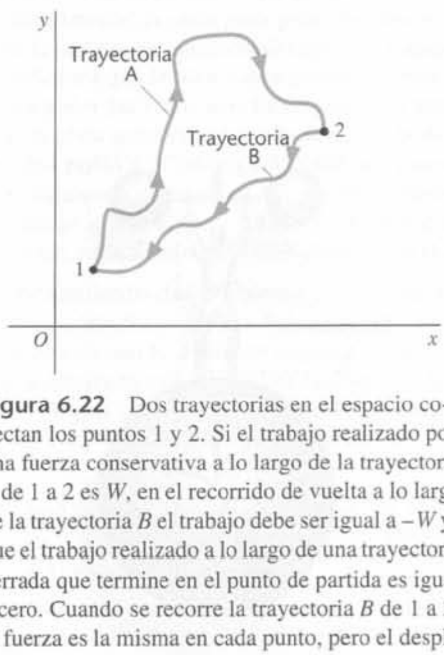


Figura 6.22 Dos trayectorias en el espacio conectan los puntos 1 y 2. Si el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de la trayectoria A de 1 a 2 es W, en el recorrido de vuelta a lo largo de la trayectoria B el trabajo debe ser igual a $-W$ ya que el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada que termine en el punto de partida es igual a cero. Cuando se recorre la trayectoria B de 1 a 2, la fuerza es la misma en cada punto, pero el desplazamiento es opuesto al que va de 2 a 1. Por lo tanto, el trabajo realizado a lo largo de la trayectoria B de 1 a 2 es también W. De aquí se deduce que el trabajo realizado sobre una partícula que se desplaza sobre el punto 1 a 2 es el mismo para todas las trayectorias que conectan los dos puntos.

Funciones de energía potencial

Como el trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre una partícula no depende de la trayectoria, sólo depende de los puntos extremos 1 y 2. Podemos usar esta propiedad para definir la **función energía-potencial** U, asociada a una fuerza conservativa. Obsérvese que cuando el esquiador se desliza hacia abajo por la pista, el trabajo realizado por la gravedad *disminuye* la energía potencial del sistema. En general, la función energía potencial se define de tal modo que el trabajo realizado por una fuerza conservativa sea igual a la disminución de la función energía-potencial:

$$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\Delta U$$

es decir,

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (6.20a)$$

DEFINICIÓN —FUNCIÓN ENERGÍA POTENCIAL

Para un desplazamiento infinitesimal tenemos

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad (6.20b)$$

Podemos calcular la función energía-potencial asociada con la fuerza gravitatoria próxima a la superficie de la Tierra mediante la ecuación 6.21b. Para la fuerza $\mathbf{F} = -mg\mathbf{j}$, resulta

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -(-mg\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = +mg\, dy$$

e integrando obtenemos

$$U = \int mg\, dy = mgy + U_0$$

$$U = U_0 + mgy \qquad (6.21)$$

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA PRÓXIMA A LA SUPERFICIE DE LA TIERRA

en donde U_0, la constante arbitraria de integración, es el valor de la energía potencial para $y = 0$. Como sólo definimos la variación de energía potencial, el valor real de U no es importante. Somos libres para dar a U el valor cero en cualquier punto de referencia. Por ejemplo, si la energía potencial gravitatoria del sistema Tierra-esquiador se elige igual a cero cuando el esquiador está en el fondo de la pista, su valor a la altura h sobre este nivel es mgh. También podemos elegir la energía potencial cero cuando el esquiador está en un punto P a medio camino de la pendiente, en cuyo caso su valor en cualquier otro punto sería mgy, en donde y es la altura del esquiador respecto al punto P.

Ejercicio Una muchacha de 55 kg se encuentra en un balcón a 8 m por encima del suelo. ¿Cuál es la energía potencial del sistema muchacha-Tierra si (*a*) U se elige cero en el suelo; (*b*) U se elige cero a 4 m por encima del suelo; y (*c*) U se elige cero 10 m por encima del suelo? (*Respuestas* (*a*) 4,32 kJ, (*b*) 2,16 kJ, (*c*) –1,08 kJ.)

EJEMPLO 6.13 | La botella que cae

Una botella de 0,350 kg de masa cae desde un estante que está 1,75 m por encima del suelo. Determinar la energía potencial del sistema Tierra-botella cuando la botella está en el estante y cuando está a punto de chocar con el suelo. Determinar la energía cinética de la botella justo antes del impacto.

Planteamiento del problema Al caer la botella, el trabajo realizado por la Tierra sobre la botella iguala con signo contrario el cambio en la energía potencial del sistema botella-Tierra. Si se sabe cuánto vale este trabajo, se puede usar el teorema trabajo-energía cinética para determinar la energía cinética.

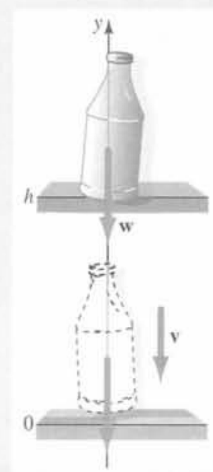


Figura 6.23

1. Hacer un esquema que muestre la botella en el estante y la botella antes de chocar con el suelo (figura 6.23). Suponer que la energía potencial del sistema botella-Tierra es cero cuando la botella está en el suelo, y colocar el eje y con su origen en el suelo:

2. La única fuerza que realiza trabajo sobre la botella mientras cae es la fuerza de la gravedad, por lo que $W_{total} = W_g$. Aplicar el teorema trabajo-energía cinética a la botella que cae:

$$W_{total} = W_g = \Delta E_c$$

3. La fuerza ejercida por la Tierra sobre la botella durante su caída es una fuerza interna al sistema botella-Tierra. También es una fuerza conservativa, por lo que el trabajo realizado iguala el cambio en la energía potencial del sistema:

$$W_g = -\Delta U = -(U_f - U_i) = -(mgy_f - mgy_i)$$
$$= mg(y_i - y_f) = mg(h - 0) = mgh$$

4. Sustituir el resultado del paso 3 en el resultado del paso 2 y obtener la energía cinética final, teniendo en cuenta que la energía cinética inicial es cero.

$$mgh = \Delta E_c$$
$$mgh = E_{c_f} - E_{c_i}$$
$$E_{c_f} = E_{c_i} + mgh$$
$$= 0 + (0{,}350\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(1{,}75\text{ m})$$
$$= \boxed{6{,}01\text{ J}}$$

Observación En este ejemplo, la energía potencial perdida por el sistema botella-Tierra se convierte totalmente en energía cinética de la botella que cae. Obsérvese que en el paso 1 hemos utilizado la definición 1 J = 1 N · m.

La energía potencial se asocia con la configuración de *un sistema de partículas*, pero a veces en un sistema como el de la botella-Tierra de este ejemplo, sólo se mueve una partícula (el movimiento de la Tierra es despreciable). Por simplicidad, muchas veces nos referimos a la energía potencial del sistema botella-Tierra simplemente como la energía potencial de la botella.

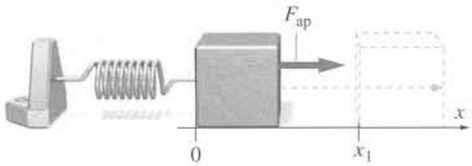


Figura 6.24 La fuerza aplicada F_{ap} mueve el bloque hacia la derecha tirando del muelle hasta x_1.

Energía potencial en un muelle Otro ejemplo de una fuerza conservativa es la que ejerce un muelle estirado (o comprimido). Supongamos que tiramos de un bloque atado a un muelle y lo desplazamos de una posición $x = 0$ (equilibrio) a otra x_1 (figura 6.24). El muelle realiza un trabajo negativo porque su fuerza se opone a la dirección del movimiento. Si ahora dejamos el bloque en libertad, el muelle realiza un trabajo positivo, al acelerar el bloque hacia su posición inicial. El trabajo total realizado por el muelle para mover el bloque hasta su posición inicial $x = x_1$ y devolverlo luego a $x = 0$ es cero, independientemente del valor de x_1 (siempre que el alargamiento no supere el límite de elasticidad del muelle). La fuerza que ejerce el muelle es, por lo tanto, una fuerza conservativa. Podemos calcular la función energía potencial asociada a esta fuerza a partir de la ecuación 6.20b:

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -F_x\, dx = -(-kx)dx = +kx\, dx$$

Por lo tanto,

$$U = \int kx\, dx = \tfrac{1}{2}\, kx^2 + U_0$$

en donde U_0 es la energía potencial para $x = 0$, es decir, cuando el muelle está sin tensar. Haciendo U_0 igual a cero resulta

$$U = \tfrac{1}{2}\, kx^2 \tag{6.22}$$

ENERGÍA POTENCIAL DE UN MUELLE

Cuando tiramos del bloque desde $x = 0$ hasta $x = x_1$, ejercemos una fuerza aplicada sobre el muelle. Si el bloque inicia su movimiento en $x = 0$ y lo acaba en $x = x_1$, en ambos casos en reposo, el cambio de su energía cinética es cero. El teorema trabajo-energía implica que el trabajo total realizado sobre el bloque es cero, es decir $W_{ap} + W_{muelle} = 0$, o

$$W_{ap} = -W_{muelle} = \Delta U_{muelle} = \tfrac{1}{2}\, kx_1^2 - 0 = \tfrac{1}{2}\, kx_1^2$$

Este trabajo se almacena en forma de energía potencial en el sistema muelle-bloque.

EJEMPLO 6.14 | La energía potencial de un jugador de basquet

Consideremos el sistema formado por un jugador de basquet, el aro de una de las cestas y la Tierra. Supongamos que la energía potencial del sistema es cero cuando el jugador no está saltando y el aro está en posición horizontal. Determinar la energía potencial total de este sistema cuando el jugador se cuelga del aro como se muestra en la figura 6.25. Supongamos también que se puede describir el jugador como una masa puntual de 110 kg a 0,8 m de altura por encima del suelo cuando está de pie y a 1,3 m de altura cuando se cuelga del aro. La constante de fuerza del aro es 7,2 kN/m y la parte frontal del aro se desplaza una distancia s = 15 cm.

Planteamiento del problema En el cambio de posición del jugador, desde el suelo hasta el aro, la variación total de la energía potencial consiste en energía potencial gravitatoria, $U_g = mgy$, y energía almacenada por el aro desplazado, cuya energía potencial se supone análoga a la de un muelle: $U_s = \frac{1}{2} ks^2$. Elegimos $y = 0$ a 0,8 m del suelo como punto de referencia de la energía potencial gravitatoria.

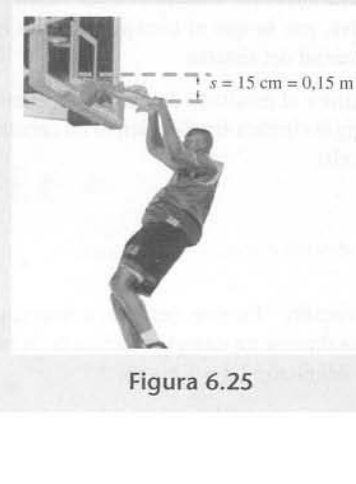


Figura 6.25

La energía potencial total es la suma de la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica del aro (figura 6.26):

$$U = U_g + U_s = mgy + \tfrac{1}{2}\,ks^2$$

$$= (110\text{ kg})(9{,}81\text{ N/kg})(0{,}5\text{ m}) + \tfrac{1}{2}\,(7{,}2\text{ kN/m})(0{,}15\text{ m})^2$$

$$= 540\text{ J} + 81\text{ J} = \boxed{621\text{ J}}$$

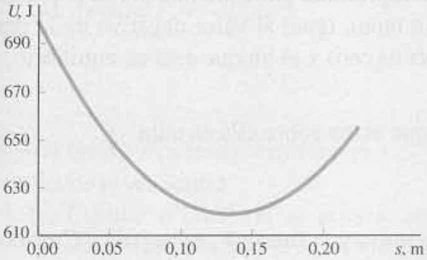


Figura 6.26 El gráfico muestra la energía potencial total $U_g + U_s$ en función de la deformación del aro.

Observación En este caso casi toda la energía potencial es gravitatoria, a causa del origen de energía potencial elegido.

Ejercicio Un bloque de 3 kg cuelga verticalmente de un muelle cuya constante de fuerza es 600 N/m. (*a*) ¿Cuál será el alargamiento del muelle cuando el bloque alcance el equilibrio? (*b*) ¿Cuánta energía potencial se almacena en el sistema muelle-bloque? (*Respuestas* (*a*) 4,9 cm, (*b*) 0,72 J)

Fuerzas no conservativas

No todas las fuerzas son conservativas. Supongamos que se empuja desde un punto A hasta un punto B una caja situada encima de una mesa y que luego se vuelve de B a A, de forma que la caja acaba en el mismo sitio de donde ha salido. El rozamiento se opone al movimiento, por lo que la fuerza que se ejerce al empujar la caja, que siempre va en la dirección del movimiento, realiza un trabajo positivo en los dos tramos del trayecto. Por lo tanto, el trabajo total que ha hecho el empuje no es cero y nos encontramos ante un ejemplo de **fuerza no conservativa** para la cual no podemos definir una función energía potencial.

Algunas veces se puede demostrar que una fuerza determinada no es conservativa calculando el trabajo realizado por la fuerza alrededor de alguna curva cerrada y mostrando que éste no es cero. Consideremos la fuerza $\mathbf{F} = F_0\boldsymbol{\phi}$, donde $\boldsymbol{\phi}$ es un vector unitario dirigido según la tangente a un círculo de radio r. El trabajo realizado por esta fuerza cuando nos movemos alrededor del círculo de radio r es $+F_0 2\pi r$ si lo hacemos en la dirección de la fuerza (y $-F_0 2\pi r$ si lo hacemos en la dirección opuesta a la fuerza). Como este trabajo no es cero, concluimos que la fuerza no es conservativa. Sin embargo, este método para saber si una fuerza es conservativa o no es limitado, ya que si el trabajo realizado alrededor de *un* camino determinado no es cero podemos concluir que la fuerza no es conservativa pero, en cambio, para que una fuerza sea conservativa el trabajo debe ser cero en *todas* las trayectorias cerradas posibles. Como hay infinitas trayectorias cerradas, es imposible calcular el trabajo realizado en cada una. En cursos de física más avanzados se exponen métodos matemáticos más sofisticados para probar el carácter conservativo o no de las fuerzas.

Energía potencial y equilibrio

Para una fuerza conservativa general en una dimensión, $\mathrm{F} = F_x\mathbf{i}$, la ecuación 6.20b es:

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -F_x\,dx$$

La fuerza es, por lo tanto, la derivada negativa de la función energía potencial:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \qquad (6.23)$$

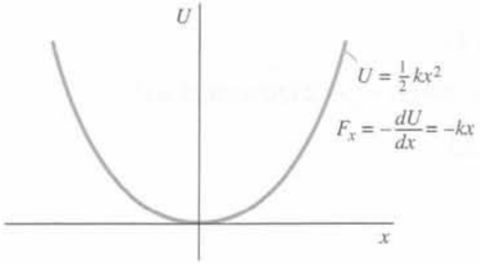


Figura 6.27 Función energía-potencial U en función del desplazamiento x para un objeto sujeto a un muelle. Un mínimo en una curva de energía potencial es un punto de equilibrio estable, ya que los desplazamientos a ambos lados de este punto dan lugar a una fuerza que está dirigida hacia la posición de equilibrio.

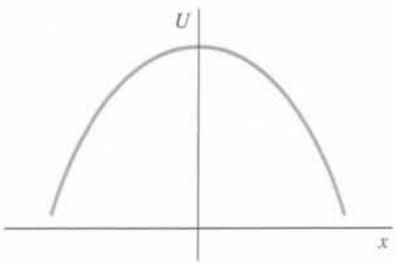


Figura 6.28 Una partícula en $x = 0$ para esta curva de energía potencial se encontrará en equilibrio inestable, ya que los desplazamientos en una u otra dirección, dan lugar a una fuerza que la aleja de la posición de equilibrio.

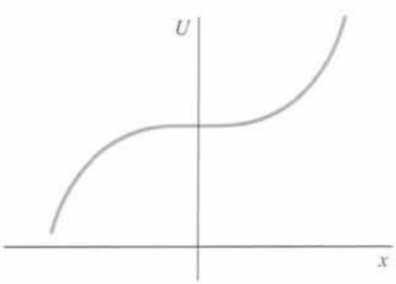


Figura 6.29 Equilibrio neutro. La fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero para $x = 0$ y para los puntos próximos. Si una partícula se desplaza en cualquier dirección a partir de $x = 0$, no experimenta ninguna fuerza y por lo tanto, permanece en equilibrio.

Esta expresión general puede comprobarse para el caso de un sistema bloque-muelle diferenciando la función $U = \frac{1}{2}kx^2$, con lo que obtenemos

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

La figura 6.27 muestra un gráfico de $U = \frac{1}{2}kx^2$ en función del desplazamiento x para un sistema bloque-muelle. La derivada de esta función se representa gráficamente por la pendiente de la línea tangente a la curva. La fuerza es, por lo tanto, igual al valor negativo de la pendiente de la curva. Para $x = 0$, la fuerza $F_x = -dU/dx$ es cero y el bloque está en equilibrio.

Una partícula está en equilibrio si la fuerza neta que actúa sobre ella es nula.

CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Cuando x es positiva (figura 6.27), la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. Cuando x es negativa, la pendiente es negativa y la fuerza F_x es positiva. En ambos casos, la fuerza tiene la dirección que acelera el bloque hacia los valores de energía potencial más bajos. Si el bloque se desplaza ligeramente de $x = 0$, la fuerza se dirige hacia atrás, es decir, hacia $x = 0$. El equilibrio en $x = 0$, es por lo tanto, un **equilibrio estable**, ya que un desplazamiento pequeño hace que una fuerza restauradora acelere la partícula de nuevo hacia su posición de equilibrio.

En el equilibrio estable un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza restauradora que acelera la partícula hacia atrás en busca de su posición de equilibrio.

En la figura 6.28 se muestra una curva para la energía potencial con un máximo para $x = 0$ en lugar de un mínimo. Esta curva podría representar, por ejemplo, la energía potencial de un esquiador en la cumbre de una colina entre dos valles. En esta curva, cuando x es positiva, la pendiente es negativa, y la fuerza F_x es positiva; y cuando x es negativa, la pendiente es positiva y la fuerza F_x es negativa. De nuevo la fuerza tiene aquella dirección que acelera la partícula hacia la menor energía potencial, pero en este caso la fuerza se aleja de la posición de equilibrio. El máximo para $x = 0$ en la figura 6.28 es un punto de **equilibrio inestable**, ya que un desplazamiento pequeño da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de su posición de equilibrio.

En el equilibrio inestable un pequeño desplazamiento da lugar a una fuerza que acelera la partícula alejándola de la posición de equilibrio.

La figura 6.29 muestra una curva de energía potencial que es plana en la región próxima a $x = 0$ y, por lo tanto, la partícula está en equilibrio. Si la partícula se desplaza ligeramente en cualquier dirección la fuerza seguirá siendo cero. Este es un ejemplo de **equilibrio neutro**.

En el equilibrio neutro un pequeño desplazamiento no da lugar a ninguna fuerza, de modo que la partícula sigue en equilibrio.

EJEMPLO 6.15 | Función energía potencial y fuerzas

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

La fuerza de una partícula en la región $-a < x < a$ se representa mediante la función energía potencial

$$U = -b\left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right]$$

donde a y b son constantes positivas. (*a*) Determinar la fuerza F_x en la región $-a < x < a$. (*b*) ¿Para qué valor de x la fuerza vale cero? (*c*) En el punto en que la fuerza se anula, ¿el equilibrio es estable o inestable?

Planteamiento del problema La fuerza es la derivada, con signo negativo, de la función energía potencial. El equilibrio es estable cuando la función energía potencial está en un mínimo e inestable cuando la función energía potencial está en un máximo.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos	Respuestas
(a) Calcular $F_x = -dU/dx$.	$F_x = -\frac{d}{dx}\left[-b\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\right]$ $\boxed{= -b\left(\frac{1}{(x+a)^2}-\frac{1}{(x-a)^2}\right)}$
(b) Igualar F_x a cero y resolver para x.	$F_x = 0$ para $\boxed{x = 0}$
(c) Calcular d^2U/dx^2. Si es positivo en la posición de equilibrio, U alcanza un mínimo y el equilibrio es estable. Si es negativo, entonces U es un máximo y el equilibrio es inestable.	para $x = 0$, $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{-4b}{a^3}$ Por lo tanto, equilibrio $\boxed{\text{inestable}}$

Observación Esta función energía potencial es la que corresponde a una partícula bajo la influencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por dos masas fijas e idénticas, una en $x = -a$ y la otra en $x = +a$. La partícula está en la línea que une las masas y en el punto medio la fuerza neta es cero. De otro modo, tendría la dirección de la masa más próxima.

Resumen

1 Trabajo, energía cinética, energía potencial y potencia son magnitudes dinámicas importantes.

2 El teorema del trabajo-energía cinética es una relación importante deducida de las leyes de Newton aplicadas a una partícula. (En este contexto, una partícula es un objeto perfectamente rígido que se mueve sin rotar.)

3 El producto escalar de dos vectores es una definición matemática útil en todos los campos de la física.

TEMA	OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES	
1. Trabajo (definición)	$W = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	(6.15)
Fuerza constante	$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$	
En una dimensión		
Fuerza constante	$W = F_x\,\Delta x = F\cos\theta\,\Delta x$	(6.1)
Fuerza variable	$W = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx$ = área bajo la curva de F_x en función de x	(6.9)
2. Energía cinética (definición)	$E_c = \frac{1}{2}mv^2$	(6.6)
3. Teorema del trabajo-energía cinética	$W_{total} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$	(6.7)
4. Producto escalar	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\phi$	(6.10)
En función de las componentes	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$	(6.11)
Componente del vector	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{i} = A_x$	(6.12)
Derivada	$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}$	(6.13)