

SISTEMAS DE PARTICULAS Y CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Capítulo

8

- 8.1 Centro de masas
- *8.2 Determinación del centro de masas por integración
- 8.3 Movimiento del centro de masas
- 8.4 Conservación del momento lineal
- 8.5 Energía cinética de un sistema
- 8.6 Colisiones
- *8.7 Sistema de referencia del centro de masas
- *8.8 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes



La masa del palo de golf multiplicada por su velocidad es el ímpetu o el momento lineal del palo. Cuando el golfista golpea la bola con el palo, parte del momento se transfiere a la bola.

¿Cómo se verá afectada la distancia recorrida por la bola si el deportista usa palos de distinta masa? (Véase el ejemplo 8.12.)

En los capítulos 6 y 7 hemos visto que el teorema trabajo-energía cinética para las partículas y para los sistemas de partículas son unas herramientas útiles para analizar una serie de situaciones y para resolver una gran cantidad de problemas. Sin embargo, para estudiar el movimiento de objetos materiales reales y para comprender cómo se comportan éstos cuando chocan, como por ejemplo la bola y el palo de golf de la foto, necesitamos añadir dos teoremas adicionales a nuestro bagaje de herramientas conceptuales. Estos son la **segunda ley de Newton para sistemas de partículas** (sección 8.3) y el teorema del **impulso mecánico-incremento del momento lineal** (sección 8.6). Este último teorema para sistemas introduce el principio de conservación del momento lineal, una de las leyes universales de la física.

El producto de la masa por la velocidad de una partícula se denomina **momento lineal, ímpetu o cantidad de movimiento**. El momento lineal de un sistema de partículas es el vector suma de los momentos lineales de las partículas individuales del sistema. Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal del sistema es constante. El momento lineal de un sistema aislado es una magnitud que se conserva, al igual que la energía de un sistema aislado.



En este capítulo haremos uso del principio de conservación del momento lineal para analizar las colisiones entre bolas de billar, coches, partículas subatómicas y desintegraciones radiactivas de núcleos. Aplicaremos las leyes de Newton al movimiento de objetos macroscópicos reales como coches, cohetes y personas, dándonos cuenta que en los sistemas de partículas hay un punto, el *centro de masas*, que se mueve como si todo el sistema estuviera concentrado en él, y que todas las fuerzas que afectan el sistema lo hacen como si sólo actuaran en ese punto.

8.1 Centro de masas

El movimiento de un objeto o de un sistema de partículas se puede describir en función del movimiento del centro de masas (que puede considerarse como el movimiento global del sistema) más el movimiento de las partículas individuales en el sistema relativo al centro de masas. Consideremos en primer lugar un sistema simple formado por dos partículas en una dimensión. Sean x_1 y x_2 las coordenadas de las partículas puntuales de masas m_1 y m_2 respecto a un origen elegido arbitrariamente. La coordenada x_{cm} del centro de masas viene definida por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 \tag{8.1}$$

en donde $M = m_1 + m_2$ es la masa total del sistema. Para el caso de sólo dos partículas, el centro de masas se encuentra sobre un punto de la línea que une las partículas; si las partículas son de igual masa, el centro de masas se halla a la mitad de camino entre las partículas (figura 8.1).

Si dos partículas tienen distinta masa, el centro de masas está más cerca de la partícula de masa mayor (figura 8.2).

Si se elige el origen y la dirección del eje x de tal forma que la posición de m_1 es el origen y m_2 está en la dirección positiva del eje x , entonces $x_1 = 0$ y $x_2 = d$, donde d es la distancia entre las partículas (figura 8.3) y el centro de masas viene dado por

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 = m_1(0) + m_2d$$

$$x_{cm} = \frac{m_2}{M} d = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d \tag{8.2}$$

Ejercicio Una masa de 4 kg está en el origen y una masa de 2 kg está en $x = 6$ cm. Determinar x_{cm} . (Respuesta $x_{cm} = 2$ cm.)

Podemos generalizar de dos partículas en una dimensión a un sistema de muchas partículas en tres dimensiones. Para N partículas

$$Mx_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_Nx_N = \sum_i m_ix_i \tag{8.3}$$

en donde $M = \sum m_i$ es la masa total del sistema. Igualmente,

$$My_{cm} = \sum_i m_iy_i \quad \text{y} \quad Mz_{cm} = \sum_i m_iz_i \tag{8.4}$$

El vector posición de la partícula i es $\mathbf{r}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j} + z_i\mathbf{k}$. El vector de posición del **centro de masas** \mathbf{r}_{cm} , viene definido por

$$M\mathbf{r}_{cm} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots = \sum_i m_i\mathbf{r}_i \tag{8.5}$$

DEFINICIÓN —CENTRO DE MASAS DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

en donde $\mathbf{r}_{cm} = x_{cm}\mathbf{i} + y_{cm}\mathbf{j} + z_{cm}\mathbf{k}$.

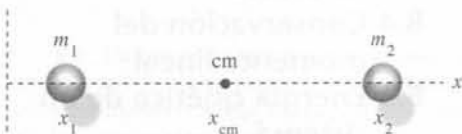


Figura 8.1

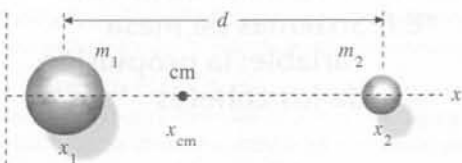


Figura 8.2

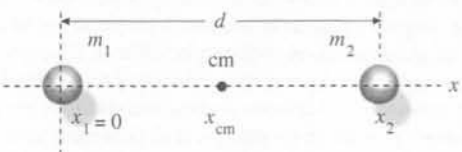


Figura 8.3

Para determinar el centro de masas de un objeto continuo, basta reemplazar el sumatorio de la ecuación 8.5 por una integral:

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} dm \quad (8.6)$$

DEFINICIÓN —CENTRO DE MASAS DE UN OBJETO CONTINUO

en donde dm es un elemento de masa localizado en la posición \mathbf{r} , como se muestra en la figura 8.4. En la sección 8.2 se exponen varios ejemplos relacionados con la ecuación 8.6. Para objetos muy simétricos el centro de masas es el centro geométrico. Por ejemplo, el centro de masas de un cilindro uniforme se encuentra en su centro geométrico. Considérese los siguientes ejemplos.

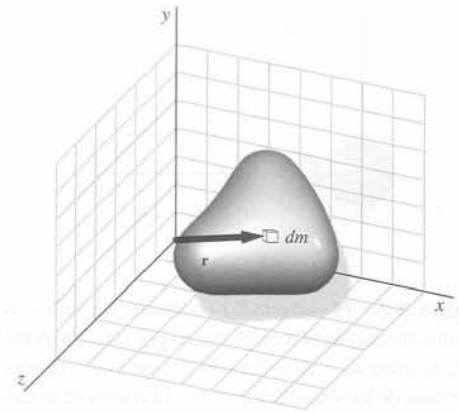


Figura 8.4 Elemento de masa dm localizado en \mathbf{r} para determinar el centro de masas por integración.

EJEMPLO 8.1 | Centro de masas de la molécula de agua

Una molécula de agua está formada por un átomo de oxígeno y dos átomos de hidrógeno. El átomo de oxígeno tiene una masa de 16 unidades de masa atómica (u) y cada átomo de hidrógeno tiene una masa 1 u. Cada uno de los átomos de hidrógeno están separados una distancia media de 96 pm (96×10^{-12} m) del átomo de oxígeno y separados entre sí por un ángulo de $104,5^\circ$. Determinar el centro de masas de la molécula.

Planteamiento del problema El cálculo se simplifica si elegimos como origen la posición del átomo de oxígeno y el eje x como la bisectriz del ángulo entre los átomos de hidrógeno (figura 8.5). Por lo tanto, dada la simetría de la molécula, el centro de masas estará sobre el eje x y la línea que une el átomo de oxígeno con cada átomo de hidrógeno formará con el eje x un ángulo de $52,2^\circ$.

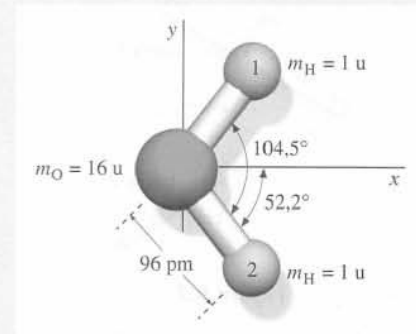


Figura 8.5

1. La posición del centro de masas viene dada por sus coordenadas, x_{cm} e y_{cm} :

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_{\text{cm}} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

2. Si estas expresiones se escriben explícitamente obtenemos:

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_{\text{H1}}x_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}x_{\text{H2}} + m_{\text{O}}x_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{m_{\text{H1}}y_{\text{H1}} + m_{\text{H2}}y_{\text{H2}} + m_{\text{O}}y_{\text{O}}}{m_{\text{H1}} + m_{\text{H2}} + m_{\text{O}}}$$

3. Hemos elegido como origen la localización del oxígeno, de modo que las dos coordenadas x e y de éste son cero. Las coordenadas x de los átomos de hidrógeno se calculan a partir del ángulo de $52,2^\circ$ que cada átomo de hidrógeno forma con el eje x :

$$x_{\text{O}} = y_{\text{O}} = 0$$

$$x_{\text{H1}} = x_{\text{H2}} = 96 \text{ pm} \cos 52,2^\circ = 59 \text{ pm}$$

$$y_{\text{H1}} = 96 \text{ pm} \sin 52,2^\circ = 76 \text{ pm}$$

$$y_{\text{H2}} = -96 \text{ pm} \sin 52,2^\circ = -76 \text{ pm}$$

4. Sustituyendo las coordenadas x y los valores de las masas en el paso 2 se obtiene x_{cm} :

$$x_{\text{cm}} = \frac{(1 \text{ u}) 59 \text{ pm} + (1 \text{ u}) (59 \text{ pm}) + (16 \text{ u}) 0}{1 \text{ u} + 1 \text{ u} + 16 \text{ u}}$$

$$= 6,6 \text{ pm}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{(1 \text{ u}) 76 \text{ pm} + (1 \text{ u}) (-76 \text{ pm}) + (16 \text{ u}) 0}{1 \text{ u} + 1 \text{ u} + 16 \text{ u}} = 0$$

$$= 0$$

5. El centro de masas está en el eje x

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = x_{\text{cm}}\mathbf{i} + y_{\text{cm}}\mathbf{j}$$

$$= 6,6 \text{ pm} \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} = \boxed{6,6 \text{ pm} \mathbf{i}}$$

Observación Se puede ver que $y_{\text{cm}} = 0$ a partir de la simetría de la distribución de masa. Asimismo, el centro de masas está muy próximo al átomo de oxígeno, el de mayor masa, como era de esperar.

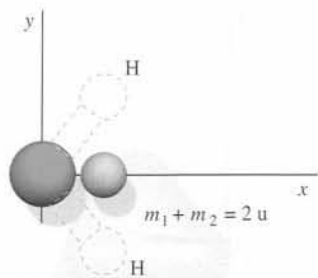


Figura 8.6 El ejemplo 8.1 puede considerarse con los dos átomos de H reemplazados por una sola partícula de masa $m_1 + m_2 = 2 \text{ u}$ sobre el eje x en el centro de masas de los átomos originales. El centro de masas de la molécula de agua se encuentra entonces entre el átomo de oxígeno en el origen y el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno calculado previamente.

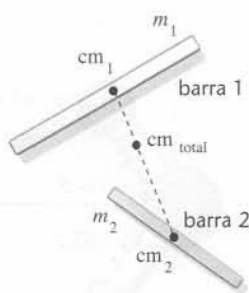


Figura 8.7

El ejemplo 8.1 también puede resolverse determinando en primer lugar el centro de masas de los dos átomos de hidrógeno aisladamente. Para un sistema de tres partículas, la ecuación 8.5 es

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3$$

Los dos primeros términos del segundo miembro de esta ecuación están relacionados con el centro de masas de las dos primeras partículas \mathbf{r}'_{cm} :

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = (m_1 + m_2)\mathbf{r}'_{\text{cm}}$$

El centro de masas del sistema de tres partículas será, por lo tanto,

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = (m_1 + m_2)\mathbf{r}'_{\text{cm}} + m_3\mathbf{r}_3$$

Así, podemos determinar primero el centro de masas de dos de las partículas, por ejemplo, los átomos de hidrógeno, y después reemplazarlos por una sola partícula de masa total $m_1 + m_2$ en aquel centro de masas (figura 8.6).

La misma técnica nos permite calcular los centros de masa de sistemas más complejos, como por ejemplo, dos barras uniformes (figura 8.7). El centro de masas de cada barra por separado se encuentra en el centro de la barra. El centro de masas del sistema se determina tratando cada barra como una partícula puntual en su propio centro de masas.

EJEMPLO 8.2 | Centro de masas de una lámina de madera

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

Determinar el centro de masas de la lámina de madera de la figura 8.8(a).

Planteamiento del problema La lámina puede dividirse en dos partes simétricas (figura 8.8(b)). El centro de masas de cada parte es su centro geométrico. Sea m_1 la masa de la parte 1 y m_2 la masa de la parte 2. La masa total es $M = m_1 + m_2$. Las masas son proporcionales a las áreas.

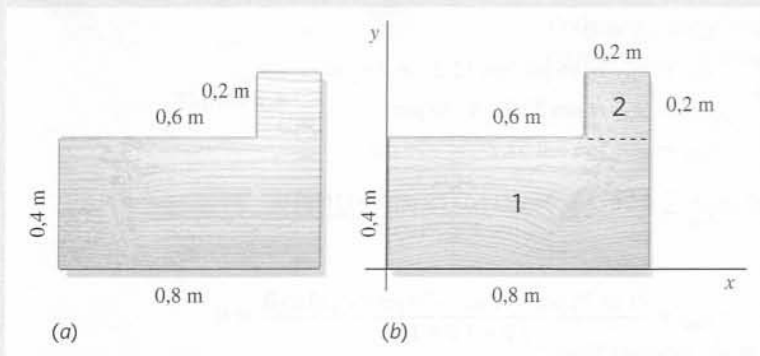


Figura 8.8

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos

1. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas en función de m_1 y m_2 .

Respuestas

$$Mx_{\text{cm}} = m_1x_{\text{cm},1} + m_2x_{\text{cm},2}$$

$$My_{\text{cm}} = m_1y_{\text{cm},1} + m_2y_{\text{cm},2}$$

2. Dividir las ecuaciones anteriores por M y sustituir los cocientes de las áreas por las relaciones entre las masas.

$$x_{cm} = \frac{A_1}{A} x_{1,cm} + \frac{A_2}{A} x_{2,cm}$$

$$y_{cm} = \frac{A_1}{A} y_{1,cm} + \frac{A_2}{A} y_{2,cm}$$

3. Calcular las áreas y los cocientes entre las áreas.

$$A_1 = 0,32 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0,04 \text{ m}^2, \quad A = 0,36 \text{ m}^2$$

$$\frac{A_1}{A} = \frac{8}{9}, \quad \frac{A_2}{A} = \frac{1}{9}$$

4. Expresar las coordenadas x e y del centro de masas de cada una de las partes de la lámina por inspección simple de la figura.

$$x_{1,cm} = 0,4 \text{ m}, \quad y_{1,cm} = 0,2 \text{ m}$$

$$x_{2,cm} = 0,7 \text{ m}, \quad y_{2,cm} = 0,5 \text{ m}$$

5. Sustituir estos resultados para calcular x_{cm} e y_{cm} .

$$x_{cm} = 0,433 \text{ m}, \quad y_{cm} = 0,233 \text{ m}$$

Observación 1. El centro de masas está muy próximo al centro de masas de la parte 1, ya que $m_1 = 8m_2$. 2. El cálculo del centro de masas es más sencillo si se coloca el origen en el centro geométrico de la parte 1 de la lámina y se dibuja el eje x señalando el centro de la parte 2.

Energía potencial gravitatoria de un sistema

La energía potencial gravitatoria de un sistema de partículas en un campo gravitatorio uniforme es la misma que tendría si toda su masa estuviera concentrada en el centro de masas. Sea h_i la altura de la partícula i en un sistema que se encuentra por encima de un nivel determinado de referencia. La energía potencial gravitatoria del sistema es

$$U = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición del centro de masas, la altura de éste viene dada por la expresión

$$M h_{cm} = \sum_i m_i h_i$$

es decir,

$$U = M g h_{cm} \quad (8.7)$$

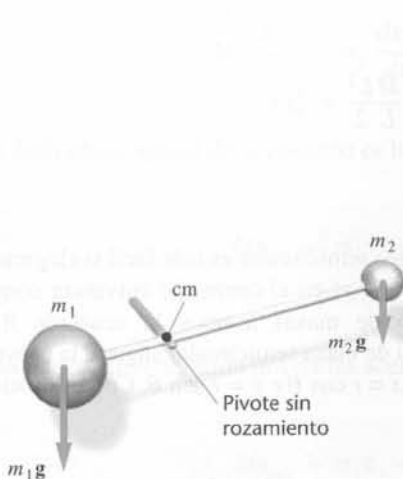


Figura 8.9

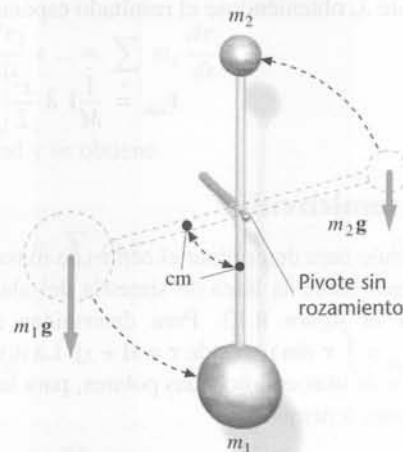


Figura 8.10

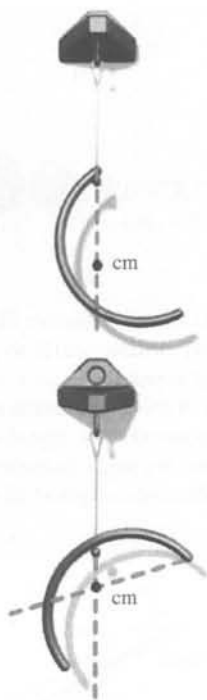


Figura 8.11 El centro de masas de un objeto irregular puede determinarse suspendiéndolo de dos puntos distintos.

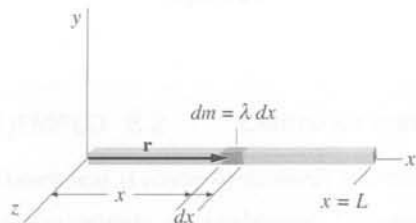


Figura 8.12

Este resultado puede utilizarse para localizar experimentalmente el centro de masas de un objeto. Por ejemplo, dos objetos conectados por una barra ligera estarán en equilibrio sobre un pivote situado en el centro de masas (figura 8.9). Si pivotamos el sistema en cualquier otro punto, el sistema girará hasta que la energía potencial pase por un mínimo, lo cual tiene lugar cuando el centro de masas se encuentra en el punto más bajo posible directamente debajo del pivote (figura 8.10).

Si suspendemos cualquier cuerpo irregular de un pivote, este cuerpo colgará de modo que sus centro de masas se encuentre en un punto de la línea vertical que pasa por el pivote y debajo de éste. Si ahora suspendemos el cuerpo de otro punto y trazamos la línea vertical que pasa a través del mismo, el centro de masas se encuentra en la intersección de las dos líneas (figura 8.11).

*8.2 Determinación del centro de masas por integración

En esta sección se determina el centro de masas por integración (ecuación 8.6).

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm$$

Para ilustrar la técnica de cómo establecer la integración trataremos el problema simple de determinar el centro de masas de una barra uniforme y delgada. Aunque podemos encontrar la solución a este problema por simetría, en este apartado lo haremos mediante integración.

Barra uniforme

Primero, elegimos el sistema de coordenadas. Una buena elección es un sistema de coordenadas con el eje x a lo largo de la barra, con el origen en un extremo (figura 8.12). En la figura se muestra un elemento de masa dm de longitud dx situado a una distancia x del origen. La ecuación 8.6 nos lleva entonces a

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm = \int x\mathbf{i} \, dm$$

La masa está distribuida a lo largo del eje x dentro del intervalo $0 \leq x \leq L$. El barrido de dm a lo largo de toda la barra (y en la dirección positiva del eje x) se determina mediante los límites de la integral 0 y L . El cociente dm/dx es la masa por unidad de longitud λ , por lo tanto $dm = \lambda dx$:

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \mathbf{i} \int x \, dm = \mathbf{i} \int_0^L x \lambda \, dx$$

Si la barra es uniforme, λ es constante e igual a M/L . El cálculo se acaba sustituyendo el valor de λ , obteniéndose el resultado esperado

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \mathbf{i} \lambda \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^L = \frac{1}{M} \mathbf{i} \frac{ML^2}{L \cdot 2} = \frac{1}{2} L \mathbf{i}$$

Aro semicircular

El cálculo para determinar el centro de masas de un aro semicircular es más fácil si elegimos el origen sobre la línea de simetría del alambre (el eje y) en el centro de curvatura como indica la figura 8.13. Para determinar el centro de masas usamos la ecuación 8.6 ($M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm$), donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. La distribución de masa semicircular sugiere la conveniencia de usar coordenadas polares, para las cuales $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Con estas sustituciones tenemos

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \, dm = \int r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \, dm$$

Ahora expresamos dm en función de $d\theta$. Primero, el elemento de masa dm tiene longitud $ds = r d\theta$, por lo tanto

$$dm = \lambda ds = \lambda r d\theta$$

en donde $\lambda = dm/ds$ es la masa por unidad de longitud. De esta forma tenemos

$$M \mathbf{r}_{\text{cm}} = \int r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \lambda r d\theta$$

La evaluación de esta integral supone que dm recorra la distribución de masa semicircular. Esto significa que los límites de θ son $0 \leq \theta \leq \pi$. Se integra en la dirección de θ creciente, por lo que los límites van de 0 a π . Se obtiene entonces

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{r^2}{M} \int_0^\pi (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \lambda d\theta$$

El aro es uniforme y sabemos que $\lambda = M/\pi r$, donde πr es la longitud de la semicircunferencia. Sustituyendo λ y reordenando términos

$$\mathbf{r}_{\text{cm}} = \frac{r}{\pi} \mathbf{i} \int_0^\pi \cos \theta d\theta + \frac{r}{\pi} \mathbf{j} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{r}{\pi} \mathbf{i} \sin \theta \Big|_0^\pi - \frac{r}{\pi} \mathbf{j} \cos \theta \Big|_0^\pi = \frac{2r}{\pi} \mathbf{j}$$

El centro de masas está en el eje y a una distancia de $2r/\pi$ del origen. Notemos que está fuera del objeto.

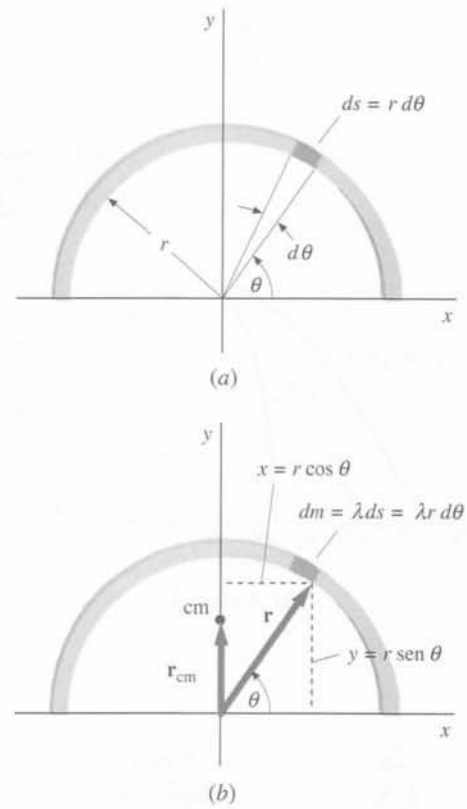


Figura 8.13 Geometría para el cálculo del centro de masas de un aro semicircular por integración.

8.3 Movimiento del centro de masas

La figura 8.14 es una fotografía obtenida con destellos múltiples de un bastón lanzado al aire. Aunque el movimiento del bastón es complicado, el movimiento del centro de masas es simple. Mientras el bastón está en el aire, el centro de masas sigue una trayectoria parabólica, la misma que seguiría una partícula puntual. Demostraremos en general que la aceleración del centro de masas de un sistema de partículas es igual a la fuerza externa que actúa sobre el sistema, dividida por la masa total del mismo. Para el bastón lanzado al aire, la aceleración del centro de masas es \mathbf{g} dirigida hacia abajo. Para determinar la aceleración del centro de masas, calcularemos primero su velocidad, derivando la ecuación 8.5 respecto al tiempo:

$$M \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} = m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}$$

La derivada temporal de la posición es la velocidad y se obtiene

$$M \mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (8.8)$$

Una nueva diferenciación nos da las aceleraciones:

$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad (8.9)$$

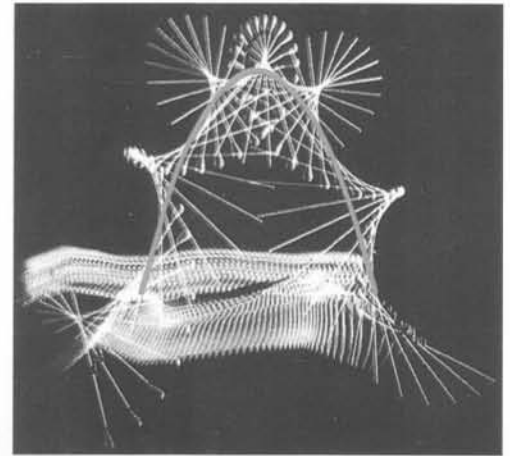


Figura 8.14

Sin embargo, de acuerdo con la segunda ley de Newton, $m_i \mathbf{a}_i$ es igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula i , por lo que

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i$$

en donde el término de la derecha es la suma de todas las fuerzas que actúan en cada partícula del sistema. Algunas de estas fuerzas son fuerzas *internas* (ejercidas sobre una partícula del sistema por otra partícula del sistema) y otras son fuerzas *externas* (ejercidas sobre una partícula del sistema por una partícula que no está en el sistema). Así,

$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{int}} + \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} \quad (8.10)$$

De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas se presentan emparejadas acción-reacción. Así, para cada fuerza interna que actúa sobre una partícula existe una fuerza igual pero opuesta que actúa sobre otra partícula. Cuando se suman todas las fuerzas internas, cada pareja acción-reacción suma cero, de forma que $\sum \mathbf{F}_{i,\text{int}} = 0$. La ecuación 8.10 se convierte en

$$\mathbf{F}_{\text{neta,ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (8.11)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA UN SISTEMA

Esta ecuación nos dice que la masa total M multiplicada por la aceleración del centro de masas \mathbf{a}_{cm} es igual a la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema. Así, tenemos:

El centro de masas de un sistema se mueve como una partícula de masa $M = \sum m_i$ sometida a la influencia de la fuerza externa resultante que actúa sobre el sistema.

Este teorema es importante porque nos muestra cómo describir el movimiento del centro de masas de cualquier sistema de partículas. El centro de masas se comporta exactamente igual que una sola partícula puntual sometida únicamente a las fuerzas externas. Los movimientos individuales de los elementos del sistema generalmente son mucho más complejos y no vienen descritos por la ecuación 8.11. El bastón lanzado al aire de la figura 8.14 es un ejemplo. La única fuerza que actúa es la gravedad y, por lo tanto, el centro de masas del bastón se mueve según una trayectoria parabólica, como si se tratara de una partícula puntual (la rotación del bastón alrededor de su centro de masas no viene descrita por la ecuación 8.11).

EJEMPLO 8.3 | Un proyectil que explota

Un proyectil se lanza al aire desde el nivel del suelo y aterriza a 55 m. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa. Justo después de la explosión, uno de los fragmentos tiene velocidad cero y cae directamente al suelo. ¿Dónde cae el otro fragmento? Despreciar la resistencia del aire.

Planteamiento del problema Sea el proyectil el sistema. Entonces las fuerzas de explosión son todas fuerzas internas. Como la única fuerza *externa* que actúa sobre el sistema es la de la gravedad, el centro de masas, que está en todo momento a mitad de camino entre los fragmentos, continúa con su trayectoria parabólica como si no hubiera explosión (figura 8.15).

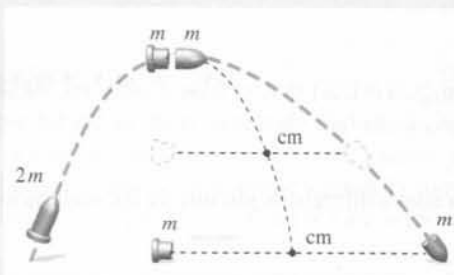


Figura 8.15

- Sea $x = 0$ la posición inicial del proyectil. Las posiciones de aterrizaje x_1 y x_2 de los fragmentos están relacionados con la posición final del centro de masas por:

$$(2m)x_{cm} = mx_1 + mx_2$$

$$0$$

$$2x_{cm} = x_1 + x_2$$
- En el impacto, $x_{cm} = R$ y $x_1 = 0,5R$, donde $R = 55$ m es el alcance del proyectil si no explota. Se obtiene entonces para x_2 .

$$x_2 = 2x_{cm} - x_1 = 2R - 0,5R = 1,5R$$

$$= 1,5(55 \text{ m}) = \boxed{82,5 \text{ m}}$$

Observación La figura 8.16 representa la altura en función de la distancia para los proyectiles que explotan cuando el primer fragmento posee una velocidad horizontal igual a la mitad de la velocidad horizontal inicial. Como en el ejemplo original, en el cual el primer fragmento cae verticalmente hacia abajo, el centro de masas sigue una trayectoria normal parabólica.

Ejercicio Si la masa del fragmento que cae directamente hacia abajo es el doble que la masa del otro fragmento, ¿a qué distancia del punto de lanzamiento aterrizará el más ligero? (Respuesta $2R$.)

Observación Si ambos fragmentos tienen la misma componente vertical de la velocidad después de la explosión, ambos aterrizarán al mismo tiempo. Si justo después de la explosión la componente vertical de la velocidad vectorial de uno de los fragmentos es menor que la del otro, el fragmento con componente vertical menor chocará primero contra el suelo. Tan pronto como lo haga, el suelo ejercerá una fuerza sobre él y la fuerza neta sobre el sistema dejará de ser sólo la gravedad. Desde este momento, nuestro análisis no es válido.

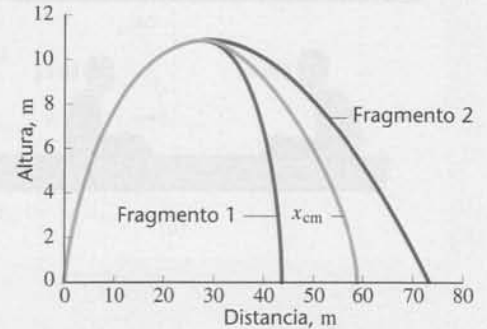


Figura 8.16

Ejercicio Un cilindro descansa sobre un papel encima de una mesa (figura 8.17). Cuando se tira del papel hacia la derecha, el cilindro rueda hacia la izquierda en relación al papel. ¿Cómo se mueve el centro de masas del cilindro en relación a la mesa? (Respuesta Acelera hacia la derecha, ya que la fuerza externa resultante que actúa sobre el cilindro es la de rozamiento hacia la derecha que ejerce el papel. Inténtelo hacer. Aparentemente, el cilindro acelera hacia la izquierda, ya que le vemos rodar hacia atrás sobre el papel. Sin embargo, en relación a la mesa, que sirve de sistema de referencia inercial, se mueve hacia la derecha. Si se hace una marca en la mesa que señale la posición original del cilindro, se observa que el centro de masas se mueve hacia la derecha mientras el cilindro siga en contacto con el papel.)

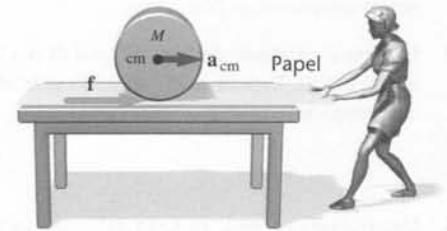


Figura 8.17

Un caso especial del movimiento del centro de masas es aquel en que sobre el sistema no actúa ninguna fuerza externa neta. Por lo tanto, $\mathbf{a}_{cm} = 0$ y el centro de masas está en reposo o se mueve con velocidad constante. Las fuerzas internas y el movimiento pueden ser complejos, pero el comportamiento del centro de masas es simple. Además, si la fuerza externa neta no es cero, pero si una componente de ella en una dirección dada, por ejemplo la dirección x , es cero, entonces $a_{cmx} = 0$ y v_{cmx} permanece constante. Un ejemplo de esto es un proyectil en ausencia de resistencia del aire. La fuerza externa neta sobre el proyectil es la fuerza gravitatoria. Esta fuerza actúa hacia abajo, por lo que la componente de la fuerza en la dirección horizontal es cero. Se sigue entonces, que la componente horizontal de la velocidad del centro de masas es constante.

EJEMPLO 8.4 | Cambio de plazas en un bote

Pete (masa 80 kg) y Dave (masa 120 kg) se encuentran en un bote de remos (masa 60 kg). Dave está en el centro del bote, remando, y Pete en un extremo a 2 m del centro. Dave se cansa de remar y una vez que el bote se detiene, intercambia sus puesto con Pete. ¿Qué distancia se ha movido el bote al intercambiarse las dos personas? (Despreciar cualquier fuerza horizontal ejercida por el agua.)

Planteamiento del problema Sea el sistema Pete, Dave y el bote. Como no hay fuerzas externas en dirección horizontal, el centro de masas no se mueve horizontalmente respecto un sistema de referencia inercial como el agua. Sin embargo, en relación al bote, el centro de masas sí se mueve. Encontrar primero el desplazamiento Δx_{cm} que se mueve el centro de masas respecto al bote. Respecto al agua el bote tiene que moverse la misma distancia Δx_{cm} en dirección contraria. Este hecho determina la distancia que el bote debe moverse.

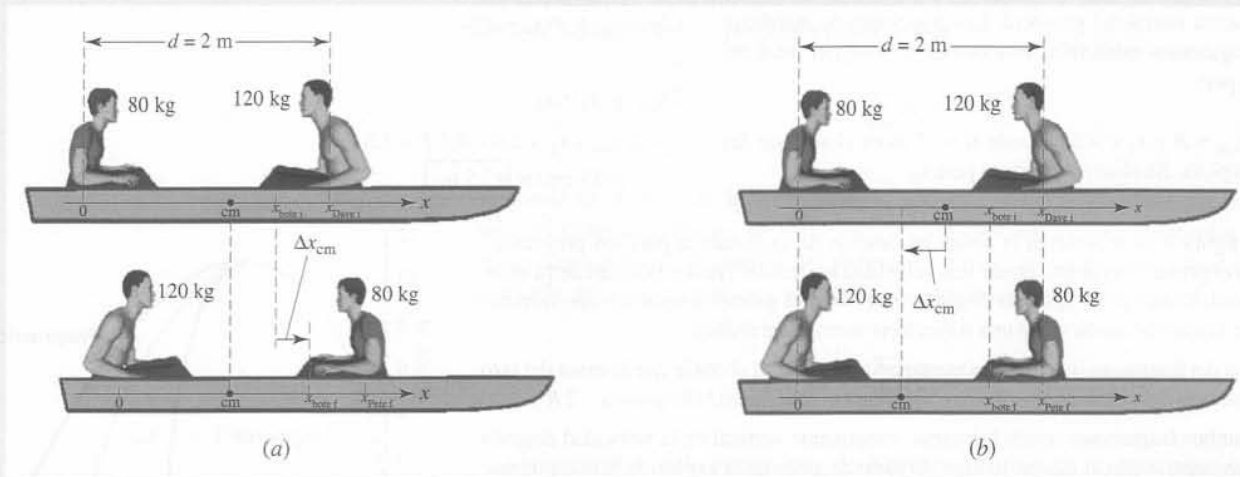


Figura 8.18

1. Dibujar un diagrama del sistema en sus configuraciones inicial y final (figura 8.18). Elegir el origen en la parte trasera del bote (la posición inicial de Pete) y sea $d = 2 \text{ m}$ de tal forma que $x_{\text{Pete } i} = 0$ y $x_{\text{Dave } i} = d$. Sea x_{bote} la posición del centro de masas del bote. Los remeros simplemente intercambian posiciones.
2. Escribir el producto de la masa total M por la posición inicial del centro de masas. Repetir esta operación para el valor de la posición final del centro de masas.
3. Determinar el desplazamiento del centro de masas relativo al bote, restando el primer resultado del paso 2 del segundo:
4. Como el centro de masa no se mueve con respecto al agua, el bote debe moverse una distancia igual en la dirección opuesta:

$$\begin{aligned}
 Mx_{\text{cm } i} &= m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete } i} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave } i} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote } i} \\
 &= 0 + m_{\text{Dave}}d + m_{\text{bote}}x_{\text{bote}} \\
 Mx_{\text{cm } f} &= m_{\text{Pete}}x_{\text{Pete } f} + m_{\text{Dave}}x_{\text{Dave } f} + m_{\text{bote}}x_{\text{bote } f} \\
 &= m_{\text{Pete}}d + 0 + m_{\text{bote}}x_{\text{bote}} \\
 Mx_{\text{cm } f} - Mx_{\text{cm } i} &= (m_{\text{Pete}} - m_{\text{Dave}})d + 0 \\
 \text{por lo que} \\
 x_{\text{cm } f} - x_{\text{cm } i} &= \frac{(m_{\text{Pete}} - m_{\text{Dave}})d}{M} \\
 -(x_{\text{cm } f} - x_{\text{cm } i}) &= \frac{(m_{\text{Dave}} - m_{\text{Pete}})d}{M} \\
 &= \frac{(120 \text{ kg} - 80 \text{ kg})}{120 \text{ kg} + 80 \text{ kg} + 60 \text{ kg}} (2 \text{ m}) \\
 &= \boxed{0,308 \text{ m}}
 \end{aligned}$$

Observación La localización del centro de masas respecto al bote desaparece en el paso 3. El desplazamiento del bote es independiente de su localización.

EJEMPLO 8.5 | Deslizamiento de un bloque

Una cuña de masa m_2 se encuentra en reposo sobre una balanza como indica la figura 8.19. Un bloque pequeño de masa m_1 se desliza por el plano inclinado sin rozamiento de la cuña. Determinar la lectura de la balanza mientras el bloque se desliza.

Planteamiento del problema La cuña y el bloque constituyen nuestro sistema. Como el bloque acelera hacia abajo por la cuña, el centro de masas posee componentes de aceleración hacia la derecha y hacia abajo. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son los pesos del bloque y la cuña, la fuerza F_x ejercida por la balanza sobre la cuña y la fuerza normal F_n ejercida hacia arriba por la balanza. La lectura de la balanza es igual al módulo de F_n .

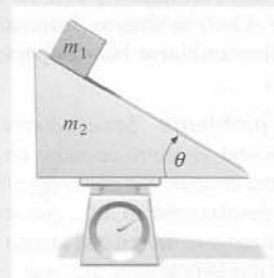


Figura 8.19

1. Dibujar un diagrama de fuerzas para el sistema cuña-bloque (figura 8.20):

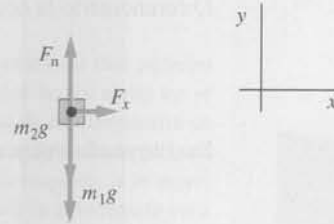


Figura 8.20

2. Expresar la componente vertical de la segunda ley de Newton para el sistema y despejar F_n :
3. Usando la ecuación 8.9, expresar $a_{cm,y}$ en función de la aceleración del bloque a_{1y} :
4. En el ejemplo 4.8 vimos que un bloque que se desliza hacia abajo por un plano inclinado estacionario posee la aceleración $g \text{ sen } \theta$. Determinar la componente y de esta aceleración usando trigonometría y utilizarla para determinar $a_{cm,y}$:
5. Sustituir $a_{cm,y}$ por el valor obtenido en el paso 2 y calcular F_n :

$$F_n - m_1g - m_2g = Ma_{cm,y} = (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$Ma_{cm,y} = m_1a_{1y} + m_2a_{2y} = m_1a_{1y}$$

$$a_{cm,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1y}$$

$$a_{1y} = -a_1 \text{ sen } \theta = -g \text{ sen}^2 \theta$$

por lo tanto

$$a_{cm,y} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} a_{1y}$$

$$= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} g \text{ sen}^2 \theta$$

$$F_n = (m_1 + m_2)g + (m_1 + m_2) a_{cm,y}$$

$$= (m_1 + m_2)g - m_1g \text{ sen}^2 \theta = [(1 - \text{sen}^2 \theta)m_1 + m_2]g$$

$$= \boxed{(m_1 \cos^2 \theta + m_2)g}$$

Ejercicio ¿Qué valores de F_n se pueden deducir, intuitivamente, si $\theta = 0$ o si $\theta = 90^\circ$? Demstrar que $(m_1 \cos^2 \theta + m_2)g$ da estos valores esperados. (Respuesta Para $\theta = 0$ esperamos $F_n = (m_1 + m_2)g$; para $\theta = 90^\circ$, $F_n = m_2g$).

Ejercicio Determinar la fuerza F_x ejercida sobre la cuña por la balanza. (Respuesta $F_x = m_1g \text{ sen } \theta \cos \theta$.)

8.4 Conservación del momento lineal

El **momento lineal**, **ímpetu** o **cantidad de movimiento** \mathbf{p} de una partícula se define como el producto de su masa por la velocidad:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (8.12)$$

DEFINICIÓN —MOMENTO LINEAL DE UNA PARTÍCULA

El momento lineal es una magnitud vectorial. Puede considerarse como una medida de la dificultad de llevar la partícula hasta el reposo. Por ejemplo, un camión pesado tiene mayor momento lineal que un automóvil ligero que se mueve con igual velocidad. Es necesaria una fuerza mayor para detener el camión en un tiempo determinado que para detener el automóvil en el mismo tiempo. (La magnitud $m\mathbf{v}$ se designa como *momento lineal* de una partícula para distinguirlo del *momento angular*, que se trata en el capítulo 10. Cuando no hace falta clarificar que el momento se refiere al momento lineal, el adjetivo *lineal* se omite y nos referimos simplemente al *momento*. En el resto de este capítulo se usa el vocablo *momento* para referirnos al momento lineal.)

La segunda ley de Newton puede escribirse en función del momento de una partícula. Diferenciando la ecuación 8.12 se obtiene

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

Sustituyendo $m\mathbf{a}$ por la fuerza \mathbf{F}_{neta} , resulta

$$\mathbf{F}_{\text{neta}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (8.13)$$

Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la derivada respecto al tiempo del momento de la partícula. En realidad el enunciado original de Newton sobre la segunda ley tenía esta forma.

El momento total \mathbf{P}_{sist} de un sistema de muchas partículas es la suma de los momentos de las partículas individuales:

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{p}_i$$

De acuerdo con la ecuación 8.8, $\sum m_i \mathbf{v}_i$ es igual a la masa total M multiplicada por la velocidad del centro de masas:

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.14)$$

MOMENTO TOTAL DE UN SISTEMA

Derivando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = M \mathbf{a}_{\text{cm}}$$

pero de acuerdo con la segunda ley de Newton (ecuación 8.11), $M\mathbf{a}_{\text{cm}}$ es igual a la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema. Por lo tanto,

$$\sum_i \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{neta,ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} \quad (8.15)$$

Cuando la fuerza externa resultante que actúa sobre un sistema de partículas es cero, la derivada del momento lineal total es también cero, y el momento lineal total del sistema permanece constante:

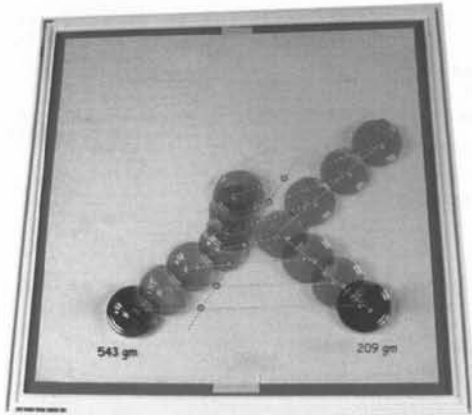
$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_{\text{cm}} = \text{constante} \quad (\mathbf{F}_{\text{neta,ext}} = 0) \quad (8.16)$$

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO

Este resultado se conoce con el nombre de **ley de conservación del momento**:

Si la fuerza externa resultante sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema permanece constante.

Esta ley es una de las más importantes de la física. Es, en general, más aplicable que la ley de conservación de la energía mecánica debido a que las fuerzas internas ejercidas por una partícula del sistema sobre otra son frecuentemente no conservativas. Así pues, estas fuerzas internas pueden hacer variar la energía mecánica total del sistema, pero no pueden modificar la cantidad de movimiento total del sistema. Si el momento lineal total de un sistema es constante, la velocidad vectorial del centro de masas del sistema también es constante.



Dos discos se mueven en un colchón de aire sobre una superficie horizontal. (En la fotografía no se ven los pequeños agujeros por los que sale el aire.) La colisión hace cambiar el módulo y la dirección de la velocidad de cada disco, pero la velocidad del centro de masas sigue constante, sin que le afecten las fuerzas internas de la colisión.

EJEMPLO 8.6 | Mantenimiento espacial

Durante la reparación del telescopio espacial Hubble, una astronauta reemplaza dos paneles solares cuyos marcos se han curvado. Al empujar los paneles deteriorados hacia atrás en el espacio exterior, ella experimenta un impulso en sentido opuesto. La masa de la astronauta es 60 kg y la del panel 80 kg. La astronauta está inicialmente en reposo relativo respecto a su vehículo espacial y después empuja el panel con una velocidad de 0,3 m/s respecto a la nave. ¿Cuál es su velocidad posterior respecto a la nave? (Durante esta operación la astronauta está sujeta con una cuerda a la nave espacial; para nuestro cálculo, suponer que la cuerda permanece floja.)

Planteamiento del problema La velocidad de la astronauta puede determinarse a partir de la velocidad del panel mediante la ley de conservación del momento lineal. Elegir como dirección positiva la del movimiento del panel.

1. Aplicar la conservación del momento para determinar la velocidad de la astronauta. Como el momento inicial total es cero, continuará siendo cero durante el proceso:

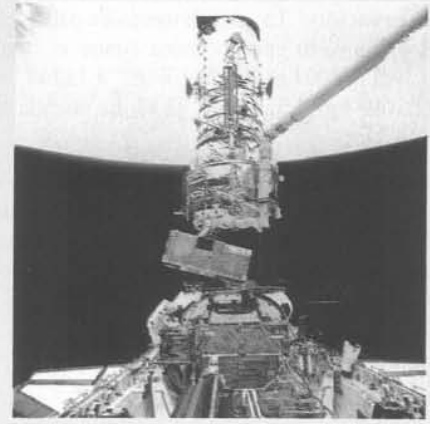
$$p_p + p_a = m_p v_p + m_a v_a = 0$$

2. Despejar la velocidad de la astronauta:

$$v_a = -\frac{m_p}{m_a} v_p = \frac{80 \text{ kg}}{60 \text{ kg}} (0,3 \text{ m/s}) = \boxed{-0,4 \text{ m/s}}$$

Observación Aunque el momento se conserva, la energía mecánica de este sistema se incrementa, ya que al realizar un esfuerzo, la energía química de la astronauta se convierte en energía cinética.

Ejercicio Determinar la energía cinética final del sistema astronauta-panel. (Respuesta 8,4 J.)



EJEMPLO 8.7 | El vagón incontrolado

Un vagón de ferrocarril incontrolado de masa 14 000 kg se desplaza a 4 m/s hacia un cambio de agujas. Al pasar cerca de un almacén de grano, 2000 kg de grano caen súbitamente sobre el vagón. ¿Cuánto tiempo tardará el vagón en cubrir la distancia de 500 m que hay desde el almacén hasta el cambio de agujas? Suponer que el grano cae verticalmente y que la desaceleración debida al rozamiento por rodadura y a la resistencia del aire es despreciable.

Planteamiento del problema Determinamos el tiempo de recorrido a partir de la distancia al cambio de agujas y la velocidad del vagón. Consideramos como sistema el vagón y el grano caído en el mismo (figura 8.21). Como no actúan fuerzas externas horizontales sobre el sistema, la componente horizontal del momento lineal del sistema se conserva. La velocidad final del vagón lleno de grano puede determinarse a partir de su momento final, el cual es igual al momento inicial del vagón. (El grano inicialmente carece de momento lineal horizontal.) Sean m_v y m_g las masas del vagón y del grano respectivamente.

1. El tiempo transcurrido desde el almacén hasta el cambio de agujas a la distancia d recorrida dividida por la velocidad v_f del vagón después de que haya caído el grano:
2. Aplicar el principio de conservación del momento para relacionar la velocidad final v_f con la velocidad inicial v_i . ¡Cuidado! Sólo se conserva la componente horizontal del momento del sistema:

$$\Delta t = \frac{d}{v_f}$$

$$(m_v + m_g) v_f = m_v v_i + m_g (0)$$

3. Despejar v_f :

$$v_f = \frac{m_v v_i}{m_v + m_g}$$

4. Aplicar el valor de v_f del paso 1 y despejar el tiempo:

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{d}{v_f} = \frac{(m_v + m_g)d}{m_v v_i} \\ &= \frac{(14\,000 \text{ kg} + 2\,000 \text{ kg})(500 \text{ m})}{(14\,000 \text{ kg})(4 \text{ m/s})} \\ &= \boxed{143 \text{ s}} \end{aligned}$$

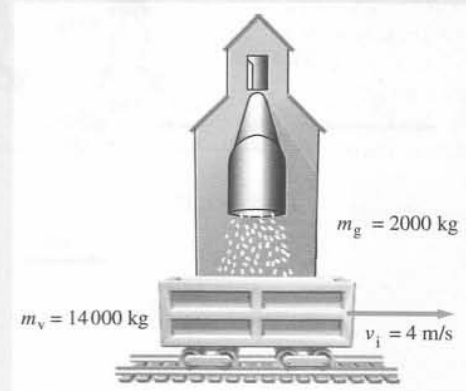


Figura 8.21

Observación La energía mecánica del sistema se convierte en calor. Sea E_{c_g} la energía cinética del grano justo cuando choca contra el vagón. La energía mecánica inicial es $E_{c_g} + \frac{1}{2}m_v v_i^2 = E_{c_g} + \frac{1}{2}(14\,000\text{ kg})(4\text{ m/s})^2 = E_{c_g} + 112\text{ kJ}$, mientras que la energía final es $\frac{1}{2}(m_v + m_g) v_f^2 = \frac{1}{2}(16\,000\text{ kg})(3,5\text{ m/s})^2 = 98\text{ kJ}$. La energía cinética final es inferior a la energía cinética inicial en 14 kJ.

Ejercicio Supongamos que hay un pequeño agujero en el fondo del vagón, de modo que el grano se escapa por el mismo a razón de 10 kg/s. ¿Cuánto tiempo tarda ahora el vagón en cubrir los 500 m? (Respuesta 143 s. El grano que escapa no imparte momento lineal alguno al resto del sistema. Si el suelo careciese de rozamiento y fuera plano, todo el grano inicialmente en el vagón llegaría al cambio de agujas al mismo tiempo que el vagón.)

EJEMPLO 8.8 | Los ejercicios de la patinadora

Una patinadora de 40 kg está entrenándose con dos pesas de 5 kg sobre una tabla de 3 kg. Partiendo del reposo, lanza los pesos horizontalmente uno tras otro desde su tabla. Después de su lanzamiento, la velocidad de cada peso es de 7 m/s relativa a la patinadora y su tabla. ¿Con qué velocidad es impulsada la patinadora en dirección opuesta después de lanzar (a) el primer peso? (b) ¿el segundo peso? Suponer que la tabla se mueve sin rozamiento.

Planteamiento del problema Ninguna fuerza externa horizontal actúa sobre el sistema patinadora-pesos-tabla, de modo que la componente horizontal del momento lineal se conserva. Necesitamos determinar la velocidad de la patinadora después del lanzamiento de cada peso (figura 8.22).

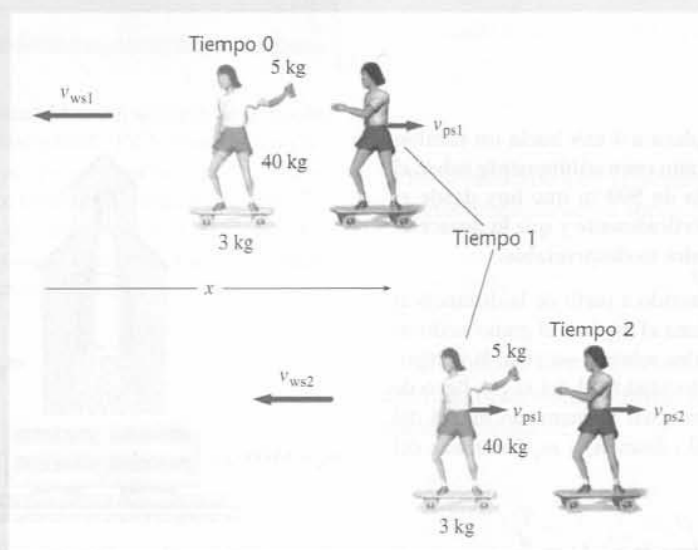


Figura 8.22

- (a) 1. Cada peso tiene una masa de 5 kg (m) y la plancha y la patinadora tienen una masa de 43 kg (M). Elija la dirección del movimiento de la patinadora como la dirección positiva. Entonces $v_{wp} = -7\text{ m/s}$ es la velocidad de uno de los pesos lanzados respecto a la patinadora. Sean v_{ps1} y v_{ws1} las velocidades respectivas de la patinadora y del primer peso lanzado relativas al suelo. Aplicar la conservación del momento después del lanzamiento del primer peso.
2. La velocidad del peso lanzado relativo al suelo es la velocidad del peso relativa a la plancha más la velocidad de la plancha relativa al suelo:

$$P_{\text{sist}1} = P_{\text{sist}0}$$

$$(M + m)v_{ps1} + mv_{ws1} = 0$$

(Los subíndices indican el tiempo. El tiempo 0 corresponde a un instante anterior al lanzamiento del primer peso, el tiempo 1 corresponde a un instante de tiempo comprendido entre el primer y el segundo lanzamiento, y el subíndice 2 indica que la patinadora ya ha lanzado los dos pesos.)

$$v_{ws1} = v_{wp1} + v_{ps1}$$

3. Sustituyendo v_{ws1} por el resultado del paso 1 se obtiene v_{ps1} :

$$(M + m)V_{ps1} + m(v_{wp1} + V_{ps1}) = 0$$

por lo tanto

$$V_{ps1} = -\frac{m}{M + 2m}v_{wp1} = -\frac{5 \text{ kg}}{43 \text{ kg} + 10 \text{ kg}}(-7 \text{ m/s})$$

$$= \boxed{0,66 \text{ m/s}}$$

(b) 1. Se repite el paso 1 del apartado (a) para el lanzamiento del segundo bloque. Sean v_{ps2} y $v_{w's2}$ las velocidades respectivas de la patinadora y del segundo peso lanzado relativas al suelo.

$$P_{sist2} = P_{sist1}$$

$$MV_{ps2} + mv_{w's2} = (M + m)V_{ps1}$$

2. Se repite el paso 2 del apartado (a) para el lanzamiento del segundo peso.

$$v_{w's2} = v_{w'p2} + V_{ps2}$$

3. Sustituyendo en $v_{w'g2}$ el resultado del paso 1 del apartado (b) se obtiene v_{ps2} :

$$MV_{ps2} + m(v_{w'p2} + V_{ps2}) = (M + m)V_{ps1}$$

por lo tanto

$$V_{ps2} = \frac{(M + m)V_{ps1} - mv_{w'p2}}{M + m} = V_{ps1} - \frac{m}{M + m}v_{w'p2}$$

$$= 0,66 \text{ m/s} - \frac{5 \text{ kg}}{48 \text{ kg}}(-7 \text{ m/s}) = \boxed{1,39 \text{ m/s}}$$

Observación Este ejemplo ilustra el principio del cohete; un cohete se mueve hacia delante lanzando combustible hacia atrás en forma de gases de escape.

Ejercicio ¿A qué velocidad se mueve la patinadora si, partiendo del reposo, lanza los dos pesos a la vez, de tal modo que *después de lanzados*, su velocidad respecto a la patinadora y su tabla es de 7 m/s? (Respuesta 1,32 m/s.)

EJEMPLO 8.9 | Desintegración radiactiva

Un núcleo de torio 227 en reposo se desintegra en un núcleo de radio 223 (masa 223 u) por emisión de una partícula α (masa 4 u) (figura 8.23). La energía cinética de la partícula α resulta ser de 6,00 MeV. ¿Cuál es la energía cinética del núcleo de radio en retroceso?

Planteamiento del problema Como el núcleo de torio antes de la desintegración está en reposo, su momento lineal total es cero. Podemos relacionar la velocidad del núcleo de radio con el de la partícula alfa a partir del principio de conservación del momento lineal.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos

1. Expresar la energía cinética del núcleo de radio $E_{c_{Ra}}$ en función de su masa m_{Ra} y su velocidad v_{Ra} .
2. Expresar la energía cinética de la partícula α $E_{c_{\alpha}}$ en función de su masa m_{α} y su velocidad v_{α} .
3. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar v_{Ra} con v_{α} .
4. Despejar las velocidades v_{Ra} y v_{α} de los pasos 1 y 2 y sustituir sus expresiones en el resultado del paso 3.
5. Despejar $E_{c_{Ra}}$.

Respuestas

$$E_{c_{Ra}} = \frac{1}{2}m_{Ra}v_{Ra}^2$$

$$E_{c_{\alpha}} = \frac{1}{2}m_{\alpha}v_{\alpha}^2$$

$$m_{\alpha}v_{\alpha} = m_{Ra}v_{Ra}$$

$$m_{\alpha}\left(\frac{2E_{c_{\alpha}}}{m_{\alpha}}\right)^{1/2} = m_{Ra}\left(\frac{2E_{c_{Ra}}}{m_{Ra}}\right)^{1/2}$$

$$E_{c_{Ra}} = \frac{m_{\alpha}}{m_{Ra}}E_{c_{\alpha}} = \boxed{0,108 \text{ MeV}}$$

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

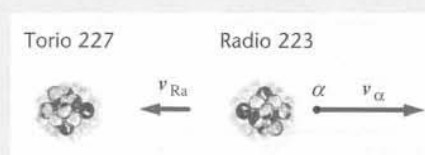


Figura 8.23

Observación En este proceso la energía en reposo del núcleo de torio se transforma en energía cinética de la partícula alfa y del núcleo de radio. La masa del núcleo de torio es mayor que la de la partícula alfa más la del núcleo de radio en unos $6,1 \text{ MeV}/c^2$.

8.5 Energía cinética de un sistema

Aunque el momento lineal total de un sistema de partículas debe ser constante si la fuerza externa resultante sobre el sistema es cero, la energía mecánica total del sistema puede variar. Como vimos en los ejemplos de la sección anterior las fuerzas internas, que no pueden alterar el momento lineal total, pueden ser fuerzas no conservativas y, por lo tanto, modificar la energía mecánica total del sistema. Existe un importante teorema que se refiere a la energía cinética de un sistema de partículas que nos permite tratar más fácilmente la energía de sistemas complejos, así como los cambios energéticos dentro de un sistema:

La energía cinética de un sistema de partículas puede escribirse como la suma de dos términos: (1) la energía cinética asociada con el movimiento del centro de masas, $\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$, en donde M es la masa total del sistema; y (2) la energía cinética asociada con el movimiento de las partículas del sistema respecto al centro de masas, $\sum \frac{1}{2}m_i u_i^2$, siendo \mathbf{u}_i la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas.

TEOREMA PARA LA ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA

La energía cinética de un sistema de partículas es la suma de las energías cinéticas de las partículas individuales:

$$E_c = \sum_i E_{c_i} = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

La velocidad de la partícula i puede escribirse como la suma de la velocidad del centro de masas \mathbf{v}_{cm} y la velocidad de la partícula relativa al centro de masas \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i \quad (8.17)$$

La energía cinética del sistema es, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_c &= \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2}m_i (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i) \cdot (\mathbf{v}_{\text{cm}} + \mathbf{u}_i) \\ &= \sum_i \frac{1}{2}m_i (v_{\text{cm}}^2 + 2\mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{u}_i + u_i^2) \\ &= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\text{cm}}^2 + \mathbf{v}_{\text{cm}} \cdot \sum_i m_i \mathbf{u}_i + \sum_i \frac{1}{2}m_i u_i^2 \end{aligned}$$

en donde en el sumando del medio hemos sacado factor común \mathbf{v}_{cm} , ya que es el mismo para todas las partículas, es decir, se refiere al sistema y no a una partícula específica. La magnitud $\sum m_i \mathbf{u}_i$ es el momento lineal del sistema *referido al centro de masas*. Esta magnitud, que es igual a $M\mathbf{u}_{\text{cm}}$ es necesariamente cero. (Con respecto al centro de masas, la velocidad del centro de masas \mathbf{u}_{cm} es cero de modo que el momento lineal total $M\mathbf{u}_{\text{cm}}$ es también cero.) Por lo tanto,

$$E_c = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{\text{cm}}^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i u_i^2 = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E_{c_{\text{rel}}} \quad (8.18)$$

ENERGÍA CINÉTICA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

en donde M es la masa total y $E_{c_{\text{rel}}}$ es la energía cinética de las partículas *relativa al centro de masas*. Cuando no hay fuerzas externas, \mathbf{v}_{cm} es constante y la energía cinética asociada con el movimiento global ($\frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$) no varía. Sólo la energía cinética relativa puede cambiar en un sistema aislado.

8.6 Colisiones

En una **colisión**, dos objetos se aproximan uno a otro e interaccionan fuertemente durante un tiempo muy corto. Durante el breve tiempo de colisión, cualquier fuerza externa es mucho menor que las fuerzas de interacción entre los objetos. Por ello, las únicas fuerzas importantes que actúan sobre el sistema formado por los dos objetos son las fuerzas de interacción, que son iguales y opuestas, de modo que el momento lineal total del sistema permanece invariable. El tiempo de colisión es normalmente tan pequeño que el desplazamiento de los objetos durante el choque puede despreciarse. Antes y después de la colisión, la interacción de los dos objetos es pequeña comparado con la interacción durante el choque. Son ejemplos el choque de las dos bolas de billar, el golpe del bate sobre una pelota de béisbol o un dardo al chocar contra el blanco. El movimiento de un cometa alrededor del Sol puede considerarse como una colisión, incluso teniendo en cuenta que los dos astros no se tocan físicamente. En el laboratorio de física se puede ver también una colisión entre dos carros que llevan parachoques magnéticos, sin que se produzca contacto físico entre ambos.

Cuando la energía cinética total de los dos objetos es la misma después del choque que antes, se dice que se trata de un **choque elástico**. Si la energía cinética total no es la misma después del choque, éste es un **choque inelástico**. Un caso extremo es el **choque perfectamente inelástico**, en el cual toda la energía cinética relativa al centro de masas se convierte en calor o energía interna del sistema y los dos objetos quedan unidos después de la colisión.

Impulso y fuerza media

En la figura 8.24 se muestra la variación con el tiempo del módulo de una fuerza típica ejercida por un cuerpo sobre otro durante un choque. Durante el tiempo de colisión, $\Delta t = t_f - t_i$, la fuerza es grande. El resto del tiempo, la fuerza es despreciablemente pequeña. El **impulso** \mathbf{I} de la fuerza es un vector definido por

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (8.19)$$

DEFINICIÓN —IMPULSO

El módulo del impulso de la fuerza es el área encerrada bajo su curva F en función de t . La unidad del impulso es $\text{N} \cdot \text{s}$. Si \mathbf{F}_{neta} es la fuerza neta que actúa sobre la partícula, su relación con la variación del momento de esta partícula viene expresada por la segunda ley de Newton, $\mathbf{F}_{\text{neta}} = d\mathbf{p}/dt$. Por lo tanto, el impulso de la fuerza neta es igual a la variación total del momento $\Delta\mathbf{p}$ durante el intervalo de tiempo de la colisión:

$$\mathbf{I}_{\text{neto}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neta}} dt = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \Delta\mathbf{p} \quad (8.20)$$

TEOREMA IMPULSO — MOMENTO PARA UNA PARTÍCULA

Asimismo, el impulso neto debido a fuerzas externas en un sistema se iguala con el cambio del momento total del sistema:

$$\mathbf{I}_{\text{neto,ext}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neto,ext}} dt = \Delta\mathbf{p}_{\text{sist}} \quad (8.21)$$

TEOREMA IMPULSO — MOMENTO PARA UN SISTEMA

La **fuerza media** durante el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$ viene definida por

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \quad (7.22)$$

DEFINICIÓN —FUERZA MEDIA

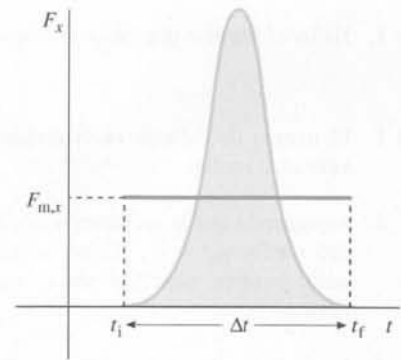


Figura 8.24 Variación típica de la fuerza de colisión con el tiempo. El área bajo la curva F_x en función de t es la componente x del impulso, I_x . $F_{m,x}$ es la fuerza media por intervalo de tiempo Δt . El área rectangular $F_{m,x} \Delta t$ es la misma que la encerrada bajo la curva de F_x en función de t .

La fuerza media es la fuerza constante que produce el mismo impulso que la fuerza real en el intervalo de tiempo Δt , como indica el rectángulo de la figura 8.24. La fuerza media puede calcularse a partir del cambio del momento si se conoce el tiempo de choque. Este tiempo puede estimarse a partir de la distancia recorrida por uno de los objetos durante la colisión.

EJEMPLO 8.10 | Una colisión en la práctica del kárate

Con un golpe experto de kárate, un karateca rompe un bloque de hormigón. Su puño tiene una masa de 0,70 kg, se mueve a 5,0 m/s al chocar contra el bloque y se detiene a 6 mm del punto de contacto. (a) ¿Qué impulso ejerce el bloque sobre el puño del karateca? (b) ¿Cuál es el tiempo de colisión aproximado y la fuerza media que el bloque ejerce sobre el puño?

Planteamiento del problema El impulso neto es igual a la variación del momento Δp . Esta variación puede determinarse a partir de la masa y velocidad del puño. El tiempo de colisión correspondiente al apartado (b) puede deducirse de la distancia dada $\Delta y = 6$ mm y de la velocidad media durante la colisión, que puede estimarse suponiendo una aceleración constante. Elegiremos como positiva la dirección hacia arriba (figura 8.25).



(a) 1. Expresar que el impulso es igual a la variación de la cantidad de movimiento:

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$$

2. El momento inicial es el que posee el puño antes de chocar contra el bloque con velocidad v , y el momento lineal final es cero:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= m\mathbf{v} = (0,7 \text{ kg})(-5,0 \text{ m/s}) \mathbf{j} \\ &= -3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p}_f = 0$$

3. Hallar el impulso que ejerce el bloque sobre el puño:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = 0 - (-3,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s} \mathbf{j}) \\ &= \boxed{3,5 \text{ N} \cdot \text{s} \mathbf{j}} \end{aligned}$$

(b) 1. El tiempo de colisión es la distancia recorrida dividida por la velocidad media:

$$\Delta t = \frac{\Delta y}{v_m}$$

2. Suponiendo que la aceleración es constante estimamos la velocidad media, $v_m = \frac{1}{2}v$. Como hemos elegido la dirección hacia arriba positiva, tanto Δy como v_m son magnitudes negativas. Calcular Δt :

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{\Delta y}{\frac{1}{2}v} = \frac{-0,006 \text{ m}}{-2,5 \text{ m/s}} = 0,0024 \text{ s} \\ &= 2,4 \text{ ms} \end{aligned}$$

3. La fuerza media es el impulso dividido por el tiempo de colisión. Está dirigida hacia arriba, como era de esperar:

$$\mathbf{F}_m = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} = \frac{3,5 \text{ N} \cdot \text{s} \mathbf{j}}{0,0024 \text{ s}} = \boxed{1,46 \text{ kN} \mathbf{j}}$$

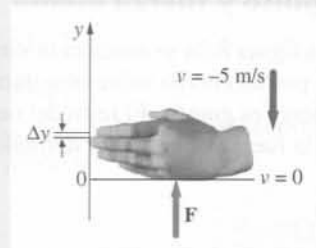


Figura 8.25

Observación La fuerza media es grande —aproximadamente 212 veces el peso del puño.

EJEMPLO 8.11 | Ensayo de un accidente

Un coche equipado con un maniquí de 80 kg para ensayos de accidentes (figura 8.26), choca contra un muro a 25 m/s. Estimar la fuerza que el cinturón de seguridad ejerce sobre el maniquí en el impacto.

Planteamiento del problema Suponer que el coche y el maniquí recorren aproximadamente 1 m al plegarse la parte delantera del coche, y que la aceleración es constante durante el choque. Para determinar la fuerza, calcularemos el impulso I y después lo dividiremos por el tiempo de colisión Δt . Elegir el eje x positivo en la dirección hacia adelante.

¡INTÉNTELO USTED MISMO!



Figura 8.26

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos

1. Relacionar la fuerza media con el impulso y, en consecuencia, con el cambio de momento.
2. Determinar el cambio del momento del maniquí.
3. Relacionar el tiempo con el desplazamiento, suponiendo que la aceleración es constante.
4. Determinar la velocidad media y usarla conjuntamente con el resultado del paso 3 para calcular el tiempo.
5. Sustituir los resultados de los pasos 2 y 4 en el resultado del paso 1 y determinar la fuerza.

Respuestas

$$F_m \Delta t = I = \Delta p, \quad \text{por lo tanto} \quad F_m = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$\Delta p = mv_f - mv_i = -2000 \text{ N} \cdot \text{s} \mathbf{i}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m}$$

$$v_m = \frac{1}{2}(v_f + v_i) = 12,5 \text{ m/s} \mathbf{i}, \quad \text{por lo tanto}$$

$$\Delta t = 0,08 \text{ s}$$

$$F_m = \boxed{-25 \text{ kN} \mathbf{i}}$$

Observación El módulo de la aceleración media es $a_m = \Delta v / \Delta t = 313 \text{ m/s}^2$, o sea aproximadamente 32 g. Tal aceleración representa una fuerza neta de unas 32 veces el peso del maniquí, suficiente para provocar daños serios. Una bolsa de aire ("air bag") incrementa la distancia de frenado, lo que ayuda a evitar daños. La bolsa de aire también permite que la fuerza se distribuya en un área mucho mayor.

Observación En la figura 8.27, el gráfico (a) muestra la fuerza media ejercida sobre el maniquí en función de la distancia de frenado x . Sin cinturón de seguridad o "air bag", el conductor "volaría" a través del parabrisas o sería detenido en una fracción de un metro por el salpicadero o el volante de dirección. El gráfico (b) muestra la fuerza en función de la velocidad inicial para tres distancias de frenado: 2 m, 1,5 m y 1 m.

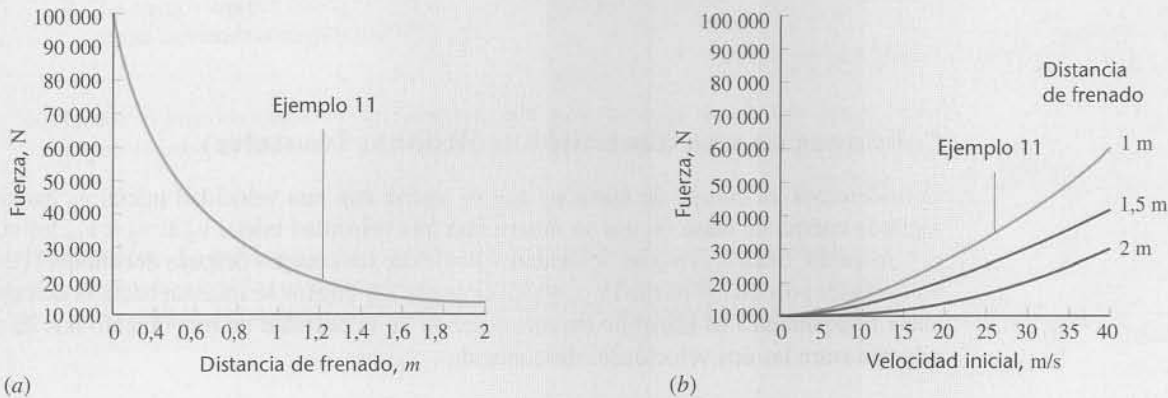


Figura 8.27

EJEMPLO 8.12 | Una pelota de golf

Una persona golpea una pelota con un palo de golf. Estimar (a) el impulso I , (b) el tiempo de colisión Δt y (c) la fuerza media F_m ? Considerar que la masa de una pelota de golf típica es $m = 45 \text{ g}$ y su radio $r = 2 \text{ cm}$. En un recorrido típico, el alcance R es de unos 192 m (figura 8.28).

Planteamiento del problema Sea v_0 el módulo de la velocidad de la pelota cuando se separa del palo. El impulso es igual a la variación de su momento lineal o sea, mv_0 . Estimaremos la velocidad inicial v_0 a partir del alcance. Estimaremos el tiempo de colisión a partir de la distancia recorrida durante el choque Δx y la velocidad media $\frac{1}{2}v_0$, suponiendo constante la aceleración. Usaremos $\Delta x = 2 \text{ cm}$, que es el radio de la bola. La fuerza media se obtiene entonces a partir del impulso I y el tiempo de colisión Δt .

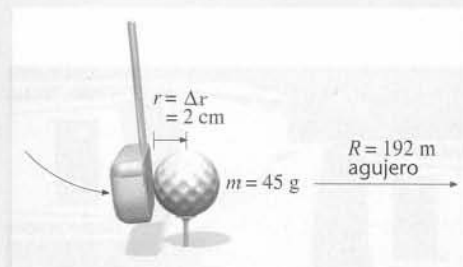


Figura 8.28

- (a) 1. Igualar el impulso con la variación del momento de la bola: $I = F_m \Delta t = \Delta p$
2. La velocidad inicial está relacionada con el alcance R , dado por la ecuación 2.23: $R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$
3. Considerar que $\theta_0 = 13^\circ$ y calcular la velocidad inicial: $v_0 = \sqrt{\frac{Rg}{\sin 2\theta_0}}$
 $= \sqrt{\frac{(192 \text{ m})(9,81 \text{ m/s}^2)}{\sin 26^\circ}} = 65,5 \text{ m/s}$
4. Utilizar este valor de v_0 para calcular el módulo del impulso: $I = \Delta p = m(v_0 - 0) = (0,045 \text{ kg})(65,5 \text{ m/s})$
 $= 2,95 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{2,95 \text{ N} \cdot \text{s}}$
- (b) Calcular el tiempo de colisión Δt utilizando $x = 2 \text{ cm}$ y $v_m = \frac{1}{2}(v_f - v_i)$: $\Delta t = \frac{\Delta x}{v_m} = \frac{\Delta x}{\frac{1}{2}v_0}$
 $= \frac{0,02 \text{ m}}{\frac{1}{2}(65,5 \text{ m/s})} = \boxed{0,610 \times 10^{-3} \text{ s}}$
- (c) Mediante los valores calculados de I y Δt determinar el módulo de la fuerza media: $F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{2,95 \text{ N} \cdot \text{s}}{6,10 \times 10^{-4} \text{ s}} = \boxed{4,83 \text{ kN}}$

Observación De nuevo nos encontramos con que las fuerzas ejercidas durante un choque son muy grandes. Aquí la fuerza ejercida sobre la pelota de golf por el palo es aproximadamente 10 000 veces el peso de la pelota, a la que impulsa en una breve aceleración de 10 000g en 0,61 ms. Asimismo, la fuerza de resistencia del aire no se ha tenido en cuenta en el análisis. En un tiro de golf real la resistencia del aire no es despreciable.

Colisiones en una dimensión (colisiones frontales)

Consideremos un cuerpo de masa m_1 que se mueve con una velocidad inicial v_{1i} hacia un segundo cuerpo de masa m_2 que se mueve con una velocidad inicial v_{2i} si $v_{2i} < v_{1i}$, los cuerpos chocarán. Sean v_{1f} y v_{2f} las velocidades finales de los cuerpos después del choque. (Estas velocidades pueden ser positivas o negativas según los objetos se muevan hacia la derecha o hacia la izquierda.) El principio de conservación de la cantidad de movimiento nos da una relación entre las dos velocidades desconocidas, v_{1f} y v_{2f} :

$$m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad (8.23)$$

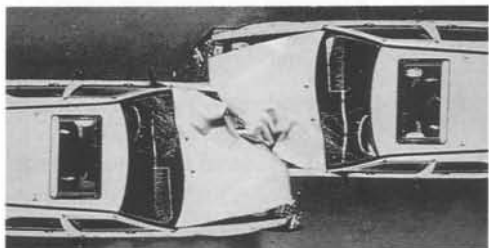
Para calcular v_{1f} y v_{2f} es necesaria una segunda ecuación. Esta segunda ecuación, que ahora desarrollaremos, depende del tipo de colisión.

Colisión perfectamente inelástica en una dimensión En las colisiones perfectamente inelásticas, las partículas quedan unidas después de la colisión. Por ejemplo, la colisión entre el guante de un jugador de béisbol y la pelota es perfectamente inelástica, siempre que el jugador no deje caer esta última. La segunda ecuación entre las velocidades finales es tal que éstas son iguales entre sí e iguales a la velocidad del centro de masas:

$$v_{1f} = v_{2f} = v_{\text{cm}}$$

Este resultado combinado con la conservación del momento nos da

$$(m_1 + m_2)v_{\text{cm}} = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \quad (8.24)$$



Colisión perfectamente inelástica entre dos coches.

EJEMPLO 8.13 | La caza de un libro de física durante un paseo espacial

Una astronauta de masa 60 kg da un paseo espacial para reparar un satélite de comunicaciones. De pronto necesita consultar su libro de física. Un compañero de equipo se lo lanza con una velocidad de 4 m/s relativa al vehículo espacial. Ella se encuentra en reposo relativo respecto al vehículo espacial justo antes de atrapar el libro, de masa 3,0 kg (figura 8.29). Determinar (a) la velocidad de la astronauta justo después de atrapar el libro, (b) la energía mecánica inicial y final del sistema libro-astronauta y (c) el impulso ejercido por el libro sobre la astronauta.

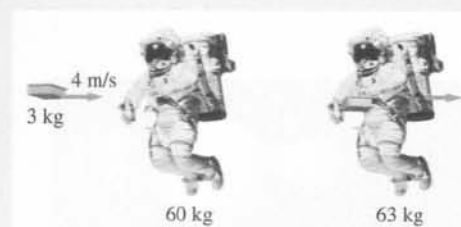


Figura 8.29

Planteamiento del problema (a) La velocidad final del libro y la astronauta es la velocidad del centro de masas. Para su cálculo utilizamos la conservación del momento lineal, expresada por la ecuación 8.24. Las energías cinéticas inicial y final se calculan a partir de las velocidades inicial y final. Como el libro y la astronauta se mueven con la misma velocidad final, la colisión es perfectamente inelástica. (b) Las energías mecánicas del libro y la astronauta se calculan directamente a partir de sus masas y velocidades. (c) El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual al cambio de momento lineal de la astronauta.

- (a) 1. Utilizar la conservación del momento lineal para relacionar la velocidad final del sistema, v_{cm} , con las velocidades iniciales:

$$m_1 v_1 + m_a v_a = (m_1 + m_a) v_{cm}$$

2. Despejar v_{cm} :

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{m_1 v_1 + m_a v_a}{m_1 + m_a} \\ &= \frac{(3,0 \text{ kg})(4 \text{ m/s}) + 0}{60 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = \boxed{0,19 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

- (b) 1. La energía mecánica inicial del sistema libro-astronauta es la energía cinética del libro:

$$\begin{aligned} E_{c_i} &= E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2} (3,0 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 = \boxed{24 \text{ J}} \end{aligned}$$

2. La energía cinética final es la energía cinética del libro y la astronauta moviéndose conjuntamente a v_{cm} :

$$\begin{aligned} E_{c_f} &= \frac{1}{2} (m_1 + m_a) v_{cm}^2 \\ &= \frac{1}{2} (63 \text{ kg})(0,19 \text{ m/s})^2 = \boxed{1,14 \text{ J}} \end{aligned}$$

- (c) Igualar el impulso ejercido sobre la astronauta con la variación del momento lineal de la misma:

$$\begin{aligned} I &= \Delta p_a = m_a \Delta v_a \\ &= (60 \text{ kg})(0,19 \text{ m/s} - 0) \\ &= 11,4 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = \boxed{11,4 \text{ N} \cdot \text{s}} \end{aligned}$$

Observación La mayor parte de la energía cinética inicial de este proceso se pierde en forma de calor. El impulso ejercido por el libro sobre la astronauta es igual y opuesto al ejercido por la astronauta sobre el libro, de tal modo que la variación total del momento lineal es cero.

Con frecuencia es útil expresar la energía cinética E_c de una partícula en función de su momento lineal p . Para una masa m que se mueve con velocidad v , tenemos

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{(m v)^2}{2m}$$

Como $p = m v$,

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (8.25)$$

Esta expresión puede aplicarse a un choque perfectamente inelástico cuando un objeto está inicialmente en reposo. El momento lineal del sistema es el del objeto incidente:

$$P_{\text{sist}} = p_{\text{li}} = m_1 v_{\text{li}}$$

La energía cinética inicial es

$$E_{c_i} = \frac{P_{\text{sist}}^2}{2m_1} \quad (8.26)$$

Después del choque, los objetos se mueven unidos como una sola masa $m_1 + m_2$ con velocidad v_{cm} . El momento lineal se conserva, de modo que el momento lineal final es igual a P_{sist} . La energía cinética final es, Por lo tanto,

$$E_{cf} = \frac{P_{sist}^2}{2(m_1 + m_2)} \quad (8.27)$$

Comparando las ecuaciones 8.26 y 8.27, vemos que la energía cinética final es menor que la inicial.

EJEMPLO 8.14 | El péndulo balístico

En una prueba pública de puntería, una persona dispara una bala sobre un bloque de madera suspendido. El bloque, con el proyectil en su seno, oscila como un péndulo hacia arriba. A partir de la altura alcanzada por este péndulo, se informa inmediatamente al público de la velocidad de la bala. ¿A qué velocidad iba la bala?

Planteamiento del problema La velocidad inicial de la bala v_{1i} está relacionada con la velocidad del sistema bala-bloque, v_f , justo después del choque inelástico, por la conservación del momento lineal. La velocidad v_f está relacionada con la altura h por la conservación de la energía mecánica (figura 8.30). Sea m_1 la masa de la bala y m_2 la masa del blanco.

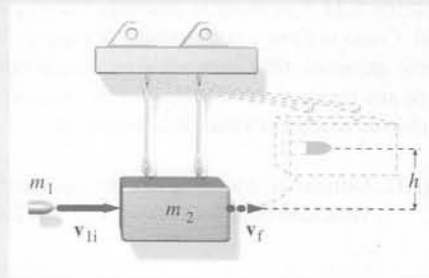


Figura 8.30

1. Utilizar la conservación de la energía mecánica *después* del choque para determinar v_f en función de la altura máxima h :

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 = (m_1 + m_2)gh$$
2. Utilizar la conservación del momento lineal *durante* el choque para determinar v_{1i} en función de v_f :

$$m_1v_{1i} = (m_1 + m_2)v_f$$
3. Despejar v_f de la ecuación del paso 1 y sustituirla en el resultado del paso 2 para determinar v_{1i} :

$$v_f = \sqrt{2gh}$$

por lo tanto

$$v_{1i} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}v_f = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2gh}$$

Observación Hemos supuesto que el tiempo de colisión es tan corto que el desplazamiento del bloque durante el choque es despreciable. Esto quiere decir que el bloque adquiere velocidad inmediatamente después de la colisión, cuando aún está en el punto más bajo del arco. El dispositivo descrito en este ejemplo se denomina *péndulo balístico*.

Ejercicio Si la masa de la bala es 12 g, la masa del bloque del péndulo balístico es 2 kg, y la altura final 10,4 cm, ¿qué velocidad tenía la bala? (Respuesta 240 m/s.)

Ejercicio ¿Puede resolverse este ejemplo igualando la energía cinética inicial de la bala con la energía potencial del sistema compuesto bloque-bala, en su altura máxima? Es decir, ¿se conserva la energía mecánica tanto durante la colisión inelástica como durante el ascenso del péndulo? (Respuesta No)

Ejercicio Un coche de 2000 kg a 25 m/s choca frontalmente con otro de 1500 kg inicialmente en reposo. Si la colisión es perfectamente inelástica, determinar (a) la velocidad de cada coche después de la colisión y (b) la relación entre las energías cinéticas final e inicial del sistema. (Respuestas (a) 14,3 m/s, (b) 0,57.)

EJEMPLO 8.15 | Colisión con una caja vacía

Repetir el ejemplo 8.14 utilizando una caja vacía como blanco. La bala choca contra el blanco y la atraviesa completamente. Un dispositivo láser indica que la bala emerge con una velocidad igual a la mitad del valor inicial. Con estos datos es posible deducir la altura alcanzada por el blanco. ¿Cuánto vale esta altura?

Planteamiento del problema La altura h está relacionada con la velocidad de la caja después del choque, v_2 , por el principio de conservación de la energía mecánica (figura 8.31). Esta velocidad puede determinarse mediante el principio de conservación del momento lineal.

¡INTÉNELO USTED MISMO!

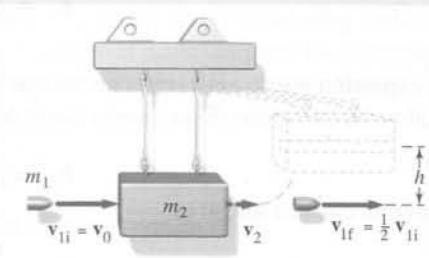


Figura 8.31

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos

1. Mediante la conservación de la energía mecánica relacionar la altura final h con la velocidad v_2 de la caja después de la colisión.
2. Mediante la conservación del momento expresar una ecuación que relacione v_1 con la velocidad post-colisión v_2 .
3. Eliminar v_2 y despejar h .

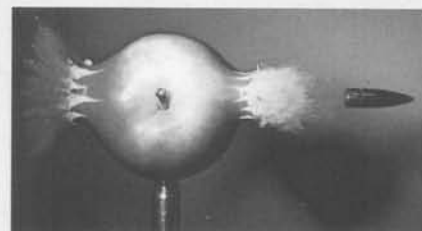
Respuestas

$$m_2gh = \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_2v_2 + m_1\left(\frac{1}{2}v_0\right) = m_1v_0$$

$$h = \frac{m_1^2v_0^2}{8m_2^2g}$$

Observación El choque entre la bala y la caja es un choque inelástico, pero no un choque perfectamente inelástico porque después de la colisión los dos objetos no van a la misma velocidad vectorial. Las colisiones inelásticas también ocurren en sistemas microscópicos. Por ejemplo, cuando un electrón choca contra un átomo, a veces éste se excita pasando a un estado energético interno más elevado. En consecuencia, la energía cinética total del átomo y el electrón es menor después de la colisión.



Una bala a 850 m/s choca inelásticamente con una manzana, la cual instantes más tarde se desintegra completamente. El tiempo de exposición es menor que una millonésima de segundo.

Colisiones elásticas en una dimensión En las **colisiones elásticas**, las energías cinéticas inicial y final son iguales. En el mundo macroscópico las colisiones elásticas son un ideal al cual la realidad puede aproximarse, pero nunca pueden llegar a darse. Si una pelota cae sobre una superficie de cemento y rebota hasta su altura inicial, la colisión entre la bola y el cemento es elástica. Pero esto no se ha observado nunca. A escala microscópica las colisiones elásticas son más comunes. Por ejemplo, las colisiones entre las moléculas de aire son siempre elásticas. En todas las colisiones elásticas tenemos:

$$\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 \quad (8.28)$$

Esta ecuación, junto con la correspondiente a la conservación del momento lineal (ecuación 8.23), es suficiente para determinar las velocidades finales de los dos objetos. Sin embargo, la naturaleza cuadrática de la ecuación 8.28 complica frecuentemente la solución de un problema de colisión elástica. Tales problemas pueden tratarse más fácilmente si expresamos la velocidad relativa de las dos partículas después del choque en función de la velocidad relativa antes del choque. Reajustando la ecuación 8.28 se obtiene,

$$m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) = m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2)$$

o sea

$$m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) \quad (8.29)$$

De la conservación del momento lineal, sabemos que

$$m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}$$

de modo que

$$m_2(v_{2f} - v_{2i}) = m_1(v_{1i} - v_{1f}) \quad (8.30)$$

Dividiendo ahora la ecuación 8.29 por la 8.30 resulta

$$v_{2f} + v_{2i} = v_{1i} + v_{1f}$$

de modo que

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (8.31)$$

Figura 8.32 Aproximación y retroceso en una colisión elástica en una dimensión.



Si los objetos van a chocar, $v_{2i} - v_{1i}$ debe ser negativo (figura 8.32) y su **velocidad de aproximación** es $-(v_{2i} - v_{1i})$. Después del choque, la **velocidad de retroceso** es $v_{2f} - v_{1f}$. (Estos dos términos indican el módulo de la velocidad de un objeto en relación al otro.) La ecuación 8.31 establece que

En las colisiones elásticas, el módulo de la velocidad de retroceso es igual a la velocidad de aproximación.

Normalmente la resolución de problemas de choque elástico es más simple utilizando la ecuación 8.31 en lugar de la 8.28. No obstante, debemos recordar que la ecuación 8.31 depende de la conservación de la energía y, por lo tanto, *sólo* puede aplicarse a las colisiones elásticas.

EJEMPLO 8.16 | Colisión elástica entre dos bloques

Un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha con una velocidad de 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que también se mueve hacia la derecha, pero cuya velocidad es de 3 m/s (figura 8.33). Calcular las velocidades finales v_{1f} y v_{2f} .

Planteamiento del problema La conservación del momento (ecuación 8.18) y la conservación de la energía (expresada como una inversión de las velocidades relativas, ecuación 8.24) ofrecen dos ecuaciones para las dos velocidades finales incógnitas. El subíndice 1 representa el bloque de 4 kg y el subíndice 2 el bloque de 2 kg.

1. Aplicar la conservación del momento y simplificar hasta encontrar una ecuación que relacione las dos velocidades finales:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} &= m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} \\ (4 \text{ kg})v_{1f} + (2 \text{ kg})v_{2f} &= (4 \text{ kg})(6 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \\ \text{por lo tanto} \\ 2v_{1f} + v_{2f} &= 15 \text{ m/s} \end{aligned}$$

2. La igualdad de las energías cinéticas inicial y final proporciona una segunda relación entre las dos velocidades finales. Esta igualdad se materializa igualando las velocidades de recesión y de aproximación:

$$\begin{aligned} v_{2f} - v_{1f} &= -(v_{2i} - v_{1i}) \\ &= -(3 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s}) = 3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

3. Restar el resultado del paso 2 del resultado del paso 1 y despejar v_{1f} :

$$\begin{aligned} 2v_{1f} + v_{1f} &= 12 \text{ m/s} \\ \text{por lo tanto} \\ v_{1f} &= \boxed{4 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

4. Sustituir en el resultado del paso 2 y despejar v_{2f} :

$$\begin{aligned} v_{2f} - 4 \text{ m/s} &= 3 \text{ m/s} \\ \text{de donde} \\ v_{2f} &= \boxed{7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Comprobar el resultado Como comprobación, calculemos las energías cinéticas inicial y final:

$$E_{ci} = \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(6 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 72 \text{ J} + 9 \text{ J} = 81 \text{ J};$$

$$E_{cf} = \frac{1}{2}(4 \text{ kg})(4 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(2 \text{ kg})(7 \text{ m/s})^2 = 32 \text{ J} + 49 \text{ J} = 81 \text{ J} = E_{ci}.$$

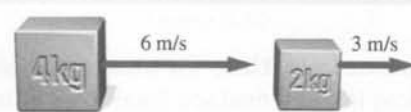


Figura 8.33

EJEMPLO 8.17 | Colisión elástica entre un neutrón y un núcleo

Un neutrón de masa m_n y velocidad v_{ni} choca elásticamente con un núcleo de carbono de masa m_C en reposo (figura 8.34). (a) ¿Cuáles son las velocidades finales de ambas partículas? (b) ¿Qué fracción f de su energía pierde el neutrón?

Planteamiento del problema La conservación del momento y conservación de la energía nos permiten determinar las velocidades finales. Como la energía inicial del núcleo de carbono es cero, su energía final es igual a la energía perdida por el neutrón.

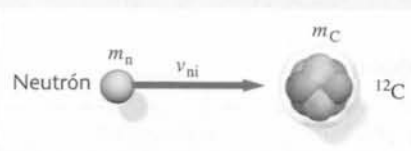


Figura 8.34

(a) 1. La conservación del momento nos ofrece una relación para las velocidades finales:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C v_{Cf}$$

2. La igualdad de las energías cinéticas inicial y final proporciona una segunda relación entre las dos velocidades finales. Esta igualdad se materializa igualando las velocidades de recesión y aproximación:

$$v_{Cf} - v_{nf} = -(v_{Ci} - v_{ni}) = 0 + v_{ni}$$

por lo tanto

$$v_{Cf} = v_{ni} + v_{nf}$$

3. Para eliminar v_{Cf} , despejar esta magnitud en el paso 2 y sustituirla en el paso 1:

$$m_n v_{ni} = m_n v_{nf} + m_C (v_{ni} + v_{nf})$$

4. Despejar v_{nf} . (Obsérvese que v_{nf} es negativa. El neutrón m_n es devuelto hacia atrás por el núcleo de carbono m_C , más masivo.)

$$v_{nf} = \frac{m_n - m_C}{m_n + m_C} v_{ni}$$

5. Sustituir el resultado del paso 4 en el resultado del paso 3 y despejar v_{Cf} .

$$v_{Cf} = v_{ni} - \frac{m_C - m_n}{m_n + m_C} v_{ni} = \frac{2m_n}{m_n + m_C} v_{ni}$$

(b) 1. La colisión es elástica, por lo que la energía cinética perdida por el neutrón es la energía cinética final del núcleo de carbón:

$$f = \frac{-\Delta E_{c_n}}{E_{c_n}} = \frac{E_{c_C}}{E_{c_n}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2}{\frac{1}{2} m_n v_{ni}^2} = \frac{m_C}{m_n} \left(\frac{v_{Cf}}{v_{ni}} \right)^2$$

2. Calcular con los resultados del paso 5 del apartado (a) el cociente de las velocidades y sustituir en el resultado del paso 1 del apartado (b), determinando la pérdida fraccional de energía del neutrón.

$$f = \frac{m_C}{m_n} \left(\frac{2m_n}{m_n + m_C} \right)^2 = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}$$

Observación Una aplicación importante de la transferencia de energía en las colisiones elásticas es la desaceleración de los neutrones en un reactor nuclear. En la fisión de un núcleo de uranio se emiten neutrones de alta energía. Para que estos neutrones provoquen la fisión de otro núcleo de uranio, su energía debe reducirse, es decir, deben ser frenados o "moderados". Un mecanismo para realizar este proceso es la dispersión elástica de los neutrones con los núcleos en el reactor. La pérdida fraccional de energía, $f = -\Delta E_{c_n}/E_{c_n}$, depende de la relación entre la masa del núcleo moderador y la del neutrón, como se indica en la figura 8.35. Para el uranio $m_U \approx 235 m_n$ y $f \approx 0,017 = 1,7\%$. Para el carbono, $m_C \approx 12 m_n$ y $f = 0,28 = 28\%$; para el deuterio $m_D \approx 2 m_n$ y $f \approx 0,89 = 89\%$; para el hidrógeno, $m_H \approx m_n$ y $f = 1 = 100\%$. Por ello, para frenar los neutrones, de modo que puedan ser capturados por los núcleos de uranio, se utilizan en el reactor moderadores de grafito o agua.

Ejercicio Demostrar que en una colisión elástica frontal entre un objeto en movimiento y otro parado, ambos de la misma masa, la pérdida fraccional de energía cinética es uno, y que la velocidad final del objeto inicialmente estacionario iguala la velocidad inicial del objeto que, antes del choque, estaba en movimiento.

Ejercicio Un bloque de 2 kg que se mueve a 3 m/s realiza un choque elástico con otro bloque de 4 kg en reposo. (a) ¿Cuál es la energía cinética original? (b) ¿Cuánta energía se transfiere al bloque de 4 kg? (Respuestas (a) 9 J, (b) 8 J.)

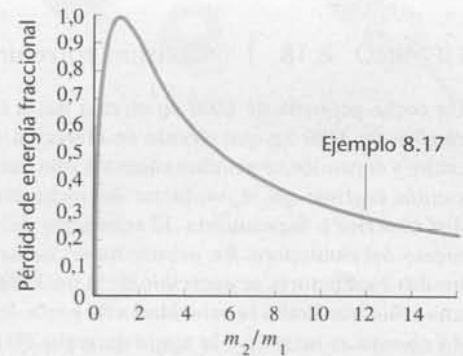


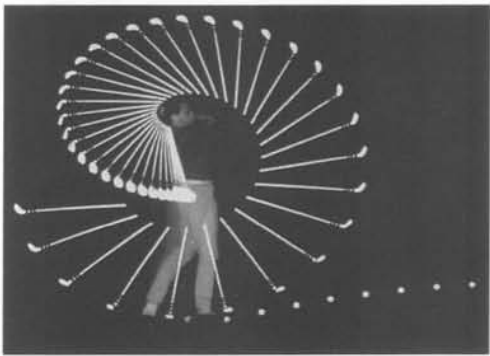
Figura 8.35 Pérdida de energía fraccional en función de la relación de las dos masas. La pérdida máxima de energía tiene lugar cuando $m_1 = m_2$.

Los resultados del ejemplo 8.17 para las velocidades finales de una partícula incidente al chocar con una segunda partícula inicialmente en reposo tienen otras aplicaciones. La velocidad final de la partícula incidente v_{1f} y la de la partícula estacionaria v_{2f} están relacionadas con la velocidad inicial de la partícula incidente por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.32a)$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} \quad (8.32b)$$

Cuando un objeto muy masivo (por ejemplo, la bola de una bolera) choca con un objeto ligero en reposo (por ejemplo, una pelota de ping-pong), el objeto masivo no se afecta esencialmente por el choque. Antes de la colisión, la velocidad relativa de aproximación es v_{1i} . Si el objeto masivo continúa esencialmente con la misma velocidad v_{1i} después del choque, la velocidad



del objeto pequeño debe ser $2v_{1i}$ para que la velocidad de retroceso igual a la velocidad de aproximación. Este resultado se obtiene también de las ecuaciones 8.32a y 8.32b si tenemos en cuenta que m_2 es mucho menor que m_1 , en cuyo caso $v_{1f} \approx v_{1i}$ y $v_{2f} \approx 2v_{1i}$, como era de esperar.

***Coeficiente de restitución** En general, un choque es una situación intermedia entre los casos extremos de choque elástico, en el que las velocidades relativas se invierten, y choque perfectamente inelástico, en el que no existe velocidad relativa después del choque. El **coeficiente de restitución** e , que es la medida de la elasticidad de una colisión, se define como el cociente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = \frac{v_{ret}}{v_{ap}} = \frac{v_{2f} - v_{1f}}{v_{2i} - v_{1i}} \quad (8.33)$$

DEFINICIÓN —COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

En una colisión elástica, $e = 1$; en una colisión perfectamente inelástica, $e = 0$.

Colisiones en tres dimensiones

Colisiones perfectamente inelásticas en tres dimensiones Para choques en tres dimensiones, el momento inicial total se obtiene sumando los vectores momento inicial de cada objeto implicado en la colisión. Como los objetos se quedan enganchados y el momento se conserva, tenemos $m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$. Por esta relación sabemos que los tres vectores velocidad, y la colisión, están en el mismo plano. También, a partir de la definición de centro de masas sabemos que $v_f = v_{cm}$.

EJEMPLO 8.18 | Colisión entre un coche y un camión

Un coche pequeño de 1200 kg circula hacia el este cuando choca en una intersección con un camión de 3000 kg que circula en dirección norte a 40 km/h, como indica la figura 8.36. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. El conductor del camión esgrime que el conductor del coche es el culpable de la colisión ya que iba a una velocidad superior a la permitida. El conductor del coche busca evidencias para desmontar el argumento del camionero. En primer lugar, no hay marcas de frenado, indicando que ninguno de los dos conductores se apercibió de la posibilidad de la colisión y frenó. En segundo lugar, hay una señal que limita la velocidad a 80 km/h. En tercer lugar el velocímetro del camión después del choque se atrancó y la aguja marcaba 50 km/h, y en cuarto lugar, los restos del choque se desparramaron en la dirección nordeste con un ángulo superior a 59° . ¿Estas evidencias, dan soporte al argumento de que el conductor del coche no iba a una velocidad superior a la permitida en el momento del choque?

Planteamiento del problema Elegimos un sistema de coordenadas tal que inicialmente el coche se desplaza en la dirección $+x$ y el camión en la dirección $+y$ (figura 8.37). A continuación expresamos el momento de cada objeto en forma vectorial y aplicamos el principio de conservación del momento.

1. Escribir las ecuaciones de la conservación del momento en forma vectorial en función de las masas y de las velocidades:
2. Igualar la componente x del momento inicial con la componente x del momento final:
3. Igualar la componente y del momento inicial con la componente y del momento final:
4. Eliminar v_f dividiendo la ecuación para la componente y por la ecuación para la componente x obtenidas en los pasos anteriores:

$$m_c v_c + m_t v_t = (m_c + m_t) v_f$$

$$m_c v_c + 0 = (m_c + m_t) v_f \cos \theta$$

$$0 + m_t v_t = (m_c + m_t) v_f \sin \theta$$

$$\frac{m_t v_t}{m_c v_c} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{m_t v_t}{m_c \tan \theta} \\ &= \frac{(3000 \text{ kg})(50 \text{ km/h})}{(1200 \text{ kg}) \tan 59^\circ} \\ &= \boxed{75,1 \text{ km/h}} \end{aligned}$$

¡PÓNGALO EN SU CONTEXTO!

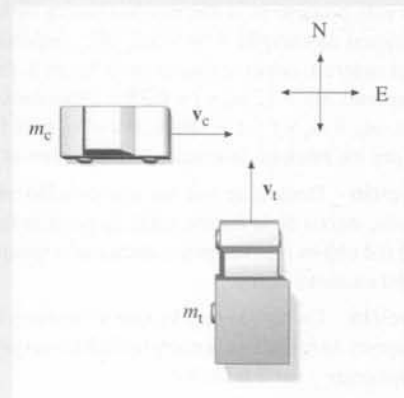


Figura 8.36

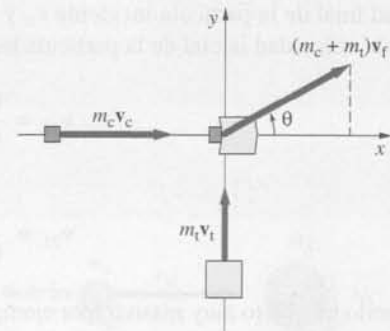


Figura 8.37

5. ¿Se sustentan los argumentos del conductor del camión referentes a la velocidad del coche?

La velocidad de 75,1 km/h es inferior a los 80 km/h permitidos, por lo tanto después de aplicar argumentos de física vemos como el conductor del camión no esgrime un argumento correcto.

Observación En un juicio estos argumentos tendría que presentarlos un perito judicial experto.

***Colisiones elásticas en tres dimensiones** Los choques elásticos en tres dimensiones son más complejos que los estudiados previamente. La figura 8.38 muestra una colisión no frontal entre un objeto de masa m_1 que se mueve con velocidad \mathbf{v}_{1i} paralelamente al eje x hacia un objeto de masa m_2 que se encuentra inicialmente en reposo en el origen. La distancia b entre los centros medida perpendicularmente a la dirección de \mathbf{v}_{1i} se denomina **parámetro de impacto**. Después del choque, el objeto 1 se aleja con velocidad \mathbf{v}_{1f} formando un ángulo θ_1 con la velocidad inicial y el objeto 2 se mueve con velocidad \mathbf{v}_{2f} , formando un ángulo θ_2 con \mathbf{v}_{1i} . La conservación del momento lineal nos da

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = m_1 \mathbf{v}_{1i} = m_1 \mathbf{v}_{1f} + m_2 \mathbf{v}_{2f}$$

En esta ecuación vemos que el vector \mathbf{v}_{2f} debe encontrarse en el plano formado por \mathbf{v}_{1i} y \mathbf{v}_{1f} , que a partir de ahora denominaremos plano xy . Suponiendo conocida la velocidad inicial \mathbf{v}_{1i} todavía quedan cuatro incógnitas: las componentes x e y de cada velocidad final; o alternativamente, los módulos de las dos velocidades finales y los dos ángulos de desviación. Las componentes x e y de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento nos dan dos de las relaciones necesarias entre estas incógnitas. La conservación de la energía nos da una tercera relación. Para obtener el valor de las cuatro incógnitas, es necesario una cuarta relación. Esta cuarta relación depende del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza de interacción ejercida por los cuerpos entre sí. En la práctica, la cuarta relación se obtiene normalmente midiendo el ángulo de desviación o el ángulo de retroceso. Esta medida puede proporcionarnos información respecto a la fuerza de interacción de los cuerpos.

Considérese el caso especial e interesante de un choque elástico no frontal entre dos objetos de igual masa cuando uno de ellos se encuentra inicialmente en reposo (figura 8.39a). Si \mathbf{v}_{1i} y \mathbf{v}_{1f} son las velocidades inicial y final del objeto 1 respectivamente y \mathbf{v}_{2f} es la velocidad final del objeto 2, la conservación de la cantidad de movimiento nos dice

$$m\mathbf{v}_{1i} = m\mathbf{v}_{1f} + m\mathbf{v}_{2f}$$



Figura 8.38 Choque no frontal. Las velocidades finales dependen del parámetro de impacto b y del tipo de fuerza ejercida por un objeto sobre otro.

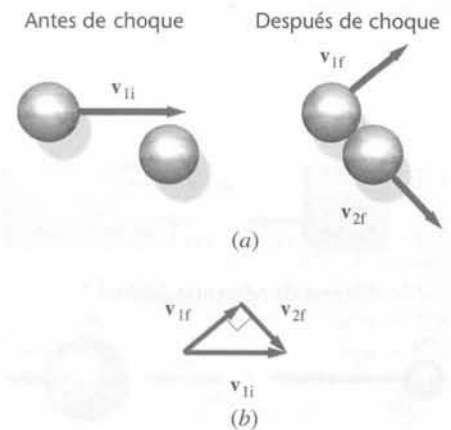
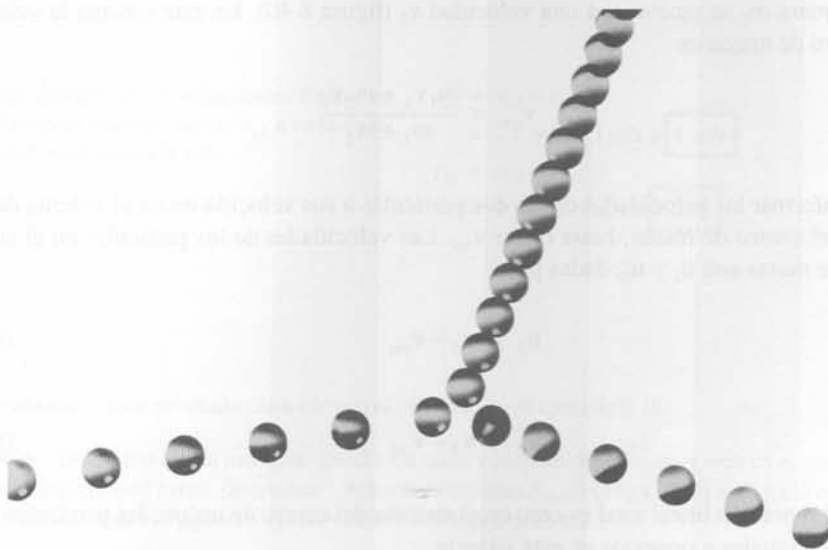
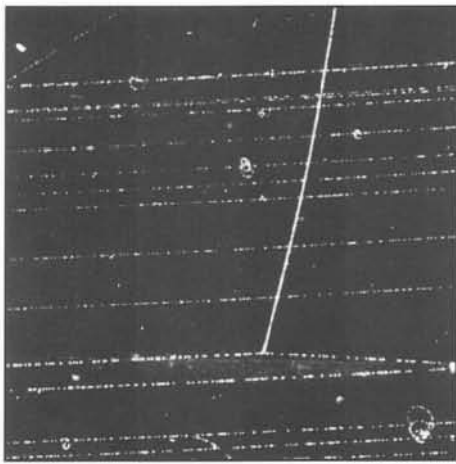


Figura 8.39 (a) Choque elástico no frontal entre dos esferas de igual masa cuando una de las esferas se encuentra inicialmente en reposo. Después del choque, las esferas se mueven formando entre sí un ángulo recto. (b) Los vectores velocidad correspondientes a este choque forman un triángulo rectángulo.



Fotografías con destellos múltiples de un choque elástico no frontal de dos bolas de masas iguales. La bola con un punto incide desde la izquierda y choca contra la bola con rayas que está inicialmente en reposo. Las velocidades finales de las dos bolas son perpendiculares entre sí.



Choque protón-protón en una cámara de burbujas con hidrógeno líquido. El protón incidente entra por la izquierda e interacciona con otro protón estacionario en la cámara. Las dos partículas se mueven formando un ángulo recto después del choque. La ligera curvatura de las trazas se debe a un campo magnético.

o

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{v}_{1f} + \mathbf{v}_{2f}$$

Los vectores velocidad final se suman formando el triángulo que se indica en la figura 8.39b. La conservación de la energía correspondiente a este choque es

$$\frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2$$

o

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (8.34)$$

La ecuación 8.34 es el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo formado por los vectores \mathbf{v}_{1f} , \mathbf{v}_{2f} y \mathbf{v}_{1i} , siendo \mathbf{v}_{1i} la hipotenusa del triángulo. Por lo tanto, los vectores velocidad final son perpendiculares entre sí, como indica la figura 8.39b.

*8.7 Sistema de referencia del centro de masas

Como hemos visto, la velocidad del centro de masas permanece invariable cuando la fuerza resultante externa que actúa sobre el sistema es nula. A veces es conveniente elegir un sistema de coordenadas con el origen en el centro de masas. Entonces, con respecto al sistema de coordenadas original, este sistema de coordenadas se mueve con una velocidad constante \mathbf{v}_{cm} . Este sistema recibe el nombre de **sistema de referencia del centro de masas**. Si una partícula tiene la velocidad \mathbf{v} en el sistema de referencia original, su velocidad relativa al centro de masas es $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{cm}}$. En el sistema del centro de masas, la velocidad del centro de masas es cero. Como el momento lineal total del sistema es igual al producto de la masa total por la velocidad del centro de masas, el momento lineal total también es cero en el sistema de referencia del centro de masas. Por ello se llama también **sistema de referencia del momento lineal cero**.

El análisis matemático de las colisiones se simplifica enormemente cuando se consideran en el sistema de referencia del centro de masas. Los momentos lineales de los dos objetos incidentes son iguales y opuestos. Después de una colisión perfectamente inelástica, los objetos permanecen en reposo. Toda la energía original se pierde en forma de energía térmica. Una colisión perfectamente elástica en una dimensión invierte la velocidad de cada objeto, pero no cambia su módulo (este hecho se deduce en el *problema 8.101*).

Consideremos por ejemplo, un sistema simple de dos partículas en un sistema de referencia, en el cual una partícula de masa m_1 se mueve con una velocidad \mathbf{v}_1 y una segunda partícula de masa m_2 se mueve con una velocidad \mathbf{v}_2 (figura 8.40). En este sistema la velocidad del centro de masas es

$$\mathbf{v}_{\text{cm}} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Para transformar las velocidades de las dos partículas a sus velocidades en el sistema de referencia del centro de masas, basta restar \mathbf{v}_{cm} . Las velocidades de las partículas en el sistema centro de masas son \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 , dadas por

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.35a)$$

y

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.35b)$$

Como el momento lineal total es cero en el sistema del centro de masas, las partículas tienen momentos iguales y opuestos en este sistema.

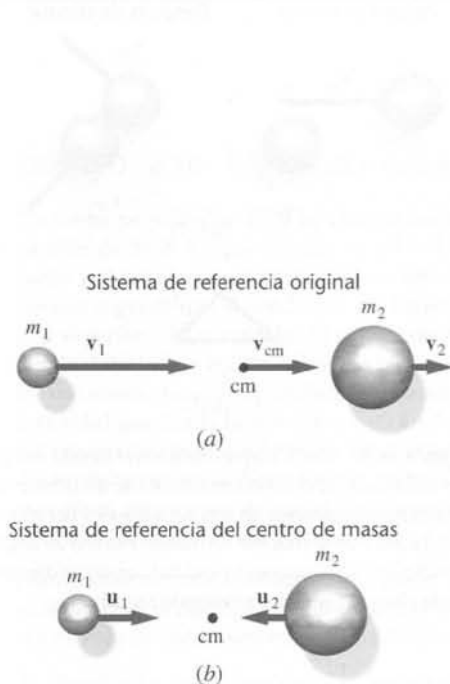


Figura 8.40 (a) Dos partículas se mueven en un sistema de referencia general en el cual el centro de masas tiene una velocidad \mathbf{v}_{cm} . (b) Las dos partículas del apartado anterior vistas desde un sistema de referencia para el cual el centro de masas está en reposo.

EJEMPLO 8.19 | Colisión elástica de dos bloques

Determinar las velocidades finales de los bloques de la colisión elástica del ejemplo 8.16 (en donde un bloque de 4 kg que se mueve hacia la derecha a 6 m/s choca elásticamente con un bloque de 2 kg que se mueve también hacia la derecha a 3 m/s) transformando previamente sus velocidades al sistema de referencia del centro de masas.

Planteamiento del problema Para pasar al sistema centro de masas, determinamos en primer lugar v_{cm} y lo restamos de cada velocidad. Resolvemos a continuación el choque invirtiendo las velocidades y transformando de nuevo al sistema original.

1. Calcular la velocidad del centro de masas, v_{cm} (figura 8.41):

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{(4 \text{ kg})(6 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(3 \text{ m/s})}{4 \text{ kg} + 2 \text{ kg}}$$

$$= 5 \text{ m/s}$$

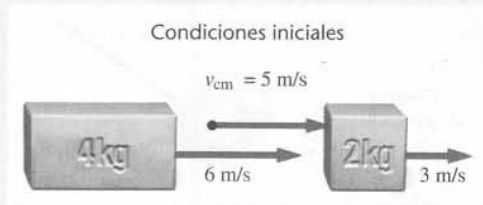


Figura 8.41

2. Transformar las velocidades iniciales al sistema de referencia del centro de masas, restando v_{cm} de las velocidades iniciales (figura 8.42):

$$u_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$$

$$= 6 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = 1 \text{ m/s}$$

$$u_{2i} = v_{2i} - v_{cm}$$

$$= 3 \text{ m/s} - 5 \text{ m/s} = -2 \text{ m/s}$$



Figura 8.42

3. Resolver la colisión en el sistema de referencia del centro de masas invirtiendo la velocidad de cada objeto (figura 8.43):

$$u_{1f} = -u_{1i} = -1 \text{ m/s}$$

$$u_{2f} = -u_{2i} = +2 \text{ m/s}$$



Figura 8.43

4. Para determinar las velocidades finales en el sistema original, sumar v_{cm} a cada velocidad final (figura 8.44):

$$v_{1f} = u_{1f} + v_{cm}$$

$$= -1 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = \boxed{4 \text{ m/s}}$$

$$v_{2f} = u_{2f} + v_{cm}$$

$$= 2 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s} = \boxed{7 \text{ m/s}}$$

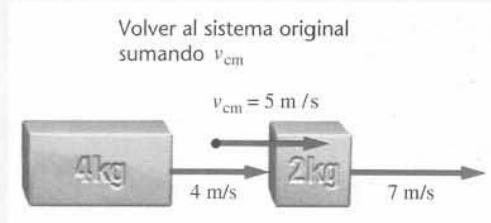


Figura 8.44

Observación Este resultado coincide con el obtenido en el ejemplo 8.16.

Ejercicio Demostrar que el momento lineal total antes y después del choque es cero en el sistema de referencia del centro de masas. (Respuesta Antes de la colisión: $P_{sist i} = (4 \text{ kg})(1 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(-2 \text{ m/s}) = 0$; después de la colisión: $P_{sist f} = (4 \text{ kg}) \times (-1 \text{ m/s}) + (2 \text{ kg})(2 \text{ m/s}) = 0$.)

*8.8 Sistemas de masa variable: la propulsión de los cohetes

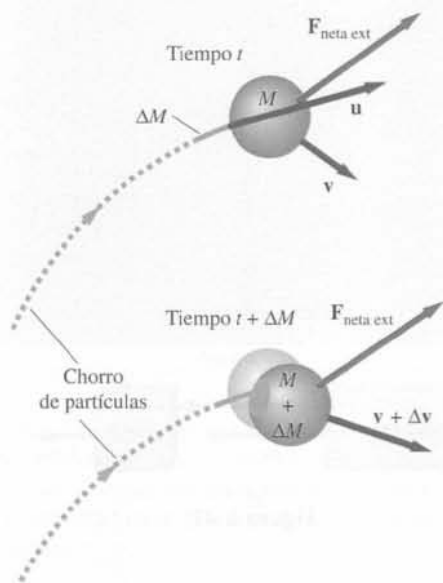


Figura 8.45 Un objeto de masa M que se mueve a velocidad v experimenta colisiones perfectamente inelásticas con las partículas de un chorro continuo que se mueven a velocidad u .

Un aspecto muy importante y creativo en la resolución de problemas de física consiste en especificar adecuadamente el sistema. En esta sección exploramos situaciones en que el sistema que consideramos cambia su masa continuamente. Un ejemplo de uno de estos sistemas es un cohete. En este caso se elige el sistema como el conjunto formado por el cohete más el combustible que aún está por usar. Cuando el combustible se utiliza, los gases se expelen fuera de la nave y la masa del sistema disminuye.

Otro ejemplo de sistemas de masa variable lo constituye un asteroide que pasa a través de los restos de la erupción emitidos al espacio por un volcán de la luna de Júpiter, IO. Especificamos que en el tiempo t el sistema sea el asteroide, más los restos acumulados en él, más los que se acumularán entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$. A medida que se acumulan restos de la erupción en el asteroide, la masa del sistema aumenta. Para resolver problemas de estas características aplicamos el teorema impulso-momento durante un intervalo de tiempo pequeño Δt y después tomamos el límite $\Delta t \rightarrow 0$.

Consideremos la siguiente deducción de la segunda ley de Newton para objetos cuya masa varía continuamente. Supongamos que un flujo de materia continuo que se mueve a velocidad u choca con un objeto de masa M que se mueve con velocidad v (figura 8.45). La masa de las partículas que chocan con el objeto durante el tiempo Δt es ΔM , y estas partículas se quedan enganchadas con el objeto aumentando su masa ΔM en un tiempo Δt . Durante este tiempo Δt la velocidad v cambia Δv . En el tiempo t definimos que el sistema es el objeto (incluyendo toda la masa que ha chocado sobre él en tiempos anteriores a t) más toda la materia que choca con el objeto durante el tiempo comprendido entre t y $t + \Delta t$. Aplicando el teorema impulso-momento a este sistema se obtiene,

$$\mathbf{F}_{\text{net ext}} \Delta t = \Delta \mathbf{P} = [(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v})] - [M\mathbf{v} + \Delta M\mathbf{u}]$$

en donde el primer término (en corchetes) es el momento en el tiempo $t + \Delta t$ y el segundo término en corchetes es el momento en el tiempo t . La reorganización de los términos de la ecuación anterior conduce a

$$\mathbf{F}_{\text{net ext}} \Delta t = M \Delta \mathbf{v} + \Delta M(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \Delta M \Delta \mathbf{v} \quad (8.36)$$

(en donde la fuerza externa neta $\mathbf{F}_{\text{net ext}}$ incluye la fuerza gravitatoria y una o más fuerzas de contacto). Dividiendo la ecuación 8.36 por Δt se llega a

$$\mathbf{F}_{\text{net ext}} = M \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{\Delta M}{\Delta t}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) + \frac{\Delta M}{\Delta t} \Delta \mathbf{v}$$

y si se toma el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (que a su vez significa tanto $\Delta M \rightarrow 0$ como $\Delta v \rightarrow 0$) se obtiene

$$\mathbf{F}_{\text{net ext}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dM}{dt}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + 0$$

expresión que si se arregla queda

$$\mathbf{F}_{\text{net ext}} + \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.37)$$

SEGUNDA LEY DE NEWTON EN SISTEMAS DE MASA VARIABLE

en donde $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la velocidad de dM relativa a M . Nótese que excepto para el término $-(dM/dt)\mathbf{v}_{\text{rel}}$, la ecuación 8.37 es precisamente la segunda ley de Newton para un sistema de masa constante.

EJEMPLO 8.20 | La cuerda que cae

Una cuerda uniforme de masa M y de longitud L se sujeta de manera que su extremo inferior está justo por encima de una balanza. Se suelta la cuerda y ésta empieza a caer. Determinar la fuerza que ejerce la balanza sobre la cuerda cuando ha caído la mitad de ésta.

Planteamiento del problema Se aplica la ecuación 8.37 a la porción de cuerda que está en la balanza. En ella se ejercen dos fuerzas externas, la fuerza de la gravedad y la fuerza normal ejercida por la balanza. Las velocidades con las que los diferentes puntos de la cuerda chocan con la balanza dependen de la altura desde donde caen.

1. Se dibuja un diagrama de la caída de la cuerda (véase la figura 8.46) junto con un eje de coordenadas. Se incluyen la configuración inicial y la configuración un tiempo arbitrario posterior.

2. Se expresa la ecuación 8.37 en sus componentes. Sea m la masa del sistema (la parte de la cuerda en la balanza). La velocidad del sistema es cero, por lo que $dv_y/dt = 0$:

$$F_{\text{net } y} + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel } y} = m \frac{dv_y}{dt}$$

$$F_n - mg + \frac{dm}{dt} v_{\text{rel } y} = 0$$

3. Sea dm la masa de un pequeño segmento de cuerda de longitud $d\ell$ que cae durante el tiempo dt sobre la balanza. La cuerda es uniforme, por lo que la relación entre dm y $d\ell$ es:

$$\frac{dm}{d\ell} = \frac{M}{L}$$

4. Multiplicando ambos términos del paso anterior por $d\ell/dt$ y despejando para dm/dt

$$\frac{dm}{dt} = \frac{M d\ell}{L dt}$$

5. $d\ell/dt$ es el módulo de la velocidad del impacto de un segmento, por lo que $v_{\text{rel } y} = -d\ell/dt$. ($v_{\text{rel } y}$ es negativa ya que se ha elegido la dirección positiva del eje y hacia arriba, y la cuerda está cayendo.) Si se sustituye esta relación en el resultado del paso 4 se obtiene:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{M}{L} v_{\text{rel } y}$$

6. Sustituyendo el resultado del paso 5 en el paso 2 y despejando F_n se obtiene:

$$F_n = mg + \frac{M}{L} v_{\text{rel } y}^2$$

7. Hasta que un punto de la cuerda toca la balanza, se mueve con aceleración constante g . Usando la ecuación 2.23 con $\Delta y = -L/2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} v_{\text{rel } y}^2 &= v_{\text{rel } y 0}^2 + 2a_y \Delta y \\ &= 0 + 2(-g)(-L/2) = gL \end{aligned}$$

8. Sustituyendo el resultado del paso anterior en el resultado del paso 6 con $m = M/2$ resulta:

$$F_n = \frac{M}{2}g + \frac{M}{L}gL = \boxed{\frac{3}{2}Mg}$$

Observación Cuando la mitad de la cuerda ha caído sobre la balanza, el peso del sistema (la cuerda que descansa sobre la balanza) es $1/2Mg$, que corresponde a un tercio de la fuerza normal. Esto significa que $F_{\text{net } y} = Mg$ (dirigida hacia arriba). Esta es la fuerza requerida para detener el momento de la cuerda que cae en ese instante.

Ejercicio Determinar la fuerza normal ejercida por la balanza sobre la cuerda (a) justo antes de que el extremo superior de la cuerda llegue a la balanza y, (b) justo después de que el extremo superior llegue a la balanza. (Respuesta (a) $3Mg$, (b) Mg)

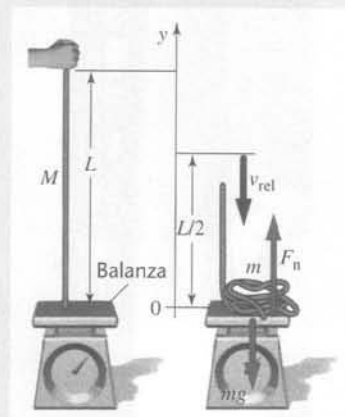


Figura 8.46 Una cuerda flexible y uniforme de longitud L y masa M cae a partir del reposo sobre la superficie de una balanza.

La propulsión de cohetes es un ejemplo interesante de la conservación de la cantidad de movimiento. La masa del cohete cambia continuamente a medida que el motor quema combustible y expelle los gases resultantes. Consideremos un cohete que se mueve en línea recta con una velocidad v relativa a la Tierra, tal como se muestra en la figura 8.47. Suponiendo que el combustible se quema a ritmo constante, en el tiempo t la masa del cohete es:

$$M = M_0 - Rt \quad (8.38)$$

en donde M_0 es la masa inicial del cohete. Los gases se separan del cohete a una velocidad u_{ext} relativa al cohete, y el ritmo con que el cohete consume combustible coincide con la velocidad con que disminuye su masa M . Elegimos como sistema el cohete y el combustible no utilizado. Despreciando la resistencia del aire, la única fuerza externa que actúa sobre el



Figura 8.47

sistema es la fuerza de la gravedad. Con $F_{\text{neto ext}} = Mg$ y $dM/dt = -R$, la ecuación 8.37 se convierte en **la ecuación del cohete**:

$$Mg - Ru_{\text{ext}} = M \frac{dv}{dt} \quad (8.39)$$

ECUACIÓN DE UN COHETE

La magnitud Ru_{ext} es la fuerza ejercida sobre el cohete por el gas que escapa y se denomina **empuje** (o **fuerza de impulsión**) F_e :

$$F_e = Ru_{\text{ext}} = \left| \frac{dM}{dt} \right| u_{\text{ext}} \quad (8.40)$$

DEFINICIÓN —EMPUJE DE UN COHETE

El cohete se mueve hacia arriba, por lo que se elige esta dirección como la positiva del eje y , con lo cual la ecuación 8.39 se expresa como

$$-Mg + Ru_{\text{ext}} = M \frac{dv_y}{dt} \quad (8.41)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA ECUACIÓN DE UN COHETE

Dividiendo por M , arreglando los términos y sustituyendo la ecuación 8.38 se obtiene

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{Ru_{\text{ext}}}{M} - g = \frac{Ru_{\text{ext}}}{M_0 - Rt} - g \quad (8.42)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA ACELERACIÓN DE UN COHETE

La ecuación 8.42 se resuelve integrando a los dos lados del signo igual con respecto del tiempo. Para un cohete que inicia su movimiento del reposo en el tiempo $t = 0$ resulta:

$$v_f = -u_{\text{ext}} \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - Rt} \right) - gt \quad (8.43)$$

COMPONENTE VERTICAL DE LA VELOCIDAD DE UN COHETE

suponiendo que la aceleración de la gravedad es constante.

EJEMPLO 8.21 | Despegue

¡INTÉNTELO USTED MISMO!

El cohete Saturno V utilizado en el programa lunar Apolo, tenía una masa inicial M_0 de $2,85 \times 10^6$ kg, una carga útil del 27 por ciento, un ritmo de combustión R de $13,84 \times 10^3$ kg/s, y una fuerza de impulsión F_e de 34×10^6 N. Determinar (a) la velocidad de expulsión de los gases, (b) el tiempo de combustión total t_b , (c) la aceleración inicial de despegue, (d) la aceleración en el tiempo t_b y (e) la velocidad final del cohete.

Planteamiento del problema (a) La velocidad de expulsión de los gases se obtiene del empuje y del ritmo de combustión. (b) Para determinar el tiempo de combustión total, necesitamos conocer la masa total del combustible quemado, que es la masa inicial menos la carga útil. (c) La aceleración se determina mediante la ecuación 8.42. (d) La velocidad final viene dada por la ecuación 8.43.

Tape la columna de la derecha e intente resolverlo usted mismo

Pasos

- (a) Calcular u_{ext} a partir del empuje y de la velocidad de combustión.
- (b) 1. Calcular la masa final M_f del cohete.
2. Utilizar el resultado anterior para calcular el tiempo de combustión total, t_b .
- (c) Calcular dv_y/dt para $M = M_0$ y para $M = M_f$.
- (d) Calcular la velocidad final a partir de la ecuación 8.42.

Respuestas

$$u_{\text{ext}} = \boxed{2,46 \text{ km/s}}$$

$$M_f = (0,27)M_0 = 7,70 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$t_b = \frac{M_0 - M_f}{R} = \boxed{150 \text{ s}}$$

Inicialmente, $\frac{dv_y}{dt} = 2,14 \text{ m/s}^2$;

Finalmente, $\frac{dv_y}{dt} = \boxed{34,3 \text{ m/s}^2}$

$$v_{yT} = \boxed{1,75 \text{ km/s}}$$

Observación La aceleración inicial es pequeña: sólo 0,21 g. Cuando ha transcurrido el tiempo de combustión total, la aceleración del cohete ha crecido a 3,5 g. Inmediatamente después de que se acabe el combustible, la aceleración es $-g$. La velocidad del cohete entonces, después de dos minutos y medio de combustión, es aproximadamente 6300 km/h.

Resumen

La conservación del momento lineal (o ímpetu) en un sistema aislado es una ley fundamental de la naturaleza con aplicaciones en todas las áreas de la física.

TEMA

OBSERVACIONES Y ECUACIONES RELEVANTES

1. Centro de masas

Sistema de partículas

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots \quad (8.5)$$

$$M\mathbf{v}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots \quad (8.8)$$

$$M\mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots \quad (8.9)$$

Objetos continuos

$$M\mathbf{r}_{\text{cm}} = \int \mathbf{r} \, dm \quad (8.6)$$

Segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\mathbf{F}_{\text{neto,ext}} = \sum_i \mathbf{F}_{i,\text{ext}} = M\mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (8.11)$$

2. Momento lineal

Definición para una partícula

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (8.12)$$

Energía cinética de una partícula

$$E_c = \frac{p^2}{2m} \quad (8.25)$$

Momento de un sistema de partículas

$$\mathbf{P}_{\text{sist}} = \sum_i m_i\mathbf{v}_i = M\mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (8.14)$$

Segunda ley de Newton para sistemas

$$\mathbf{F}_{\text{neto,ext}} = \frac{d\mathbf{P}_{\text{sist}}}{dt} \quad (8.15)$$

Ley de conservación del momento

Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el momento lineal total del sistema se conserva.

3. Energía de un sistema

Energía cinética

La energía cinética asociada al movimiento de las partículas de un sistema relativo al centro de masas es $E_{c_{\text{rel}}} = \sum \frac{1}{2}m_i u_i^2$, en donde u_i es la velocidad de la partícula i relativa al centro de masas:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + E_{c_{\text{rel}}} \quad (8.18)$$

Energía potencial gravitatoria

$$U = Mgh_{\text{cm}} \quad (8.7)$$

4. Colisiones

Impulso El impulso de una fuerza se define como la integral de la fuerza extendida al intervalo de tiempo durante el cual actúa.

$$\mathbf{I} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt \quad (8.19)$$

Teorema impulso-momento

$$\mathbf{I}_{\text{neto}} = \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F}_{\text{neto}} dt = \Delta \mathbf{p} \quad (8.20)$$

Fuerza media

$$\mathbf{F}_{\text{m}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \mathbf{F} dt = \frac{\mathbf{I}}{\Delta t} \quad (8.22)$$

Colisiones elásticas

Se dice que un choque es elástico cuando la suma de las energías cinéticas de los dos objetos es la misma antes y después de la colisión.

Velocidades relativas de aproximación y retroceso

En un choque elástico la velocidad relativa de alejamiento de los cuerpos después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del choque:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (8.31)$$

Colisiones perfectamente inelásticas

En una colisión perfectamente inelástica los cuerpos que chocan se acoplan y se mueven con la velocidad del centro de masas.

***Coeficiente de restitución**

El coeficiente de restitución e mide la elasticidad de un choque, y se define como el coeficiente entre la velocidad relativa de retroceso y la velocidad relativa de aproximación:

$$e = -\frac{v_{2f} - v_{1f}}{(v_{2i} - v_{1i})} \quad (8.33)$$

Para un choque elástico, $e = 1$; para un choque perfectamente inelástico, $e = 0$.

*5. Sistemas de masa variable

Segunda ley de Newton

$$\mathbf{F}_{\text{neto,ext}} + \frac{dM}{dt} \mathbf{v}_{\text{rel}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.37)$$

Ecuación del cohete

$$M\mathbf{g} - R\mathbf{u}_{\text{ext}} = M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (8.39)$$

Empuje

$$\mathbf{F}_e = -R\mathbf{u}_{\text{ext}} = -\left| \frac{dM}{dt} \right| \mathbf{u}_{\text{ext}} \quad (8.40)$$

Problemas

- Concepto simple, un solo paso, relativamente fácil.
- Nivel intermedio, puede exigir síntesis de conceptos.
- Desafiante, para alumnos avanzados.

SSM La solución se encuentra en el *Student Solutions Manual*.

iSOLVE Problemas que pueden encontrarse en el servicio iSOLVE de tareas para casa.

iSOLVE✓ Estos problemas del servicio "Checkpoint" son problemas de control, que impulsan a los estudiantes a describir cómo se llega a la respuesta y a indicar su nivel de confianza.

En algunos problemas se dan más datos de los realmente necesarios; en otros pocos, deben extraerse algunos datos a partir de conocimientos generales, fuentes externas o estimaciones lógicas.

Tomar $g = 9,81 \text{ N/kg} = 9,81 \text{ m/s}^2$ y despreciar el rozamiento en todos los problemas a menos que se indique lo contrario.

Problemas conceptuales

1 ● Dar un ejemplo de un objeto tridimensional que no tenga masa en su centro de masas.

2 ● **SSM** Desde lo alto de una torre se deja caer una bala a la vez que otra bala idéntica se dispara hacia arriba. El centro de masas de las dos

balas, (a) está siempre en el mismo sitio, (b) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer *antes* de que la bala lanzada al aire empiece a caer, (c) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer *simultáneamente* que la bala lanzada al aire empiece a caer, (d) inicialmente sube, después cae, pero empieza a caer después de que la bala lanzada al aire empiece a caer.

3 ● Dos discos de masas m_1 y m_2 yacen desconectados sobre una mesa sin rozamiento. Se ejerce una fuerza horizontal F_1 solamente sobre m_1 .

¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas de los discos? (a) F_1/m_1 , (b) $F_1/(m_1 + m_2)$, (c) F_1/m_2 , (d) $(m_1 + m_2) F_1 / m_1 m_2$

4 ● Los dos discos del problema 3 están sobre una mesa sin rozamiento y conectados por un muelle sin masa de constante de fuerza k . Se ejerce de nuevo una fuerza horizontal F_1 sobre m_1 a lo largo del muelle, alejándola de m_2 . ¿Cuál es el módulo de la aceleración del centro de masas? (a) F_1/m_1 , (b) $F_1/(m_1 + m_2)$, (c) $(F_1 + kx)/m_1 m_2$, en donde x es el aumento de longitud del muelle. (d) $(m_1 + m_2) F_1 / m_1 m_2$.

5 ● SSM Si dos partículas tienen la misma energía cinética, ¿el módulo de su momento es necesariamente es igual? Explicarlo y dar un ejemplo.

6 ● Verdadero o falso:

- (a) El momento lineal de un cuerpo pesado es mayor que el de un objeto ligero que se mueve con igual velocidad.
 (b) El ímpetu del sistema puede conservarse aunque no suceda lo mismo con la energía mecánica.
 (c) La velocidad del centro de masas de un sistema es igual al momento lineal total del sistema dividido por su masa total.

7 ● ¿Cómo es el movimiento de retroceso de un rifle o de un cañón en relación con la conservación de la cantidad de movimiento?

8 ● SSM Una muchacha salta de un bote al muelle. ¿Por qué debe saltar con más energía de la que necesitaría si saltase la misma distancia de un muelle a otro?

9 ●● SSM Una gran parte de la investigación pionera sobre el movimiento de cohetes fue realizada por Robert Goddard, profesor de física en el Clark College de Worcester, Massachusetts. Un editorial de *New York Times*, publicado en 1920, ilustra la opinión pública de su trabajo: "El profesor Goddard con su cátedra en el Clark College y el apoyo de la Institución Smithsonian desconoce la relación entre acción y reacción y la necesidad de tener algo mejor que el vacío frente a lo cual reaccionar —es decir, su idea es absurda. Naturalmente parece desconocer las enseñanzas impartidas diariamente en los centros de enseñanza media".¹ La creencia de que un cohete necesitaba algún medio sobre el cual empujar, era un concepto erróneo predominante antes de que los cohetes en el espacio fueran algo común. Explicar por qué dicha creencia era errónea.

10 ● Dos bolas de una bolera se mueven con igual velocidad, pero una de ellas se desliza hacia abajo por la pista, mientras la otra está rodando. ¿Cuál de las dos bolas tiene más energía cinética?

11 ● Un filósofo dice "Todo movimiento es imposible. Las fuerzas siempre actúan en pares iguales acción-reacción y, por lo tanto, se anulan" Responda a su argumento.

12 ● Si dos objetos chocan y uno de ellos está inicialmente en reposo, ¿es posible que ambos queden quietos después del choque? (Supóngase que cualquier fuerza externa que actúe sobre el sistema de los dos objetos es muy pequeña, es decir, despreciable.) ¿Es posible que uno de los dos se quede parado? Explíquelo.

13 ● Desde el punto de vista de las leyes físicas, ¿cuál es el problema con los superhéroes de cómic cuando vuelan sin motores a chorro ni flotadores en el aire y chocan, repeliéndolos, con enormes objetos como coches y villanos?

14 ●● SSM Si las fuerzas externas son las únicas fuerzas que hacen que el centro de masas de un sistema de partículas acelere, ¿cómo puede moverse un coche? Habitualmente pensamos que el motor de un coche propor-

ciona la fuerza necesaria para acelerarlo, pero, ¿es eso cierto? ¿De donde viene la fuerza externa que acelera el coche?

15 ●● Cuando pisamos el pedal del freno para frenar un coche, una mordaza presiona la rueda de modo que el rozamiento disminuye su velocidad de rotación. Sin embargo, el rozamiento de la mordaza no puede ser la fuerza que detiene el vehículo porque es una fuerza interna, ya que la rueda y la mordaza son elementos que forman el sistema. ¿Cuál es la fuerza externa que detiene el coche? Dé una explicación detallada de cómo funciona esta fuerza.

16 ● Explique por qué la red protectora puede salvar la vida de un artista de circo.

17 ● ¿Cómo se podría estimar el tiempo de colisión de una pelota de béisbol con un bate?

18 ● ¿Por qué un vaso de vino puede caer en una alfombra y no romperse y, en cambio, si cae en una superficie de hormigón se rompe?

19 ● Verdadero o falso:

- (a) En un choque perfectamente inelástico se pierde toda la energía cinética de las partículas.
 (b) En un choque elástico frontal la velocidad relativa de retroceso después del choque es igual a la velocidad relativa de aproximación antes del mismo.
 (c) La energía mecánica se conserva en una colisión elástica.

20 ●● SSM ¿En qué condiciones puede perderse toda la energía cinética inicial en un choque?

21 ●● Considerar una colisión perfectamente inelástica de dos objetos de igual masa. (a) ¿En qué caso es mayor la pérdida de la energía cinética: si los dos objetos tienen velocidades directamente opuestas y de igual magnitud $v/2$, o si uno de los objetos se encuentra inicialmente en reposo y el otro tiene una velocidad inicial v ? (b) ¿En qué situación es mayor el porcentaje de pérdida de energía cinética?

22 ●● SSM Un niño se ha construido una arma de juguete que consiste de dos cañas horizontales huecas por donde se pueden lanzar guisantes (véase la figura 8.48). El niño sopla desde la izquierda cuando dos guisantes están en las posiciones de la figura. Si el juguete está en posición horizontal, ¿cuál de los dos guisantes, el A o el B, saldrá con mayor velocidad? ¿Por qué? *Sugerencia: La respuesta tiene que ver con el teorema impulso-momento.*

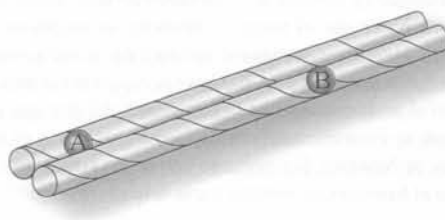


Figura 8.48 Problema 22

23 ●● Una partícula m_1 que se mueve con velocidad v realiza un choque elástico frontal con una masa estacionaria m_2 . ¿En qué condiciones será mayor la energía impartida a m_2 ? (a) $m_2 \ll m_1$, (b) $m_2 = m_1$, (c) $m_2 \gg m_1$, (d) Ninguna de las anteriores.

Sección opcional

24 ● Describir una colisión perfectamente inelástica considerada en el sistema de referencia del centro de masas.

¹ En la página 43 de la edición del 17 de julio de 1968 del *New York Times* se escribió una "corrección" al editorial de 1920. En dicha corrección, que se publicó 3 días antes de que el hombre pisara la Luna por primera vez, se decía que "ahora está totalmente demostrado que un cohete puede funcionar tanto en el vacío como en la atmósfera. *The Times* pide disculpas por su error".

25 ● Las boquillas de las mangueras de jardín habitualmente tienen la forma que se indica en la figura 8.49, acabando en ángulo recto. Si se abre la válvula de la boquilla y sale el agua a presión, se nota que ésta ejerce sobre la mano una presión hacia atrás más fuerte de lo que sería de esperar si la boquilla no acabara en ángulo recto. ¿Por qué?



Figura 8.49 Problema 25

26 ● ¿Por qué se puede prescindir del rozamiento y de la fuerza de la gravedad en los problemas de colisiones? Explíquelo.

27 ● Si una masa de un péndulo oscila, ¿se conserva su momento? Explíquelo.

28 ●● SSM Un vagón de un tren pasa por debajo de un silo que deja caer grano a velocidad constante. (a) ¿La conservación del momento conlleva que el vagón del tren disminuya su velocidad a medida que le cae grano? Suponer que no hay rozamiento en la vía y que el terreno es perfectamente plano. (b) Si el vagón frena, esto implica que hay una fuerza externa que actúa sobre él de modo que disminuye su velocidad. ¿De dónde procede? (c) Pasado el silo, el grano cae al suelo a velocidad constante por un agujero vertical en el suelo del vagón. ¿A medida que pierde masa, el vagón se acelera?

29 ●● SSM Como evidencia de que incluso personas muy brillantes pueden equivocarse, considere el problema siguiente, que fue propuesto a un estudiante de primer curso en el Caltech (abreviatura del prestigioso instituto californiano: *California Institute of Technology*): *Un barco de vela estaba en el agua un día sin viento. Para hacer que el barco se moviera, un marinero, erróneamente, colocó un ventilador a popa de manera que enviaba viento hacia las velas para que empujara el barco hacia delante. Explicar por qué esto es imposible.* La idea de quien propuso el problema era que la fuerza neta del aire que empujaba las velas hacia adelante se contrarrestaba con la fuerza que ejercía el ventilador hacia atrás (tercera ley de Newton). Sin embargo uno de los estudiantes señaló al profesor que *de hecho* el barco podía moverse hacia delante. ¿Por qué?

Estimaciones y aproximaciones

30 ●● Un coche de 2000 kg que viaja a 90 km/h choca contra una pared de hormigón que no cede. (a) Estimar el tiempo de choque suponiendo que el centro del coche recorre la mitad del camino hasta la pared con desaceleración constante. (Utilizar una longitud razonable para el coche.) (b) Estimar la fuerza media ejercida por la pared sobre el coche.

31 ●● En una carrera de vagonetas de tracción manual sobre railes, una de estas unidades de masa 350 kg se mueve a 32 km/h con un equipo de cuatro personas (cada una de ellas de 75 kg). La vagoneta se dirige hacia un río, cuando observan que el puente por el que han de pasar se ha derrumbado. Las cuatro componentes saltan simultáneamente hacia atrás con una velocidad de componente horizontal de 4 m/s relativa a la vagoneta después del salto. La vagoneta

cae al agua a una distancia de 25,0 m de la orilla. (a) Estimar el tiempo de caída de la vagoneta. (b) ¿Qué ocurre con las componentes del equipo?

32 ●● SSM Disparando un rifle hacia un melón (no lo intente en casa) se realiza un experimento que va contra la intuición. Cuando la bala incide sobre el fruto, nueve de diez veces el melón se mueve hacia el rifle, el sentido *opuesto* al movimiento de la bala. (La décima vez, el melón simplemente explota.) ¿Se violan las leyes de la física por lo que se refiere a la conservación del momento? No, porque no estamos tratando simplemente con una colisión de dos cuerpos, ya que una fracción de la energía incidente se invierte en producir un chorro de melón en la dirección de la bala. Este chorro puede tener un momento superior al de la bala, por lo que, para conservar el momento, el resto del melón se mueve hacia atrás. Hagamos las siguientes suposiciones:

1. El melón es de 2,50 kg.
2. La bala del rifle tiene una masa de 10,4 g y su velocidad es de 550 m/s.
3. El 10% de la energía de la bala se deposita en forma de energía cinética del chorro de melón que salpica hacia delante.
4. La masa de melón que forma el chorro es, 0,14 kg.
5. Todas las colisiones se dan en línea recta. ¿Cuál será la velocidad de retroceso del melón? Compárela con una velocidad de retroceso típica de unos 0,5 m/s.

Determinación del centro de masas

33 ● Tres masas puntuales de 2 kg cada una están localizadas sobre el eje x , en el origen, en $x = 0,20$ m y en $x = 0,50$ m. Hallar el centro de masas del sistema.

34 ● SSM El hacha de piedra de la figura 8.50, en donde se muestran sus dimensiones, está formada por una piedra simétrica de 8 kg atada al extremo de un palo homogéneo de 2,5 kg. ¿A qué distancia del mango del hacha se encuentra su centro de masas?

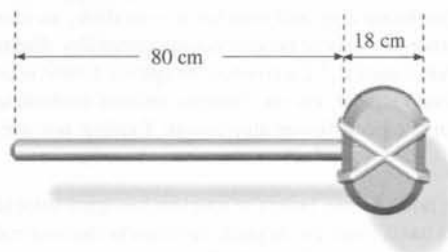


Figura 8.50 Problema 34

35 ● **¡RESUELVE!** Tres bolas A , B y C de masas 3 kg, 1 kg y 1 kg respectivamente, están conectadas por barras de masa despreciable. Las bolas están localizadas en la forma indicada en la figura 8.51. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de masas?

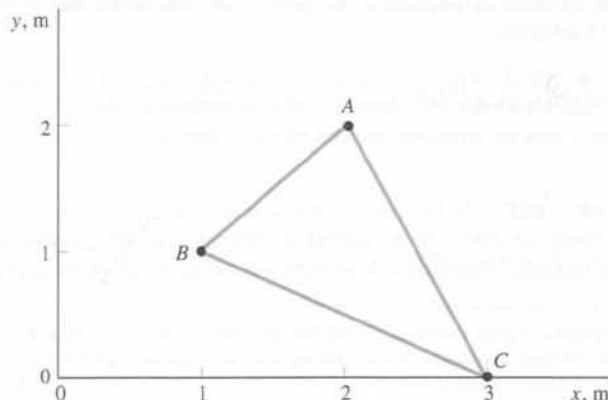


Figura 8.51 Problemas 35, 45

36 ● **RESOLVER** Por simetría, localizar el centro de masas de un triángulo equilátero de lado a , que tiene un vértice sobre el eje y y los otros dos en $(-a/2, 0)$ y $(+a/2, 0)$.

37 ●● **SSM** Determinar el centro de masas de una pieza de madera contrachapada que tiene la forma de la figura 8.52. Podemos considerar que la pieza está formada por dos piezas, un cuadrado de 3 m de lado y de masa m_1 y un rectángulo de 1 m \times 2 m con una masa $-m_2$. Considere que el eje de coordenadas está situado en el extremo inferior izquierdo de la pieza.

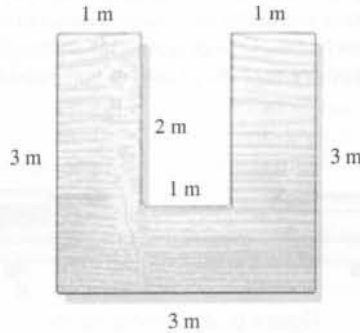


Figura 8.52 Problema 37

38 ●● Una lata de masa M y altura H tiene forma cilíndrica y está llena de agua. La masa inicial de agua es M , la misma de la lata. Se perfora un agujero en la base de la lata por el que se va el agua. (a) Si la altura del agua en la lata es x , ¿cuál es el centro de masas del sistema lata + agua? (b) ¿Cuál es la mínima altura del centro de masas mientras se escapa el agua?

***Determinación del centro de masas por integración**

39 ●● **SSM** Demostrar que el centro de masas de un disco semicircular uniforme de radio R está en un punto que dista $4R/(3\pi)$ del centro del círculo.

40 ●●● Determinar el centro de masas de una semiesfera maciza homogénea de radio R y masa M .

41 ●●● Determinar el centro de masas de una corteza semiesférica delgada.

42 ●●● Una plancha de metal se corta con la forma de la parábola que muestra la figura 8.53, que viene determinada por la ecuación $y = ax^2$, con $0 \leq y \leq b$. Determinar el centro de masas en función de a y de b . (Hay que calcular primero el área.)

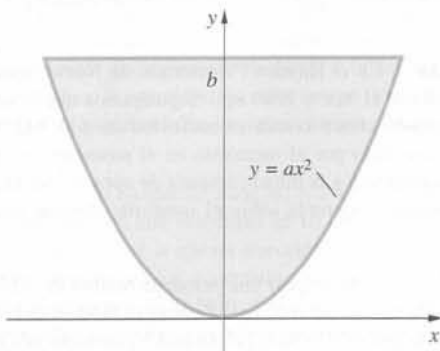


Figura 8.53 Problema 42

Movimiento del centro de masas de un sistema

43 ● **RESOLVER** Dos masas de 3 kg cada una tienen las velocidades $\mathbf{v}_1 = 2 \text{ m/s } \mathbf{i} + 3 \text{ m/s } \mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_2 = 4 \text{ m/s } \mathbf{i} - 6 \text{ m/s } \mathbf{j}$. Determinar la velocidad del centro de masas del sistema.

44 ● **SSM RESOLVER** Un automóvil de 1500 kg se mueve hacia el oeste con una velocidad de 20 m/s y un camión de 3000 kg se mueve hacia el este con una velocidad de 16 m/s. Determinar la velocidad del centro de masas del sistema.

45 ● **RESOLVER** Una fuerza $\mathbf{F} = 12 \text{ N } \mathbf{i}$ se aplica a la bola de 3 kg de la figura 8.51 del problema 35. ¿Cuál es la aceleración del centro de masas?

46 ●● Un bloque de masa m está sujeto a una cuerda y suspendido dentro de una caja hueca de masa M . La caja descansa sobre una balanza que mide el peso del sistema. (a) Si la cuerda se rompe, ¿cambia la lectura de la balanza? Razonar la respuesta. (b) Suponer que la cuerda se rompe y la masa m cae con aceleración constante g . Determinar la aceleración del centro de masas, tanto en dirección como en módulo. (c) Utilizando el resultado de (b), determinar la lectura de la balanza, mientras m se encuentra en caída libre.

47 ●● **SSM** Un muelle vertical de constante de fuerza k está sujeto por la parte inferior a una plataforma de masa m_p y en la parte superior posee una cápsula sin masa como indica la figura 8.54. La plataforma reposa sobre una balanza. Una bola de masa m_b se deja caer en la cápsula desde una altura despreciable. ¿Cuál es la lectura de la balanza cuando (a) el muelle se comprime la longitud $d = m_b g/k$? (b) La bola alcanza momentáneamente el reposo con el muelle comprimido? (c) La bola alcanza de nuevo el reposo en su posición original?



Figura 8.54 Problemas 47, 49 y 136

48 ●● **SSM** En la máquina de Atwood de la figura 8.55, la cuerda pasa por un cilindro fijo, sin rozamiento, de masa m_c . (a) Determinar la aceleración del centro de masas del sistema formado por los dos bloques y el cilindro. (b) Utilizar la segunda ley de Newton (para sistemas) para determinar la fuerza F ejercida por el soporte. (c) Determinar la tensión de la cuerda que conecta los bloques y demostrar que $F = m_c g + 2 T$.

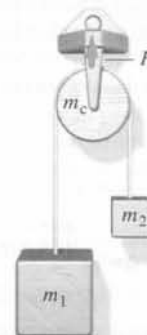


Figura 8.55 Problema 48

- 49 ●● **¡SOLVE!** Repetir los problemas 47a y 47b pero ahora dejando caer la bola sobre la cápsula desde una altura h por encima de la misma.

Conservación del momento lineal

- 50 ● **¡SOLVE!** Una muchacha de 55 kg de masa salta hacia afuera desde la proa de una canoa de 75 kg que está inicialmente en reposo. Si la velocidad de la muchacha es de 2,5 m/s hacia la derecha, ¿cuál será la velocidad de la canoa después del salto?

- 51 ● Dos masas de 5 kg y 10 kg situadas sobre una masa sin rozamiento están conectadas por un muelle comprimido. Cuando el muelle se libera, la masa menor posee una velocidad de 8 m/s hacia la izquierda. ¿Cuál es la velocidad de la masa mayor?

- 52 ● **SSM** La figura 8.56 muestra el aspecto de un proyectil un instante después de haber estallado en tres fragmentos. ¿Cuál era la velocidad del proyectil un instante antes de su explosión? (a) v_3 , (b) $v_3/3$, (c) $v_3/4$, (d) $4v_3$, (e) $(v_1 + v_2 + v_3)/4$

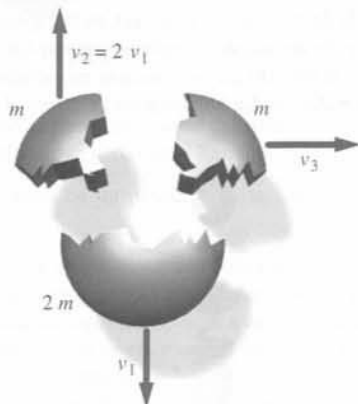


Figura 8.56 Problema 52

- 53 ● Una granada de masa m y velocidad v explota en dos fragmentos idénticos. Si la granada se movía horizontalmente respecto a la Tierra y después de la explosión uno de los fragmentos se mueve verticalmente con el módulo de la velocidad v , determinar la velocidad v' del otro fragmento.

- 54 ●● **SSM** Un bloque y una pistola cargada con una bala están firmemente fijos en los extremos opuestos de una barra deslizante montada en una guía de aire sin rozamiento (figura 8.57). El bloque y la pistola están separados una distancia L , y el sistema está inicialmente en reposo. Se dispara la pistola y la bala sale de la boca del arma con velocidad v_b , impacta con el bloque y se incrusta. La masa de la bala es m_b , y la del sistema pistola-raíl-bloque, m_p . (a) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma inmediatamente después de que la bala abandone la pistola? (b) ¿Cuál es la velocidad de la plataforma inmediatamente después de que la bala quede en reposo dentro del bloque? (c) ¿Qué distancia ha recorrido el bloque desde su posición inicial hasta que la bala se detiene en el bloque?



Figura 8.57 Problema 54

- 55 ●● Un pequeño objeto de masa m desliza hacia abajo por una cuña de masa $2m$ y luego se desliza suavemente sobre una mesa sin rozamiento. La cuña está inicialmente en reposo sobre la mesa. Si el objeto está inicialmente en reposo a una altura h por encima de la mesa, determinar la velocidad de la cuña cuando el objeto se separa de ésta.

- 56 ●● **SSM** En una guía de aire se colocan dos piezas con imanes que se atraen uno a otro (véase la figura 8.58). La masa de la primera pieza es de 0,10 kg y la de la segunda de 0,20 kg (cada una incluye la masa propia de la pieza más la del imán). Se sitúa el origen en el extremo izquierdo, el centro de la pieza 1 está en $x = 0,1$ m y el centro de la pieza 2 está en $x = 1,60$ m. La pieza 1 mide 10 cm y la 2, 20 cm, y ambas piezas tienen el centro de masas en su centro. (a) Cuando se sueltan las dos piezas se mueven una al encuentro de la otra y quedan enganchadas. ¿Cuál es la posición de los centros de cada pieza cuando chocan por primera vez? (b) ¿Seguirán moviéndose después del choque? Explíquelo.

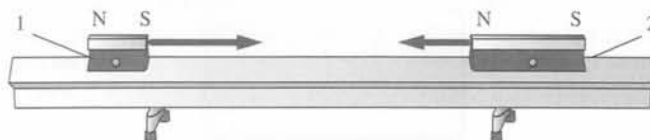


Figura 8.58 Problema 56

Energía cinética de un sistema de partículas

- 57 ● **SSM** **¡SOLVE!** Un bloque de 3 kg se mueve hacia la derecha a 5 m/s y un segundo bloque de 3 kg se mueve hacia la izquierda a 2 m/s. (a) Hallar la energía cinética total de ambos bloques en este sistema. (b) Hallar la velocidad del centro de masas del sistema formado por los dos bloques. (c) Hallar las velocidades de los dos bloques respecto al centro de masas. (d) Hallar la energía cinética del movimiento respecto al centro de masas. (e) Demostrar que la respuesta del apartado (a) es mayor que la correspondiente al apartado (d) en una cantidad igual a la energía cinética del centro de masas.

- 58 ● Repetir el problema 57 para un segundo bloque de masa 5 kg que reemplaza al de 3 kg y que se mueve hacia la derecha con velocidad de 3 m/s.

Impulso y fuerza media

- 59 ● Un balón de rugby de masa 0,43 kg sale del pie del chutador con una velocidad inicial de 25 m/s. (a) ¿Cuál es el impulso impartido al balón por el chutador? (b) Si el pie del jugador está en contacto con el balón durante 0,008 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el pie sobre el balón?

- 60 ● Un ladrillo de 0,3 kg se deja caer desde una altura de 8 m. Choca contra el suelo y queda en reposo. (a) ¿Cuál es el impulso ejercido por el suelo sobre el ladrillo? (b) Si desde que el ladrillo toca el suelo hasta que queda en reposo transcurren 0,0013 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el suelo sobre el ladrillo?

- 61 ● **SSM** En el Hayden Planetarium de Nueva York se exhibe un meteorito de 30,8 ton (1 ton = 1000 kg). Supongamos que la energía cinética del meteorito cuando chocó contra el suelo fue de 617 MJ. Determinar el impulso I experimentado por el meteorito en el momento en que su energía cinética se había reducido a la mitad (después de unos 0,3 s). Determinar también la fuerza media F ejercida sobre el meteorito durante este intervalo de tiempo.

- 62 ●● **¡SOLVE!** Al golpear una pelota de béisbol de 0,15 kg, su velocidad cambia de +20 m/s a -20 m/s. (a) ¿Cuál es el módulo del impulso impartido por el bate a la pelota? (b) Si la pelota está en contacto con el bate durante 1,3 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por el bate sobre la pelota?

63 ●● SSM **¡SOLVE!** Una pelota de frontón de 60 g a la velocidad de 5,0 m/s, choca contra la pared bajo un ángulo de 40° y rebota con la misma velocidad y el mismo ángulo. Si está en contacto con la pared durante 2 ms, ¿cuál es la fuerza media ejercida por la bola sobre la pared?

64 ●● **¡SOLVE!** Se lanza una pelota de 150 g a una altura de 40 m. (a) Utilizar un valor razonable para la distancia que recorrerá la pelota de manera que mientras se encuentre en la mano de la persona que la lanza se pueda calcular la fuerza media ejercida y el tiempo que la pelota permanece en la mano durante el lanzamiento. (b) ¿Es posible despreciar el peso de la pelota mientras ésta es lanzada?

65 ●● Una pelota de frontón de 60 g de masa se lanza perpendicularmente contra una pared con una velocidad de 10 m/s. Rebota con una velocidad de 8 m/s. (a) ¿Qué impulso se ha transmitido a la pared? (b) Si el contacto entre la pelota y la pared dura 0,003 s, ¿qué fuerza media se ejerce sobre la pared? (c) La pelota la recoge un jugador que la deja en reposo. En el proceso sus manos retroceden 0,5 m. ¿Cuál es el impulso recibido por el jugador? (d) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el jugador por la pelota?

66 ●●● **¡SOLVE!** Las grandes cavernas de piedra caliza se formaron gracias al goteo constante de agua. (a) ¿Cuál es la fuerza media ejercida sobre el suelo de caliza por las gotas de agua de 0,03 mL que caen desde una altura de 5 m a razón de 10 por minuto? (b) Comparar esta fuerza con el peso de una gota de agua.

Colisiones en una dimensión

67 ● SSM Un coche de 2000 kg se mueve hacia la derecha a 30 m/s en persecución de un segundo coche de igual masa que se mueve también hacia la derecha a 10 m/s. (a) Si los dos coches chocan y quedan acoplados, ¿cuál es su velocidad inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de los coches se pierde durante esta colisión? ¿A dónde va a parar esta energía?

68 ● Un jugador de rugby de 85 kg que se mueve a la velocidad de 7 m/s realiza un choque perfectamente inelástico con un defensa de 105 kg que está inicialmente en reposo. ¿Cuál es la velocidad de los jugadores inmediatamente después de la colisión?

69 ● Un cuerpo de 5 kg con una velocidad de 4,0 m/s choca frontalmente con otro de 10 kg que se mueve hacia él con una velocidad de 3,0 m/s. Si el bloque de 10 kg queda inmóvil después del choque, (a) ¿cuál es la velocidad final del cuerpo de 5 kg? (b) ¿Es elástico el choque?

70 ● Una bola de masa m se mueve con velocidad v hacia la derecha y choca contra un bate mucho más pesado que se mueve hacia la izquierda con velocidad v . Determinar la velocidad de la bola después del choque elástico con el bate.

71 ●● SSM **¡SOLVE!** Un protón de masa m realiza un choque elástico frontal con un núcleo de carbono estacionario de masa $12m$. La velocidad del protón es de 300 m/s. (a) Determinar la velocidad del centro de masas del sistema. (b) Determinar la velocidad del protón después del choque.

72 ●● Un cuerpo de 3 kg que se mueve con una velocidad de 4 m/s verifica un choque elástico contra un cuerpo estacionario de masa 2 kg. Utilizando el principio de conservación de la cantidad de movimiento, y el hecho de que la velocidad relativa de separación es igual a la velocidad relativa de aproximación, determinar la velocidad de cada cuerpo después de la colisión. Comprobar la respuesta calculando las energías cinéticas inicial y final de cada cuerpo.

73 ●● **¡SOLVE!** Un bloque de masa $m_1 = 2$ kg se desliza a lo largo de una mesa sin rozamiento con una velocidad de 10 m/s. Directamente enfrente de este bloque y moviéndose en la misma dirección con una velocidad de 3 m/s hay otro bloque de masa $m_2 = 5$ kg, conectado a un muelle de masa despreciable y constante de fuerza $k = 1120$ N/m, como se muestra en la figura 8.59. (a) Antes de que m_1 choque contra el muelle, ¿cuál es la velocidad del centro de masas del sistema? (b) Durante del choque, el muelle se comprime hasta un valor máximo Δx . ¿Cuál es el valor de Δx ? (c) Los bloques finalmente se sepa-

ran de nuevo. ¿Cuáles son las velocidades finales de los dos bloques medidas en el sistema de referencia de la mesa?



Figura 8.59 Problema 73

74 ●● SSM **¡SOLVE!** Una bala de masa m se dispara verticalmente desde abajo sobre una lámina delgada de contrachapado de madera de masa M que está inicialmente en reposo, soportada por una lámina delgada de papel. La bala perfora la lámina, la cual asciende hasta una altura H por encima de su posición inicial antes de volver a caer. La bala sigue ascendiendo hasta una altura h . (a) Expresar la velocidad ascendente de la bala y la lámina inmediatamente después de que la primera emerge de la lámina en función de h y H . (b) Utilizar el principio de conservación del momento lineal para expresar la velocidad de la bala antes de que atraviese el bloque de madera en función de m , h , M y H . (c) Obtener expresiones para las energías mecánicas del sistema antes y después de la colisión inelástica. (d) Expresar la energía disipada en la lámina de madera en función de m , h , M y H .

75 ●● Un protón de masa m se mueve con velocidad inicial v_0 hacia una partícula α de masa $4m$ inicialmente en reposo. Como ambas partículas poseen carga eléctrica positiva, se repelen entre sí. Determinar la velocidad v' de la partícula α (a) cuando la distancia entre las dos partículas es mínima y (b) cuando las dos partículas están muy separadas.

76 ● Un electrón choca con un átomo de hidrógeno inicialmente en reposo. Todo el movimiento se da en una línea recta. ¿Qué fracción de la energía cinética inicial se transfiere al átomo? (Considere que la masa del átomo de hidrógeno es 1840 veces la masa de un electrón.)

77 ●● **¡SOLVE!** Una bala de 16 g se dispara contra la lenteja de un péndulo balístico de masa 1,5 kg. Cuando la lenteja está a su altura máxima, las cuerdas forman con la vertical un ángulo de 60° . La longitud del péndulo es de 2,3 m. Determinar la velocidad de la bala.

78 ●● SSM Demostrar que en una colisión elástica en una dimensión, si la masa y la velocidad del objeto 1 son m_1 y v_{1i} y si la masa y la velocidad del objeto 2 son m_2 y v_{2i} , entonces las velocidades finales v_{1f} y v_{2f} vienen dadas por

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

79 ●● Usar los resultados del problema 78 para investigar las colisiones elásticas en una dimensión en los límites siguientes: (a) Cuando las dos masas son iguales, demostrar que las partículas "canjean" velocidades $v_{1f} = v_{2i}$ y $v_{2f} = v_{1i}$. (b) Si $m_2 \gg m_1$, demostrar que $v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i}$ y $v_{2f} \approx v_{2i}$.

Colisiones perfectamente inelásticas y el péndulo balístico

80 ●● Se dispara un proyectil de masa m_1 con una velocidad v sobre un péndulo balístico, que tiene masa m_2 . El péndulo está sujeto a una varilla muy ligera de longitud L que puede girar por su otro extremo. El proyectil se detiene en el péndulo. Hallar la velocidad mínima v para que el péndulo llegue a describir una circunferencia completa.

81 ●● SSM Se dispara un proyectil de masa m_1 con velocidad v sobre un péndulo balístico de masa m_2 . Hallar la máxima altura h alcanzada por éste si el proyectil pasa a través del péndulo y sale con velocidad $v/2$.

82 ● Si tomamos un bloque de madera como los que se usan habitualmente en un péndulo balístico y antes de disparar sobre él la bala lo ponemos en una mesa plana, ¿qué distancia recorrerá hasta pararse? Considerar que la

bala tiene una masa de 10,5 g, que la masa del bloque de madera es de 10,5 kg y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la mesa es 0,22. Suponer también que la bala no induce rotación sobre el bloque.

83 ●● Una bola de 0,425 kg de masa y 1,3 m/s de velocidad rueda por una mesa hasta que entra en una caja vacía de 0,327 kg. La caja con la bola dentro recorre por la mesa una distancia de 0,520 m. ¿Cuál es el coeficiente de rozamiento cinético de la mesa?

84 ●● SSM Tarzán está frente a una estampida de elefantes cuando Jane le rescata colgada de una liana. Si la liana tiene una longitud de 25 m, Jane ha iniciado su salto cuando ésta estaba en posición horizontal, y si la masa de Jane es de 54 kg y la de Tarzán de 82 kg, ¿hasta qué altura por encima del suelo podrá subir la pareja?

Explosiones y desintegraciones radiactivas

85 ●● **¡OLVÉ!** El isótopo del berilio ${}^4\text{Be}$ es inestable y se desintegra en dos partículas α (núcleos de helio de masa $m = 6,68 \times 10^{-27}$ kg), liberándose una energía de $1,5 \times 10^{-14}$ J. Determinar las velocidades de las dos partículas alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ${}^4\text{Be}$ en reposo. Suponer que toda la energía aparece como energía cinética.

86 ●● El isótopo ligero del litio ${}^7\text{Li}$ es inestable y se rompe espontáneamente en un protón (núcleo de hidrógeno) y una partícula alfa (núcleo de helio). En este proceso se libera una energía total de $3,15 \times 10^{-13}$ J, que aparece en forma de energía cinética de los dos productos de reacción. Determinar las velocidades del protón y de la partícula alfa que surgen de la desintegración de un núcleo de ${}^7\text{Li}$ en reposo. (Nota: Las masas del protón y de la partícula alfa son $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg y $m_\alpha = 4 m_p = 6,68 \times 10^{-27}$ kg.)

87 ●●● **¡OLVÉ!** Se lanza un proyectil de 3 kg con un ángulo de 30° sobre la horizontal y con una velocidad inicial de 120 m/s. En la parte superior de su trayectoria, explota en dos partes de 1 y 2 kg de masa. El fragmento de 2 kg cae al suelo directamente debajo del punto de explosión, 3,6 segundos después de que ésta se ha verificado. (a) Determinar la velocidad del fragmento de 1 kg inmediatamente después de la explosión. (b) Determinar la distancia entre el punto del disparo y el punto en el cual el fragmento de 1 kg choca contra el suelo. (c) Determinar la energía liberada en la explosión.

88 ●●● SSM El isótopo de boro ${}^{10}\text{B}$ es inestable y se desintegra en un protón y dos partículas alfa. La energía total liberada en forma de energía cinética de los productos de desintegración es $4,4 \times 10^{-14}$ J. En uno de estos procesos, con el núcleo de ${}^{10}\text{B}$ en reposo antes de la desintegración, la velocidad del protón medida experimentalmente es $6,0 \times 10^6$ m/s. Si las dos partículas alfa tienen energías iguales, determinar el módulo y dirección de sus velocidades respecto a la del protón.

*Coeficiente de restitución

89 ● El coeficiente de restitución del acero sobre acero se mide dejando caer una bola de este material sobre una placa de acero rígidamente ligada a la Tierra. Si la bola se deja caer desde una altura de 3 m y rebota hasta 2,5 m, ¿cuál es el coeficiente de restitución?

90 ● SSM De acuerdo con las normas oficiales del juego de pelota con raqueta, una pelota aceptable para un torneo debe rebotar hasta una altura comprendida entre 173 y 183 cm cuando se deja caer libremente desde una altura de 254 cm a temperatura ambiente. ¿Cuál es el intervalo aceptable de valores del coeficiente de restitución para el sistema pelota-suelo?

91 ● **¡OLVÉ!** Una pelota rebota hasta el 80 por ciento de su altura original. (a) ¿Qué fracción de su energía mecánica se pierde en cada rebote? (b) ¿Cuál es el coeficiente de restitución del sistema pelota-suelo?

92 ●● **¡OLVÉ!** Un bloque de 2 kg se mueve con una velocidad de 6 m/s y choca frontalmente con un bloque de 4 kg inicialmente en reposo. Después del choque, el bloque de 2 kg retrocede con velocidad de 1 m/s. (a) Calcular la velocidad del bloque de 4 kg después del choque. (b) Calcular la energía perdida en el choque. (c) ¿Cuál es el coeficiente de restitución para este choque?

93 ●● Un bloque de 2 kg que se mueve hacia la derecha con velocidad de 5 m/s choca con un bloque de 3 kg que se mueve en la misma dirección a 2 m/s, como indica la figura 8.60. Después del choque, el bloque de 3 kg se mueve a 4,2 m/s. Determinar (a) la velocidad del bloque de 2 kg después del choque y (b) el coeficiente de restitución de la colisión.



Figura 8.60 Problema 93

*Colisiones en tres dimensiones

94 ●● SSM En la sección 8.6 se probó, mediante argumentos geométricos, que cuando una partícula choca elásticamente con otra de igual masa que inicialmente está en reposo, las dos se separan formando un ángulo recto. En este problema examinamos otra forma de demostrar este resultado que ilustra la potencia de la notación vectorial. (a) Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$, demostrar que $A^2 = B^2 + C^2 + 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$. (b) Sea \mathbf{P} el momento inicial de la primera partícula y sean \mathbf{p}_1 y \mathbf{p}_2 los momentos de las partículas tras la colisión. Escribiendo la ecuación para la conservación del momento, realizando el producto escalar de cada término por él mismo, y comparando con la ecuación para la conservación de la energía, demostrar que $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$.

95 ● En un juego de billar, la bola golpeada por el taco, con una velocidad inicial de 5 m/s, realiza un choque elástico con la bola ocho que está inicialmente en reposo. Después del choque, la bola ocho se mueve formando un ángulo de 30° con la bola golpeada. (a) Determinar la dirección del movimiento de esta última después de la colisión. (b) Calcular la velocidad de cada bola. Suponer que las bolas tienen igual masa.

96 ●● Un objeto A de masa m choca con una velocidad $v_0 \mathbf{i}$ contra un objeto B de masa $2m$ con velocidad $\frac{1}{2}v_0 \mathbf{j}$. Después de la colisión, el objeto B posee una velocidad $\frac{1}{4}v_0 \mathbf{i}$. (a) Determinar la velocidad del objeto A después de la colisión. (b) ¿Es esta una colisión elástica? Si no lo es, expresar la variación de energía cinética en función de m y v_0 .

97 ●● SSM **¡OLVÉ!** Un disco de masa 0,5 kg se aproxima a otro semejante que se encuentra estacionario sobre hielo sin rozamiento. La velocidad inicial del disco móvil es de 2 m/s. Después del choque, el primer disco sale con velocidad v_1 formando un ángulo de 30° con la línea original de movimiento; el segundo disco sale con velocidad v_2 a 60° , como indica la figura 8.61. (a) Calcular v_1 y v_2 . (b) ¿Fue elástica la colisión?

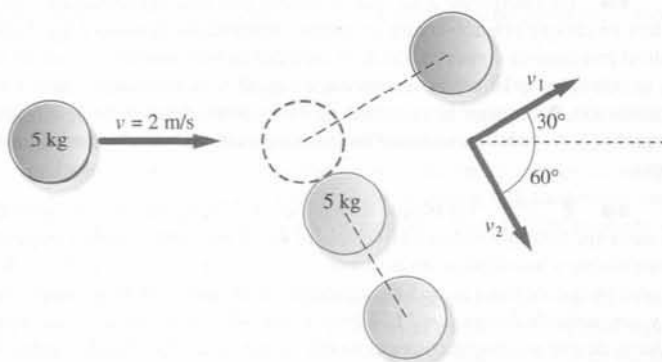


Figura 8.61 Problema 97