# 2 RELACIÓN LINEAL

La medición por su naturaleza, es de la clase de procesos mediante los cuales, tanto el científico como el ingeniero, tejen el puente entre el fenómeno físico observado y las hipótesis previas sobre el comportamiento del mismo. Es por esta razón que cuando se planea un experimento, se busca obtener la mayor cantidad de datos posibles de las variables que dan cuenta del fenómeno para establecer las posibles relaciones entre ellas, en el caso de que existan.

Con esta práctica se pretende que el estudiante se familiarice con métodos que son propios de los investigadores en la extracción de información relevante de un sistema, a partir de los datos y, en el caso de la ingeniería, es una herramienta directa para el análisis de los procesos, proyección de escenarios y en la toma de decisiones que tienen impacto en el diseño y el control.

El primer paso en el análisis de los datos obtenidos experimentalmente es hacer una descripción gráfica de ellos en papel milimetrado mediante un diagrama de dispersión, habiendo seleccionado según criterios adecuados la variable dependiente e independiente y tomando en cuenta el uso apropiado de la escala para la representación de los mismos.

## 2.1 Marco conceptual

En la relación entre dos variables, el comportamiento de una de ellas (variable dependiente) se define en función del valor que toma la otra (variable independiente). Sea X la variable independiente, cuyos valores determinan el valor que tomará la variable Y, que sería entonces la variable dependiente. La forma funcional más sencilla que relaciona a estas variables es conocida como lineal y su expresión matemática es:

$$Y = A + BX \tag{2.1}$$

Donde $A$es un parámetro que representa el valor que toma la variable Y cuando la variable X es igual a cero (llamado así, punto de corte). En tanto que el parámetro $B$ representa la razón de proporcionalidad entre las variables e indica el grado de inclinación o pendiente de la línea recta en una gráfica bidimensional de las variables.

Desde el punto de vista experimental cuando se tienen mediciones de las variables a relacionar, son muchas las posibilidades para obtener los parámetros $A$y $B$. El primer criterio de aproximación a estos valores se hace a través de una inspección de la tendencia lineal de la nube de puntos graficados. Dado que son muchas las alternativas para trazar líneas rectas a través de la nube de puntos, serían abundantes las relaciones lineales y por lo tanto muchos y diversos los valores de los parámetros A y B; la cuestión a resolver es que, involucrando todas las mediciones, se obtengan los parámetros (pendiente y punto de corte) de la línea recta estadísticamente más representativa (óptima). Por tanto, se requiere un método de optimización de carácter estadístico que conlleve a hallar la recta que satisfaga el mejor ajuste a la nube de puntos. Este procedimiento de ajuste es conocido como método de mínimos cuadrados y se basa en establecer que: “la suma de los cuadrados de las diferencias entre un punto medido y el posible valor teórico de la variable, sea un mínimo”. Debido a que el método utilizado proviene del ámbito de la estadística, siempre se busca una medida que indique el grado o bondad de ajuste entre los datos a través de un parámetro conocido como coeficiente de correlación, que proviene de la medición de la variabilidad simultánea de un par de cantidades (Bustamante et al., 2013).

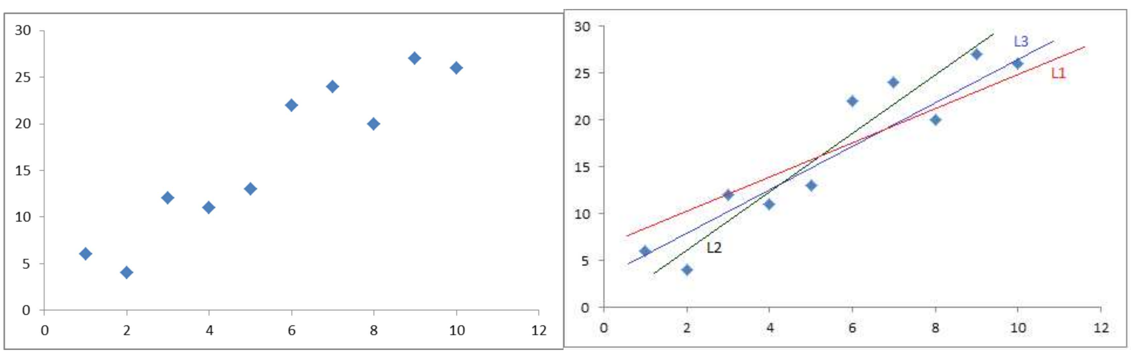


**Figura 2.1** (a) Dispersión de la nube de puntos experimentales para los cuales se sospecha un comportamiento lineal. (b) Representación de posibles rectas que se podrían trazar a través de la nube de puntos experimentales donde cada una de las líneas posee sus respectivos parámetros A y B.

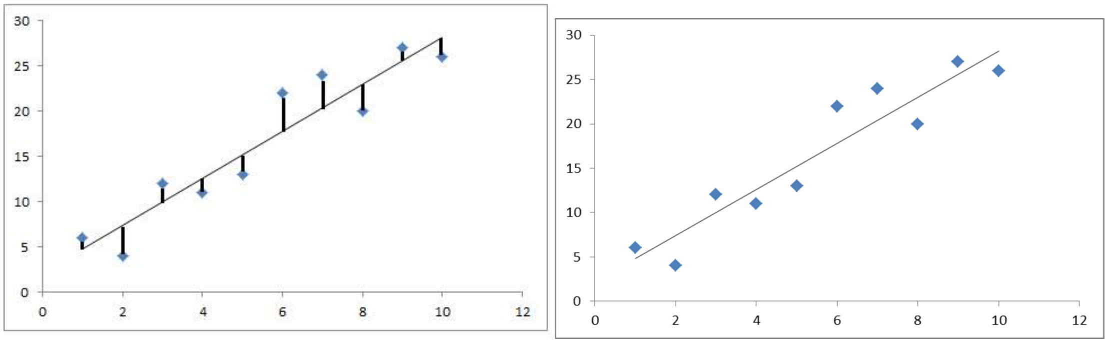


**Figura 2.2** (a) Ajuste de la recta óptima trazada usando el criterio de que la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a ella, sea mínimo. (b) La recta trazada por mínimos cuadrados posee sus respectivos parámetros A y B calculados por las ecuaciones 2.2 y 2.3

Finalmente, el método de mínimos cuadrados nos brinda los algoritmos matemáticos para hallar los parámetros A y B de la recta ajustada y el coeficiente de correlación.

$$\mathrm{B} = \frac{n\bar{X}\bar{Y} - \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_i Y_i}{n\bar{X}^2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_i^2} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{\bar{X}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_i Y_i - \bar{Y}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n\bar{X}^2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_i^2} \tag{2.3}$$

Donde *n* corresponde al número total de datos medidos para cada variable X, Y y por lo tanto finalmente coincide con el número total de parejas ordenadas (X, Y). $\bar{X}$ y $\bar{Y}$ representan el valor medio de cada uno de los conjuntos de datos de las variables.

Se define la ***correlación*** como una medida de la covariabilidad (variabilidad mutua entre las cantidades en estudio), que no depende de la escala. La correlación entre dos variables aleatorias está dada por:

$$\mathrm{R} = \frac{Cov(X,Y)}{s_x s_y} = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\bar{Y}}{s_x s_y} \tag{2.4}$$

Aquí $s_x$ y $s_y$ son las desviaciones estándar respectivas del conjunto de datos de la variable X y de la variable Y.

Mediante un simple experimento de medición ejecutado para dos variables se ilustrará la dependencia funcional de tipo lineal entre ellas. Las variables a medir serán el perímetro y el diámetro de un conjunto o muestra de círculos.

Es sabido desde el pensamiento griego antiguo, que el perímetro (p) de una circunferencia es directamente proporcional a su diámetro (d), pues basta multiplicar éste último por una constante que equivale al número$\pi$, que matemáticamente se escribe:

$$p = \pi . d \tag{2.5}$$

También encontraron otras relaciones matemáticas que caracterizan los círculos, esferas y muchas otras figuras geométricas en 2 y 3 dimensiones.

Desde el punto de vista experimental de los datos entre p y d, es conveniente ajustar una relación lineal para confirmar la relación teórica (Bustamante et al, 2012).

## 2.2 Materiales, Métodos y Actividades

Los propósitos de esta práctica experimental serán:

- Establecer la dependencia funcional entre dos variables
- Hallar experimentalmente el valor del número pi ($\pi$)
- Encontrar la relación o ecuación entre el perímetro (p) y el correspondiente diámetro (d) de una circunferencia cualquiera.

Para el experimento el estudiante encontrará círculos de diferentes tamaños a los cuales se les medirá su diámetro y su perímetro con la ayuda de una cuerda y una regla. Recuerde que los aparatos con los que se pretenden obtener las mediciones experimentales presentan un grado de incertidumbre, sin olvidar que al momento de realizar los análisis de resultados éstos jugarán un papel importante para satisfacer los propósitos planteados. Además en todo método experimental se presentan errores de diferentes tipos (Bustamante et al, 2012), en especial los debidos al operador ycalibración de los instrumentos, entre otros.

Con la cuerda que se da para la práctica mida el perímetro de las circunferencias y su correspondiente diámetro con una regla. Anote los valores en la siguiente tabla de datos (tabla 2.1)

Tabla 2.1. Valores de Diámetro y Perímetro de círculos

| Círculo | Diámetro (cm) ± incertidumbre | Perímetro (cm) ± incertidumbre |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |

Una vez medidas las cantidades solicitadas para los diferentes círculos presentados para la práctica, el estudiante debe decidir cuál de las dos variables medidas, definirá el comportamiento de la otra. Para el registro de las mediciones no olvide tener en cuenta que toda medida experimental se representa con su respectiva unidad de medición junto con su respectivo grado de incertidumbre.

Corte esta página y entréguela al profesor si lo pide

Elabore una gráfica de una de las variables en función de la otra teniendo en cuenta la decisión tomada al respecto, y obtenga la relación entre estas variables.

Corte esta página y entréguela al profesor si lo pide

## 2.3 Claves para el reporte

Con los datos de la tabla y mediante el método de mínimos cuadrados halle la relación entre el perímetro y el diámetro para un círculo genérico representativo de todos los demás. ¿Qué opinión le merece el valor obtenido del coeficiente de correlación R? Escriba el modelo matemático obtenido.

Tome uno de los diámetros de su tabla y usando el modelo matemático obtenido calcule el valor respectivo del perímetro. Compare el resultado con el valor registrado en la tabla para el diámetro correspondiente, ¿qué tan desviado es?

Compare las predicciones arrojadas para el perímetro tanto para los modelos teórico, ecuación 2.4, como para el experimental hallado, correspondientes a un mismo diámetro dado ¿Qué tan desviados están entre sí? Ayuda: utilice la siguiente ecuación:

$$desviaciónrelativaporcentual = \left|\frac{Valorteórico - Valorexperimental}{Valorteórico}\right| .100\%$$

Note que ahora cuenta con un modelo matemático que le permite predecir el valor del perímetro de una circunferencia para cualquier diámetro. Tome en cuenta que interpolar se refiere a estimar con un buen margen de precisión el valor de una variable dentro del rango de los valores medidos. Calcule el valor del perímetro de una circunferencia que tenga un diámetro que esté comprendido entre el 2do y el 3er dato de los valores de su tabla.

Además, extrapolar es predecir el valor que tomaría una de las variables fuera de este rango. Calcule el valor del perímetro de una circunferencia que tenga un diámetro que esté fuera del rango de los datos de los valores de su tabla ¿Cuánto valdría el perímetro si el diámetro fuera igual a 0?¿Es su resultado lógico? Justifique su respuesta.

Compare el resultado experimental de $\pi$ con el teórico y calcule la desviación relativa porcentual correspondiente de $\pi$ usando los valores obtenidos a partir de su modelo experimental y del modelo teórico. Recuerde usar el número de cifras significativas de acuerdo con la incertidumbre de la medida.

Mencione y evalúe las posibles causas de error que se presentaron en la práctica. ¿Es la cuerda un elemento adecuado para medir el perímetro? Justifique su respuesta.