

# DINÁMICA DEL MOVIMIENTO ROTACIONAL

# 10



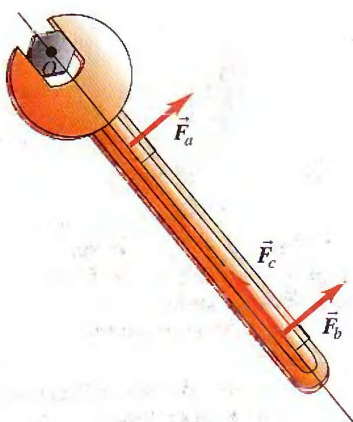
Al dar volteretas, este acróbata no es un cuerpo rígido, y ello le permite variar su rapidez rotacional en el aire. Si mueve sus brazos y piernas hacia afuera, su rotación se hace más lenta; si los pega al cuerpo, gira más rápidamente.

? Si el acróbata no está tocando el suelo, ¿cómo puede alterar su rapidez de rotación? ¿Qué principio físico opera aquí?

**E**n los capítulos 4 y 5 aprendimos que una fuerza neta aplicada a un cuerpo imparte una aceleración a ese cuerpo. Sin embargo, ¿qué se requiere para impartir a un cuerpo una aceleración *angular*? Es decir, ¿qué se necesita para poner a girar un cuerpo estacionario o para detener un cuerpo que está dando vueltas? Se requiere una fuerza, pero debe aplicarse de tal manera que imprima una acción de torcer o de dar vuelta.

En este capítulo definiremos una nueva cantidad física, *momento de torsión*, que describe la acción de torsión o giro de una fuerza. Veremos que el momento de torsión neto que actúa sobre un cuerpo rígido determina su aceleración angular, así como la fuerza neta sobre un cuerpo determina su aceleración lineal. También examinaremos el trabajo y la potencia en el movimiento rotacional a fin de entender los problemas del tipo de cómo el eje giratorio de un auto transmite energía. Por último, desarrollaremos un nuevo principio de conservación, la *conserva-*



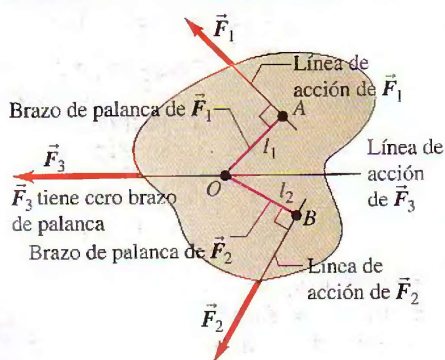


**10.1** ¿Cuál de estas tres fuerzas de igual magnitud tiene mayor probabilidad de aflojar el perno apretado?



## 7.1 Cálculo de momentos de torsión

Momento de torsión =  
(magnitud de fuerza)  $\times$  (brazo de palanca)



**10.2** El momento de torsión de una fuerza alrededor de un punto es el producto de la magnitud de la fuerza y el brazo de palanca.

ción de la cantidad de movimiento angular, que es muy útil para entender la rotación de cuerpos tanto rígidos como no rígidos. Terminaremos el capítulo con el estudio de los *giróscopos*, dispositivos giratorios que al parecer desafían el sentido común y no se caen cuando creemos que deberían hacerlo, aunque en realidad su comportamiento se ajusta perfectamente a la dinámica del movimiento rotacional.

## 10.1 | Momento de torsión

¿De qué depende la eficacia de una fuerza para causar o alterar un movimiento rotacional? La magnitud y dirección de la fuerza son importantes, pero también lo es la posición del punto de aplicación. Si tratamos de abrir una puerta pesada, es mucho más eficaz empujarla lejos del eje de rotación (cerca de la perilla) que cerca de él (cerca de las bisagras). En la figura 10.1, se está usando una llave de tuerca para aflojar un perno apretado. La fuerza  $\vec{F}_b$ , aplicada cerca del extremo del mango, es más eficaz que una fuerza igual  $\vec{F}_a$  aplicada cerca del perno. La fuerza  $\vec{F}_c$  no sirve de nada. Se aplica en el mismo punto y tiene la misma magnitud que  $\vec{F}_b$ , pero está dirigida a lo largo del mango.

La medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para causar o alterar la rotación de un cuerpo se denomina *momento de torsión*. La figura 10.2 muestra un cuerpo que puede girar alrededor de un eje que pasa por el punto  $O$  y es perpendicular al plano de la figura. Sobre el cuerpo actúan tres fuerzas:  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{F}_3$ , en el plano de la figura. La tendencia de  $\vec{F}_1$  a causar una rotación alrededor de  $O$  depende de su magnitud  $F_1$  y también de la distancia perpendicular  $l_1$  entre la **línea de acción** de la fuerza (la línea sobre la que está el vector de fuerza) y  $O$ . Llamamos a  $l_1$  el **brazo de palanca** (o **brazo de momento**) de  $\vec{F}_1$  alrededor de  $O$ . El esfuerzo de torsión es directamente proporcional tanto a  $F_1$  y como a  $l_1$ . Definimos el **momento de torsión** (o **momento**) de  $\vec{F}_1$  respecto a  $O$  como el producto  $F_1 l_1$ . Usaremos la letra griega  $\tau$  ("tau") para el momento de torsión. El momento de torsión de una fuerza de magnitud  $F$  cuya línea de acción está a una distancia perpendicular  $l$  del punto  $O$  es

$$\tau = Fl \quad (10.1)$$

Los físicos prefieren el término "momento de torsión"; los ingenieros prefieren el término "momento" solo (a menos que estén hablando de un eje giratorio, en cuyo caso suelen usar el término "par motor"). Los dos grupos usan "brazo de palanca" o "brazo de momento" para la distancia  $l$ .

El brazo de palanca de  $\vec{F}_1$  en la figura 10.2 es la distancia perpendicular  $OA$  o  $l_1$ , y el de  $\vec{F}_2$  es la distancia perpendicular  $OB$  o  $l_2$ . La línea de acción de  $\vec{F}_3$  pasa por el punto de referencia  $O$ , así que el brazo de palanca de  $\vec{F}_3$  es cero y su momento de torsión respecto al punto  $O$  es cero. Por lo mismo,  $\vec{F}_c$  en la figura 10.1 tiene momento de torsión cero respecto a  $O$ , y  $\vec{F}_b$  tiene mayor momento de torsión que  $\vec{F}_a$  porque su brazo de palanca es mayor.

**CUIDADO** Observe que el momento de torsión siempre se define con referencia a un punto específico, que a menudo (aunque no siempre) es el origen del sistema de coordenadas. Si cambiamos de posición este punto, el momento de torsión de cada fuerza puede cambiar. Por ejemplo, el momento de torsión de  $\vec{F}_3$  en la figura 10.2 es cero respecto a  $O$ , pero no respecto a  $A$  o  $B$ . Al describir el momento de torsión de una fuerza, no basta llamarlo "el momento de torsión de  $\vec{F}$ "; debemos decir "el momento de torsión de  $\vec{F}$  respecto al punto  $X$ " o "el momento de torsión de  $\vec{F}$  alrededor del punto  $X$ ".



En la figura 10.2, la fuerza  $\vec{F}_1$  tiende a causar rotación *antihoraria* alrededor de  $O$ , mientras que  $\vec{F}_2$  tiende a causar rotación *horaria*. Para distinguir entre estas dos posibilidades, necesitamos escoger un sentido de rotación positivo. Si escogemos que los momentos de torsión antihorarios son positivos y los horarios son negativos, los momentos de  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_2$  respecto a  $O$  son

$$\tau_1 = +F_1 l_1 \quad \tau_2 = -F_2 l_2$$

A menudo usaremos el símbolo



para indicar el sentido de rotación positivo que escogimos.

La unidad del momento de torsión en el Sistema Internacional es el newton-metro. Al hablar de trabajo y energía llamamos a ésta combinación joule, pero el momento de torsión *no* es trabajo ni energía, así que debemos expresarlo en newtons-metro, *no* joules.

La figura 10.3 muestra una fuerza  $\vec{F}$  que se aplica en un punto  $P$  descrito por un vector de posición  $\vec{r}$  respecto al punto escogido  $O$ . Hay varias formas de calcular el momento de torsión de  $\vec{F}$ . Una es determinar el brazo de palanca  $l$  y usar  $\tau = Fl$ . O bien, podemos determinar el ángulo  $\phi$  entre los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ ; el brazo de palanca es  $r \sin \phi$ , así que  $\tau = rF \sin \phi$ . Un tercer método es representar  $\vec{F}$  en términos de una componente radial  $F_{\text{rad}}$  en la dirección de  $\vec{r}$  y una componente  $F_{\text{tan}}$  perpendicular a  $\vec{r}$ . (Decimos “tangencial” porque, si el cuerpo gira, el punto en el que actúa la fuerza se mueve en un círculo, y ésta componente es tangente a ese círculo.) Así,  $F_{\text{tan}} = F \sin \phi$  y  $\tau = r(F \sin \phi) = F_{\text{tan}} r$ . La componente  $F_{\text{rad}}$  no tiene momento de torsión respecto a  $O$  porque su brazo de palanca respecto a ese punto es cero (compare con las fuerzas  $\vec{F}_c$  de la figura 10.1 y  $\vec{F}_3$  de la figura 10.2. Resumiendo estas expresiones de momento de torsión, tenemos

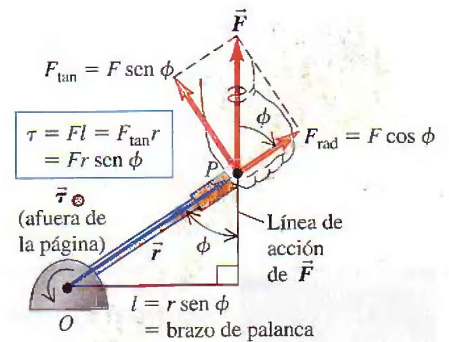
$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\text{tan}} r \quad (\text{magnitud del momento de torsión}) \quad (10.2)$$

En la sección 9.1, vimos que la velocidad y la aceleración angulares pueden representarse como vectores; lo mismo sucede con el momento de torsión. Observe que la cantidad  $rF \sin \phi$  de la ecuación (10.2) es la magnitud del *producto vectorial*  $\vec{r} \times \vec{F}$  que definimos en la sección 1.10. Repase esa definición. Ahora generalizamos la definición de momento de torsión así: Si una fuerza  $\vec{F}$  actúa en un punto que tiene un vector de posición  $\vec{r}$  respecto a un origen  $O$ , como en la figura 10.3, el momento de torsión  $\vec{\tau}$  de la fuerza respecto a  $O$  es la cantidad *vectorial*

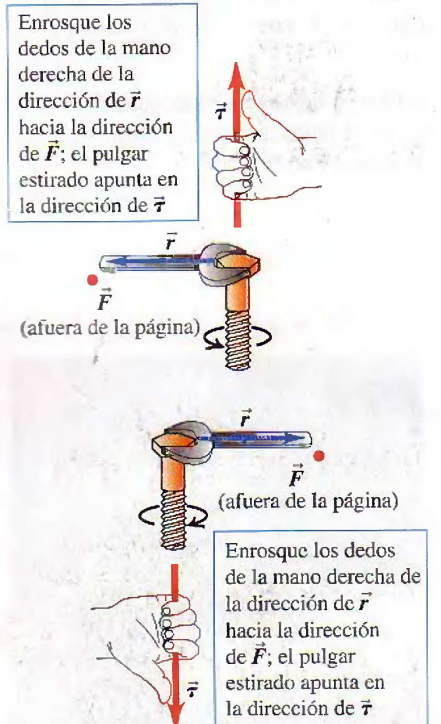
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (\text{definición del vector de momento de torsión}) \quad (10.3)$$

El momento de torsión definido en la ecuación (10.2) es sólo la magnitud del vector de momento de torsión  $\vec{r} \times \vec{F}$ . La dirección de  $\vec{\tau}$  es perpendicular tanto a  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ . En particular, si  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  están en un plano perpendicular al eje de rotación, como en la figura 10.3, el vector de momento de torsión  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  tiene la dirección del eje de rotación, y su sentido está dado por la regla de la mano derecha (Fig. 1.20). Las relaciones de dirección se muestran en la figura 10.4.

En los diagramas en los que intervienen  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  y  $\vec{\tau}$ , es común que uno de los vectores esté orientado en una dirección perpendicular a la página. (De hecho, por la naturaleza misma del producto cruz,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  debe ser perpendicular al plano



**10.3** El momento de torsión de la fuerza  $\vec{F}$  en torno al punto  $O$  se define como  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . La magnitud de  $\vec{\tau}$  es  $rF \sin \phi$ . Aquí,  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  están en el plano del papel; por la regla de la mano derecha del producto vectorial,  $\vec{\tau}$  apunta afuera de la página hacia el lector.



**10.4** El vector de momento de torsión,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$  se dirige sobre el eje del perno, perpendicular tanto a  $\vec{r}$  como a  $\vec{F}$ . La dirección de  $\vec{\tau}$  está dada por la regla de la mano derecha. Vemos que los dedos de la mano derecha se curvan en la dirección de la rotación que el momento tiende a causar.



de los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$ .) Usaremos un punto ( $\bullet$ ) para representar un vector que apunta hacia afuera de la página (véase la Fig. 10.4) y una cruz ( $\times$ ) para representar un vector que apunta hacia adentro de la página.

En las secciones siguientes, normalmente nos interesará la rotación de un cuerpo alrededor de un eje orientado en cierta dirección constante. En tal caso, sólo interesa la componente de momento de torsión sobre ese eje, que normalmente llamaremos el momento de torsión respecto al eje especificado.

### Ejemplo 10.1

### Aplicación de un momento de torsión

Un plomero aficionado que no puede aflojar una junta ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose en él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.80 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de  $19^\circ$  con la horizontal (Fig. 10.5a). Calcule la magnitud y dirección del momento de torsión que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Usaremos la ecuación (10.1) o la (10.2) para obtener la magnitud del momento de torsión, y la regla de la mano derecha con la ecuación (10.3) para hallar su dirección. La figura 10.5b muestra los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{F}$  y el ángulo entre ellos ( $\phi = 109^\circ$ ).

**EJECUTAR:** Para usar la ecuación (10.1), primero calculamos el brazo de palanca. Como muestra la figura 10.5b,  $l$  es la distancia perpendicular de  $O$  a la línea de acción de la fuerza:

$$l = (0.80 \text{ m}) \sin 109^\circ = (0.80 \text{ m}) \sin 71^\circ = 0.76 \text{ m}$$

La ecuación (10.1) nos dice que la magnitud del momento de torsión es

$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$$

O bien, por la ecuación (10.2),

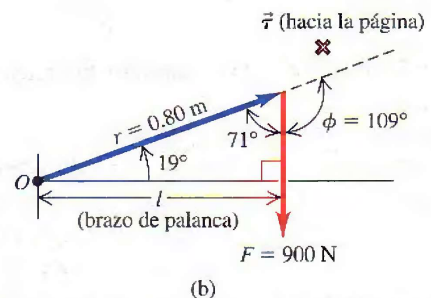
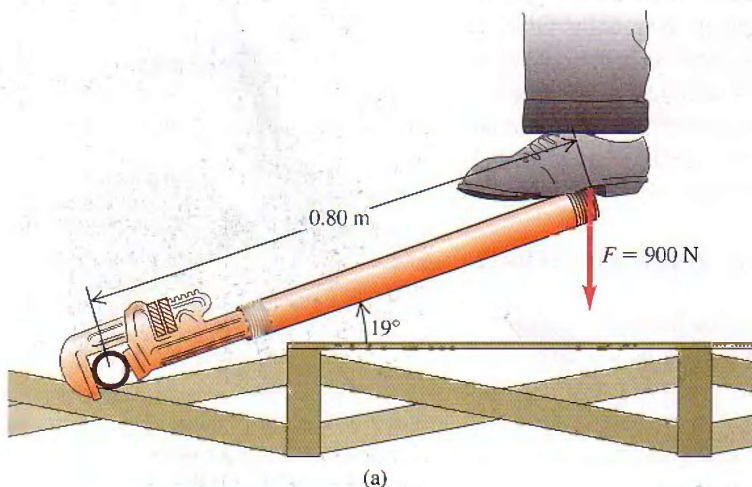
$$\tau = rF \sin \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\sin 109^\circ) = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$$

También podemos calcular  $F_{\tan}$ , la componente tangencial de  $\vec{F}$ , que actúa perpendicular a  $\vec{r}$  (o sea, perpendicular al tubo). El vector  $\vec{r}$  está a  $19^\circ$  de la horizontal, así que una perpendicular a  $\vec{r}$  está orientada a  $19^\circ$  de la vertical. Dado que  $\vec{F}$  es vertical, esto implica que  $F_{\tan} = F(\cos 19^\circ) = (900 \text{ N})(\cos 19^\circ) = 851 \text{ N}$ . El momento de torsión es

$$\tau = F_{\tan}r = (851 \text{ N})(0.80 \text{ m}) = 680 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Si enrosca los dedos de su mano derecha de la dirección de  $\vec{r}$  (en el plano de la figura 10.5b, hacia la derecha y hacia arriba) a la dirección de  $\vec{F}$  (verticalmente hacia abajo), su pulgar derecho apuntará hacia adentro del plano de la figura. Ésta es la dirección del momento de torsión  $\vec{\tau}$ .

**EVALUAR:** Ya verificamos la magnitud obtenida de  $\tau$  calculándola de tres formas distintas. Para verificar la dirección del momento de torsión, observamos que la fuerza de la figura 10.5 tiende a producir una rotación horaria en torno a  $O$ . Si enroscamos los dedos de la mano derecha en dirección horaria, nuestro pulgar apuntará hacia adentro del plano de la figura 10.5, es, en efecto, la dirección del momento de torsión.



**10.5** (a) Un plomero aficionado trata de aflojar una junta parándose en una extensión del mango de la llave de tuercas. (b) Diagrama vectorial para calcular el momento de torsión respecto a  $O$ .



**Evalúe su comprensión**

¿Qué magnitud de fuerza hacia abajo tendría que ejercer el plomero aficionado del ejemplo 10.1 para producir el mismo momento de torsión sin el tubo? La llave de tuercas sola tiene una longitud de 25 cm.

## 10.2 | Momento de torsión y aceleración angular de un cuerpo rígido

Ahora podemos deducir la relación fundamental de la dinámica rotacional de un cuerpo rígido. Demostraremos que la aceleración angular de un cuerpo rígido en rotación es directamente proporcional a la suma de las componentes de momento de torsión sobre el eje de rotación. El factor de proporcionalidad es el momento de inercia.

Para deducir ésta relación, imaginamos otra vez que el cuerpo se compone de un gran número de partículas. Escogemos como eje de rotación el eje  $z$ ; la primera partícula tiene masa  $m_1$  y distancia  $r_1$  respecto a este eje (Fig. 10.6). La fuerza neta que actúa sobre la partícula tiene una componente  $F_{1,\text{rad}}$  en la dirección radial, una componente  $F_{1,\text{tan}}$  tangente al círculo de radio  $r_1$  en que se mueve la partícula al girar el cuerpo, y una componente  $F_{1z}$  sobre el eje de rotación. La segunda ley de Newton para la componente tangencial es

$$F_{1,\text{tan}} = m_1 a_{1,\text{tan}} \quad (10.4)$$

Podemos expresar la aceleración tangencial de la primera partícula en términos de la aceleración angular  $\alpha_z$ , usando la ecuación (9.14):  $a_{1,\text{tan}} = r_1 \alpha_z$ . Con esta relación y multiplicando ambos miembros de la ecuación (10.4) por  $r_1$ , obtenemos

$$F_{1,\text{tan}} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \quad (10.5)$$

Por la ecuación (10.2),  $F_{1,\text{tan}} r_1$  no es más que el *momento de torsión* de la fuerza neta respecto al eje de rotación (igual a la componente  $\tau_{1z}$  del vector de momento de torsión sobre dicho eje). El subíndice  $z$  nos recuerda que el momento de torsión afecta al rotación en torno al eje  $z$ , de la misma manera que el subíndice de  $F_{1z}$  nos recuerda que esta fuerza afecta el movimiento de la partícula 1 a lo largo del eje  $z$ .

Las componentes  $F_{1,\text{rad}}$  y  $F_{1z}$  no contribuyen al momento de torsión alrededor del eje  $z$ , pues ninguna tiende a modificar la rotación de la partícula alrededor de ese eje. Por tanto,  $\tau_{1z} = F_{1,\text{tan}} r_1$  es el momento de torsión total que actúa sobre la partícula respecto al eje de rotación. Además,  $m_1 r_1^2$  es  $I_1$ , el momento de inercia de la partícula alrededor del eje de rotación. Con esto en mente, reescribimos la ecuación (10.5) así:

$$\tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

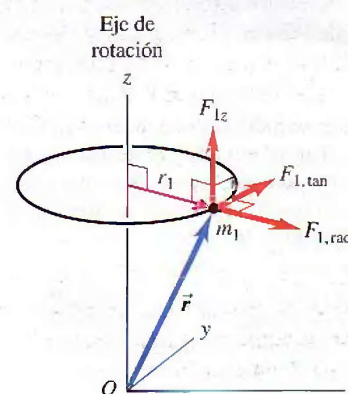
Escribimos una ecuación similar para cada partícula del cuerpo y luego sumamos todas las ecuaciones:

$$\tau_{1z} + \tau_{2z} + \cdots = I_1 \alpha_z + I_2 \alpha_z + \cdots = m_1 r_1^2 \alpha_z + m_2 r_2^2 \alpha_z + \cdots$$

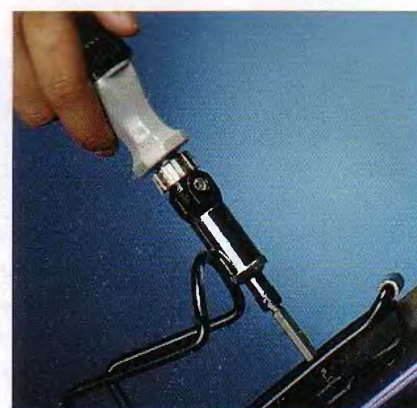
es decir,

$$\sum \tau_{iz} = (\sum m_i r_i^2) \alpha_z$$

El miembro izquierdo de esta ecuación es la suma de todos los momentos de torsión en torno al eje de rotación que actúan sobre todas las partículas. El miembro derecho es  $I = \sum m_i r_i^2$ , el momento de inercia total alrededor del eje de rotación, multiplicado por la aceleración angular  $\alpha_z$ , que es la misma para todas las partículas.



**10.6** Tres componentes de la fuerza neta actúan sobre una de las partículas de un cuerpo rígido. Sólo  $F_{1,\text{tan}}$  tiene una componente  $z$  de momento de torsión alrededor de  $O$ .

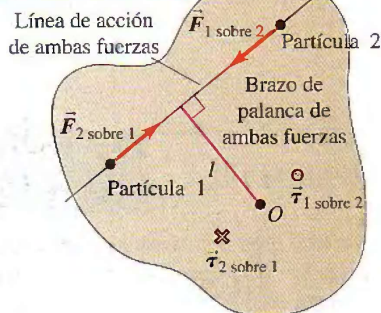


**10.7** Para aflojar o apretar un tornillo, es preciso impartirle una aceleración angular y, por tanto, aplicar un momento de torsión. Esto se facilita si se usa un destornillador con mango de radio grande, pues así se aumenta el brazo de palanca de la fuerza que aplicamos con la mano.



Los momentos de torsión debidos a fuerzas internas se cancelan:

$$\vec{\tau}_1 \text{ sobre } 2 + \vec{\tau}_2 \text{ sobre } 1 = 0$$



**10.8** Dos partículas de un cuerpo rígido ejercen fuerzas iguales y opuestas una sobre la otra. Si estas fuerzas actúan a lo largo de la línea que va de una partícula a la otra, los brazos de palanca de las dos fuerzas son iguales y los momentos de torsión causados por ellas son iguales y opuestos. Sólo los momentos de torsión *externos* afectan la rotación de un cuerpo rígido.



- 7.8 Rotojuego: enfoque de dinámica
- 7.9 Escalera que cae
- 7.10 Mujer y elevador de volante: enfoque de dinámica

las porque se trata de un cuerpo *rígido*. Así, para el cuerpo entero, tenemos el *análogo rotacional de la segunda ley de Newton*:

$$\sum \tau_z = I\alpha_z \quad (10.6)$$

(análogo rotacional de la segunda ley de Newton para un cuerpo rígido)

Así como la segunda ley de Newton dice que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la masa de la partícula multiplicada por su aceleración, la ecuación (10.6) dice que el momento de torsión neto que actúa sobre un cuerpo rígido es igual al momento de inercia del cuerpo alrededor del eje de rotación multiplicado por su aceleración angular (Fig. 10.7).

Subrayamos que la ecuación (10.6) *sólo* es válida para cuerpos *rígidos*. Si el cuerpo no es rígido, como un tanque de agua que gira o un remolino de aire, la aceleración angular  $\alpha_z$  es diferente para diferentes partículas del cuerpo, y la deducción de la ecuación (10.6) no es válida. Además, como en la deducción utilizamos la ecuación (9.14),  $a_{\text{tan}} = r\alpha_z$ ,  $\alpha_z$  debe medirse en  $\text{rad/s}^2$ .

El momento de torsión que actúa sobre cada partícula se debe a la fuerza neta que actúa sobre esa partícula, la cual es la suma vectorial de fuerzas externas e internas (definidas en la sección 8.2). Según la tercera ley de Newton, las fuerzas *internas* que cualquier par de partículas del cuerpo rígido ejercen una sobre la otra son iguales y opuestas (Fig. 10.8). Si estas fuerzas actúan sobre la línea que une a las partículas, sus brazos de palanca respecto a cualquier eje también serán iguales. Así, los momentos de torsión para tales fuerzas son iguales y opuestos, y suman cero. De hecho, *todos* los momentos de torsión internos suman cero, y la suma  $\sum \tau_z$  de la ecuación (10.16) incluye sólo los momentos de torsión de las fuerzas *externas*.

Es común que una fuerza externa importante que actúa sobre un cuerpo sea su *peso*. Esta fuerza no se concentra en un punto: actúa sobre todas las partículas del cuerpo. No obstante, resulta que, si el valor de  $\vec{g}$  es el mismo en todos los puntos, siempre obtenemos el momento de torsión correcto (alrededor de cualquier eje dado) si suponemos que el peso se concentra en el *centro de masa* del cuerpo. Demostraremos esto en el capítulo 11, pero mientras lo usaremos en algunos problemas de éste capítulo.

#### Estrategia para resolver problemas

### Dinámica rotacional de cuerpos rígidos

Nuestra estrategia para resolver problemas de dinámica rotacional es muy similar a la presentada en la sección 5.1 para resolver problemas en los que interviene la segunda ley de Newton.

**IDENTIFICAR** los conceptos relevantes: La ecuación  $\sum \tau_z = I\alpha_z$  es útil en todos los casos en que momentos de torsión actúan sobre un cuerpo rígido; es decir, siempre que fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido de manera tal que alteran el estado de rotación del cuerpo.

En algunos casos, podría preferirse un enfoque de energía, como se hizo en la sección 9.4. Sin embargo, cuando la incógnita es: una fuerza, un momento de torsión, una aceleración, una aceleración angular o un tiempo transcurrido, casi siempre es más eficiente usar  $\sum \tau_z = I\alpha_z$ .

**PLANTEAR** el problema empleando estos pasos:

1. Haga un dibujo de la situación y escoja el cuerpo o cuerpos que analizará.
2. Dibuje un diagrama de cuerpo libre para cada cuerpo, aislando el cuerpo e incluyendo todas las fuerzas que actúan sobre él (y *sólo* ellas), incluido el peso. Marque las cantidades desconocidas con símbolos algebraicos. Una nueva consideración es que se debe mostrar con exactitud la *forma* del cuerpo, incluyendo todas las dimensiones y ángulos que se necesitarán para los cálculos de momento de torsión.
3. Escoja ejes de coordenadas para cada cuerpo e indique un sentido de rotación positivo para cada cuerpo que gire. Si hay una aceleración lineal, lo más sencillo suele ser escoger un eje positivo en su dirección. Si ya conoce el sentido de  $\alpha_z$ , se simplificarán los cálculos si se escoge ése como sentido de rotación positivo. Si representa una fuer-



za en términos de sus componentes, tache la fuerza original para no incluirla dos veces.

### EJECUTAR la solución como sigue:

1. Para cada cuerpo del problema, decida si sufre movimiento: traslacional, movimiento rotacional, o ambos. Dependiendo del comportamiento del cuerpo, aplique  $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$  (como en la sección 5.1), o  $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ , o ambas al cuerpo. Escriba ecuaciones de movimiento aparte para cada cuerpo.
2. Podría haber relaciones geométricas entre los movimientos de dos o más cuerpos, como cuando un hilo se desenrolla de una polea girándola o cuando un neumático gira sin resbalar (lo que veremos en la sección 10.3). Expréselas en forma algebraica, por lo regular como relaciones entre

dos aceleraciones lineales o una aceleración lineal y una angular.

3. Verifique que el número de ecuaciones coincida con el número de incógnitas. Resuelva las ecuaciones para obtener la o las incógnitas.

**EVALUAR la respuesta:** Compruebe que los signos algebraicos de sus resultados sean lógicos. Por ejemplo, suponga que el problema se refiere a un carrete de hilo. Si se está sacando hilo del carrete, las respuestas *no* deberán decirnos que el carrete gira en el sentido en que el hilo se enrolla. Siempre que pueda, verifique los resultados para casos especiales o valores extremos y compárelos con lo que espera intuitivamente. Pregúntese: “¿Es lógico este resultado?”

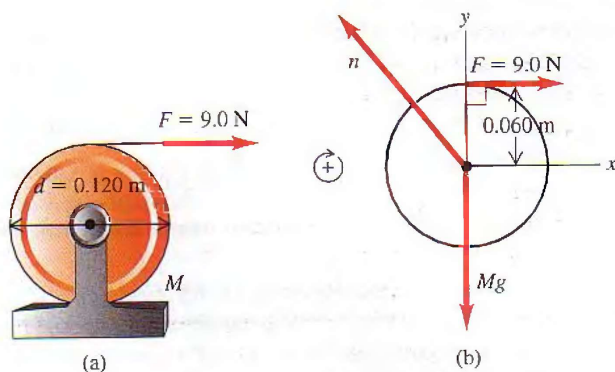
### Ejemplo 10.2

### Cable que se desenrolla

La figura 10.9a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.8 (sección 9.4) usando métodos de energía. Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50 kg con diámetro de 0.120 m, que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.0 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración tiene?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La incógnita es la aceleración del cable, que no podemos obtener directamente empleando el método de energía de la sección 9.4 (pues en él no interviene la aceleración). En vez de ello, aplicaremos dinámica rotacional al cilindro. Para obtener la aceleración del cable, buscaremos una relación entre el movimiento del cable y el movimiento del borde del cilindro.



10.9 (a) Cilindro y cable. (b) Diagrama de cuerpo libre para el cilindro.

**PLANTEAR:** La figura 10.9b muestra el diagrama de cuerpo libre del cilindro de masa  $M = 50$  kg. El cilindro gira en sentido horario cuando se tira del cable, así que tomamos como sentido de rotación positivo el horario. La fuerza neta que actúa sobre el cilindro debe ser cero porque su centro de masa no se mueve. El peso (de magnitud  $Mg$ ) y la fuerza normal (de magnitud  $n$ ) ejercidos por los cojinetes del cilindro actúan sobre líneas que pasan por el eje de rotación y, por lo tanto, no producen un momento de torsión respecto a ese eje.

**EJECUTAR:** El único momento de torsión alrededor del eje de rotación se debe a la fuerza  $F$ , cuyo brazo de palanca es igual al radio  $R$  del cilindro:  $l = R = 0.060$  m, así que  $\tau_z = FR$ . (Este momento de torsión es positivo porque tiende a producir una rotación horaria.) Por el ejemplo 9.8, el momento de inercia del cilindro en torno al eje de rotación es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ . Por tanto, la ecuación (10.6) nos da la aceleración angular del cilindro:

$$\alpha_z = \frac{\tau_z}{I} = \frac{FR}{MR^2/2} = \frac{2F}{MR} = \frac{2(9.0 \text{ N})}{(50 \text{ kg})(0.060 \text{ m})} = 6.0 \text{ rad/s}^2$$

(Verifique que estas unidades sean correctas. Podemos añadir “rad” a nuestro resultado porque el radián es una cantidad adimensional.)

Para obtener la aceleración *lineal* del cable, necesitamos una relación cinemática. En la sección 9.3 señalamos que la aceleración de un cable que se desenrolla de un cilindro es igual a la componente tangencial de aceleración de un punto en la superficie del cilindro donde el cable es tangente a él. Dicha aceleración tangencial está dada por la ecuación (9.14):

$$a_x = R\alpha = (0.060 \text{ m})(6.0 \text{ rad/s}^2) = 0.36 \text{ m/s}^2$$

**EVALUAR:** ¿Puede usar este resultado, junto con una ecuación del capítulo 2, para determinar la rapidez del cable una vez que se ha desenrollado 2.0 m? Inténtelo y compare su resultado con el ejemplo 9.8, donde obtuvimos esta rapidez usando consideraciones de trabajo y energía.



Ejemplo  
10.3

## Cable que se desenrolla II

La figura 10.10a muestra la situación que analizamos en el ejemplo 9.9 (sección 9.4) usando métodos de energía. Calcule la aceleración del objeto de masa  $m$ .

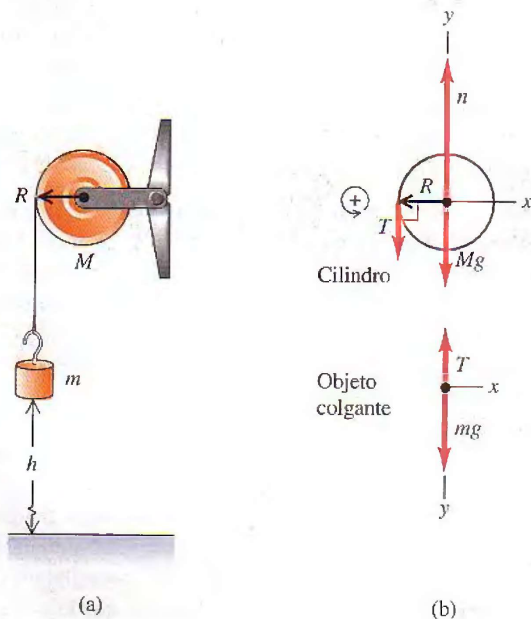
## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Aplicaremos dinámica traslacional al objeto que cuelga y dinámica rotacional al cilindro. Puesto que el cable no resbala sobre el cilindro, existe una relación entre la aceleración lineal del objeto que cuelga (nuestra incógnita) y la aceleración angular del cilindro.

**PLANTEAR:** Debemos tratar los cuerpos por separado. La figura 10.10b muestra un diagrama de cuerpo libre para cada uno. Tomamos el sentido de rotación antihorario como positivo para el cilindro, y la dirección hacia abajo de la coordenada  $y$  como positiva para el objeto.

**EJECUTAR:** La segunda ley de Newton aplicada al objeto da

$$\sum F_y = mg + (-T) = ma_y$$



Para el cilindro, el peso  $Mg$  y la fuerza normal  $n$  (ejercida por el cojinete) no tienen momentos de torsión respecto al eje de rotación porque actúan sobre líneas que pasan por ese eje, igual que en el ejemplo 10.2. El único momento de torsión es el debido a la tensión del cable  $T$ . Aplicando la ecuación (10.6) al cilindro tenemos

$$\sum \tau_z = RT = I\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z$$

Al igual que en el ejemplo 10.2, la aceleración del cable es igual a la aceleración tangencial de un punto en el borde del cilindro, que, según la ecuación (9.14), es  $a_y = a_{\text{tan}} = R\alpha_z$ . Usamos esto para sustituir  $(R\alpha_z)$  por  $a_y$  en la ecuación anterior y luego dividimos entre  $R$ ; el resultado es

$$T = \frac{1}{2}Ma_y$$

Ahora sustituimos esta expresión para  $T$  en la segunda ley de Newton para el objeto y despejamos la aceleración  $a_y$ :

$$mg - \frac{1}{2}Ma_y = ma_y$$

$$a_y = \frac{g}{1 + M/2m}$$

**EVALUAR:** La aceleración es positiva (en la dirección hacia abajo) y menor que  $g$ , como debe ser dado que el cable está frenando al objeto. Para ver cuánta fuerza ejerce el cable, sustituimos nuestra expresión para  $a_y$  en la segunda ley de Newton para el objeto, obteniendo así  $T$ :

$$T = mg - ma_y = mg - m\left(\frac{g}{1 + M/2m}\right) = \frac{mg}{1 + 2m/M}$$

La tensión en el cable *no* es igual al peso  $mg$  del objeto; si así fuera, el objeto no podría acelerar.

Revisemos algunos casos específicos. Si  $M$  es mucho mayor que  $m$ , la tensión es casi igual a  $mg$ , y por tanto la aceleración es mucho menor que  $g$ . Si  $M = 0$ ,  $T = 0$  y  $a_y = g$ ; el objeto cae libremente. Si el objeto parte de una altura  $h$  sobre el piso con rapidez inicial  $v_0$ , su rapidez  $v$  al golpear el piso está dada por  $v^2 = v_0^2 + 2a_y h$ . Si parte del reposo,  $v_0 = 0$  y

$$v = \sqrt{2a_y h} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + M/2m}}$$

Éste es el mismo resultado que obtuvimos usando consideraciones de energía en el ejemplo 9.9.

**10.10** (a) Cilindro, objeto y cable. (b) Diagramas de cuerpo libre para el cilindro y el objeto que cuelga. La masa del cable se supone despreciable.

Ejemplo  
10.4

## Dos masas y una polea que gira

En la figura 10.11a, un deslizador de masa  $m_1$  se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa  $m_2$  con un hilo sin masa. La polea es un cilindro hueco delgado (con rayos

sin masa) de masa  $M$  y radio  $R$ , y el hilo la gira sin resbalar ni estirarse. Calcule la aceleración de cada cuerpo, la aceleración angular de la polea y la tensión en cada parte del hilo.



**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Usaremos dinámica traslacional para describir el movimiento del deslizador y del objeto que cuelga, y dinámica rotacional para describir el movimiento de la polea. Dado que el hilo no se estira, tanto el deslizador como el objeto tienen la misma magnitud de aceleración; el borde de la polea tiene una aceleración *tangencial* con la misma magnitud porque el hilo no resbala.

**PLANTEAR:** La figura 10.11b muestra los diagramas de cuerpo libre y los sistemas de coordenadas para los tres cuerpos. Con las coordenadas que escogimos, el deslizador y el objeto aceleran en sus direcciones positivas  $x$  y  $y$ , respectivamente. Asimismo escogemos el sentido positivo de rotación como el horario (el mismo que la aceleración angular de la polea). Tenemos cinco incógnitas: la aceleración del deslizador ( $a_{1x}$ ), la aceleración del objeto ( $a_{2y}$ ), la aceleración angular de la polea,  $\alpha_z$  y las dos tensiones ( $T_1$  y  $T_2$ ). A primera vista, el problema parece imponente, pero tendremos tantas ecuaciones como incógnitas, y resolverlas será más fácil de lo que el lector imagina.

**CUIDADO** Consideramos una situación similar en el ejemplo 5.13 (sección 5.2). Ahí, el hilo se deslizaba sin fricción sobre una polea fija, y la tensión era la misma en todo el hilo sin masa. Con una polea giratoria, y fricción entre la polea y el hilo para evitar deslizamientos, las dos tensiones  $T_1$  y  $T_2$  no pueden ser iguales. Si lo fueran, la polea no podría tener aceleración angular. Marcar la tensión en ambas partes del hilo como  $T$  sería un error grave. Cuidese de este error en cualquier problema que implique una polea que gira.

**EJECUTAR:** Las ecuaciones de movimiento para el deslizador y el objeto son

$$\text{Deslizador: } \sum F_x = T_1 = m_1 a_{1x} \quad (10.7)$$

$$\text{Objeto: } \sum F_y = m_2 g + (-T_2) = m_2 a_{2y} \quad (10.8)$$

La fuerza normal desconocida  $n_2$  actúa en una línea que pasa por el eje de rotación de la polea, así que no tiene brazo de palanca ni momento de torsión respecto a ese eje. De la tabla 9.2, el momento de inercia de la polea sobre éste eje es  $I = MR^2$ . La ecuación de movimiento de la polea es entonces

$$\text{Polea: } \sum \tau_z = T_2 R + (-T_1 R) = I \alpha_z = (MR^2) \alpha_z \quad (10.9)$$

Dado que el hilo no se estira ni resbala, tenemos las relaciones *cinemáticas* adicionales

$$a_{1x} = a_{2y} = R \alpha_z \quad (10.10)$$

(Las aceleraciones del deslizador y el objeto tienen diferente dirección pero la misma magnitud.)

Las ecuaciones (10.7) a (10.10) son cinco ecuaciones simultáneas para las cinco incógnitas  $a_{1x}$ ,  $a_{2y}$ ,  $\alpha_z$ ,  $T_1$  y  $T_2$ . (La ecuación (10.10) es en realidad dos ecuaciones.) Primero usamos las ecuaciones (10.10) para eliminar  $a_{2y}$  y  $\alpha_z$  de las ecuaciones (10.7) a

(10.9). Ahora tenemos tres ecuaciones para las tres incógnitas  $T_1$ ,  $T_2$  y  $a_{1x}$ :

$$\begin{aligned} T_1 &= m_1 a_{1x} \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a_{1x} \\ T_2 - T_1 &= M a_{1x} \end{aligned}$$

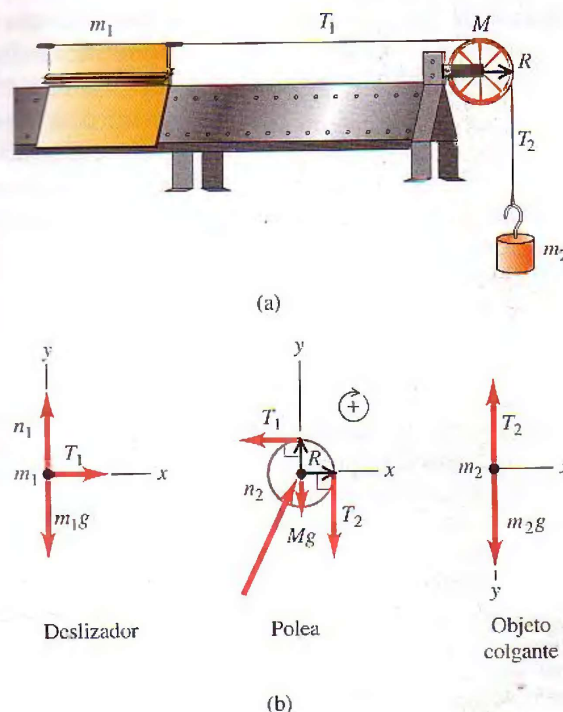
La forma más fácil de resolverlas es *sumarlas*, eliminando  $T_1$  y  $T_2$ , y despejar  $a_{1x}$ :

$$a_{1x} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Por la ecuación (10.10), la aceleración  $a_{2y}$  del objeto colgante es igual a  $a_{1x}$ , y la aceleración angular  $\alpha_z$  de la polea es igual a  $a_{1x}$  dividida entre  $R$ . Ahora podemos sustituir esto en las ecuaciones (10.7) y (10.8) para obtener las tensiones. Los resultados son

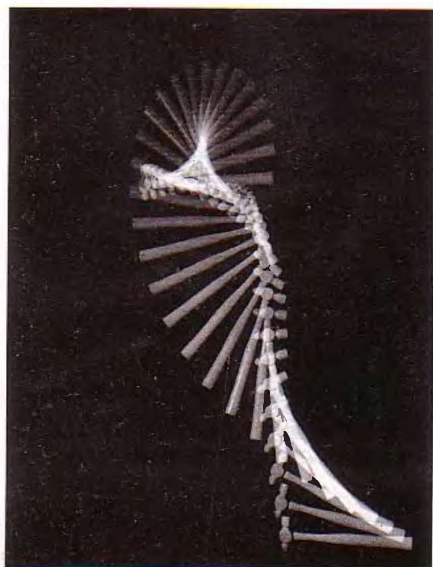
$$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M} \quad T_2 = \frac{(m_1 + M) m_2 g}{m_1 + m_2 + M}$$

**EVALUAR:** Revisemos algunos casos especiales para ver si estos resultados son lógicos. Primero, si  $m_1$  o  $M$  es mucho mayor que  $m_2$ , las aceleraciones son muy pequeñas y  $T_2$  es aproximadamente  $m_2 g$ . Pero si  $m_2$  es mucho mayor que  $m_1$  o que  $M$ , la aceleración será aproximadamente  $g$ . Ambos resultados son lo que esperaríamos. Si  $M = 0$ , ¿obtenemos el mismo resultado que en el ejemplo 5.13 (sección 5.2)? ¿Por qué sí o por qué no? ¿Se le ocurren otros casos especiales que verificar?

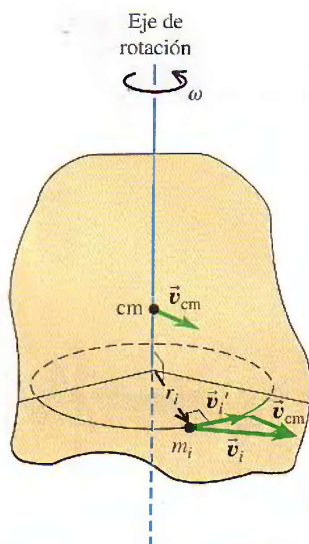


**10.11** (a) Deslizador de riel de aire tirado por una masa que cuelga sobre una polea. (b) Diagramas de cuerpo libre de los tres cuerpos.





**10.12** El movimiento de un cuerpo rígido como éste martillo lanzado es una combinación de traslación del centro de masa y rotación alrededor de ese centro.



Velocidad  $\vec{v}_i$  de una partícula de un cuerpo rígido en rotación y traslación = (velocidad  $\vec{v}_{cm}$  del centro de masa) más (velocidad  $\vec{v}'_i$  de la partícula relativa al centro de masa)

**10.13** Cuerpo rígido con movimiento traslacional y rotacional.

### Evalúe su comprensión

Suponga que el sistema del ejemplo 10.4 está inicialmente en movimiento, de modo que el deslizador se mueve hacia la izquierda, el objeto colgante asciende y la polea gira en sentido antihorario. En ésta situación, ¿qué aceleración lineal tienen: el deslizador y el objeto; y qué aceleración angular tiene la polea?

## 10.3 | Rotación de un cuerpo rígido sobre un eje móvil

Podemos extender nuestro análisis de la dinámica del movimiento rotacional a algunos casos en los que el eje de rotación se mueve. En tal caso, el movimiento del cuerpo es: **traslación y rotación combinados**. La clave para entender éstas situaciones es la siguiente: cada posible movimiento de un cuerpo rígido puede representarse como una combinación de *movimiento: traslacional del centro de masa y rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa*. Esto se cumple aun si el centro de masa se acelera, de modo que no está en reposo en ningún marco inercial. Un ejemplo gráfico es el movimiento de un martillo lanzado hacia arriba (Fig. 10.12). El centro de masa sigue una parábola, como si el martillo fuera una partícula situada en el centro de masa. Al mismo tiempo, el martillo gira con velocidad angular constante alrededor del centro de masa (compare con el movimiento de la llave de la figura 8.25). La traslación del centro de masa y la rotación alrededor de dicho centro, pueden tratarse como problemas individuales pero relacionados. Otros ejemplos de esto son: una pelota que rueda cuesta abajo y un yoyo que se desenrolla.

### Traslación y rotación combinadas: relaciones de energía

Demostrar que el movimiento de un cuerpo rígido siempre puede dividirse en movimientos independientes de traslación del centro de masa y rotación alrededor del centro de masa rebasa el alcance de este libro, pero podemos demostrar que es cierto para la *energía cinética* de un cuerpo rígido con movimiento tanto traslacional como rotacional. En este caso, la energía cinética del cuerpo es la suma de una parte  $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$  asociada al movimiento del centro de masa y una parte  $\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2$  asociada a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa:

$$K = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 \quad (\text{cuerpo rígido con traslación y rotación}) \quad (10.11)$$

Para demostrar esto, imaginamos otra vez que el cuerpo rígido se compone de partículas. Consideremos una partícula representativa de masa  $m_i$  (Fig. 10.13). Su velocidad  $\vec{v}_i$  relativa a un marco inercial es la suma vectorial de la velocidad  $\vec{v}_{cm}$  del centro de masa y la velocidad  $\vec{v}'_i$  de la partícula *relativa* al centro de masa:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i \quad (10.12)$$

La energía cinética  $K_i$  de esta partícula en el marco inercial es  $\frac{1}{2}m_i v_i^2$ , que también podemos expresar como  $\frac{1}{2}m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$ . Sustituyendo la ecuación (10.12) en esto, obtenemos

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2}m_i (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i) \cdot (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2}m_i (\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_{cm} + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_i + \vec{v}'_i \cdot \vec{v}'_i) \\ &= \frac{1}{2}m_i (v_{cm}^2 + 2\vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}'_i + v_i'^2) \end{aligned}$$



La energía cinética total es la suma  $\sum K_i$  para todas las partículas del cuerpo. Si expresamos los tres términos de la ecuación como sumas individuales, tenemos

$$K = \sum K_i = \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_{\text{cm}}^2 \right) + \sum (m_i \vec{v}_{\text{cm}} \cdot \vec{v}_i') + \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right)$$

Los primeros dos términos tienen factores comunes que pueden sacarse de la sumatoria:

$$K = \frac{1}{2} \left( \sum m_i \right) v_{\text{cm}}^2 + \vec{v}_{\text{cm}} \cdot \left( \sum m_i \vec{v}_i' \right) + \sum \left( \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) \quad (10.13)$$

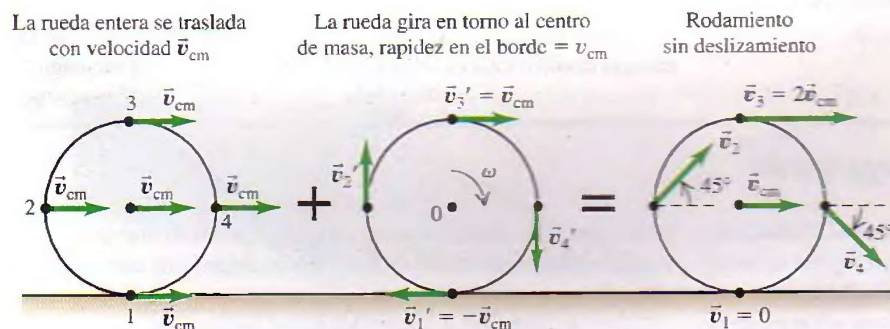
Ahora viene nuestra recompensa. En el primer término,  $\sum m_i$  es la masa total  $M$ . El segundo término es cero porque  $\sum m_i \vec{v}_i'$  es  $M$  multiplicada por la velocidad del centro de masa *relativa al centro de masa*, que es cero por definición. El último término es la suma de las energías cinéticas de las partículas, calculada usando sus rapidezces respecto al centro de masa; ésta es la energía cinética de rotación alrededor de ese centro. Siguiendo los mismos pasos que nos llevaron a la ecuación (9.17) para la energía cinética rotacional de un cuerpo rígido, podemos escribir este último término como  $\frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$ , donde  $I_{\text{cm}}$  es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa y  $\omega$  es la rapidez angular. Así, la ecuación (10.13) se convierte en la ecuación (10.11):

$$K = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{cm}} \omega^2$$

Un caso importante de traslación y rotación combinadas es el de **rodar sin deslizar**, como el movimiento de la rueda que se muestra en la figura 10.14. La rueda es simétrica, así que su centro de masa está en su centro geométrico. Visualizamos el movimiento en un marco de referencia inercial en el que la superficie sobre la que se rueda está en reposo. Aquí, el punto de la rueda que toca la superficie debe estar instantáneamente *en reposo* para que no resbale. Por tanto, la velocidad  $\vec{v}_1'$  del punto de contacto, relativa al centro de masa, debe tener la misma magnitud pero dirección opuesta que la velocidad del centro de masa  $\vec{v}_{\text{cm}}$ . Si el radio de la rueda es  $R$  y su rapidez angular alrededor del centro de masa es  $\omega$ , la magnitud de  $\vec{v}_1'$  es  $R\omega$ ; por tanto, debemos tener

$$v_{\text{cm}} = R\omega \quad (\text{condición para rodar sin resbalar}) \quad (10.14)$$

Como muestra la figura 10.14, la velocidad de un punto en la rueda es la suma vectorial de la velocidad del centro de masa y la velocidad del punto relativa al centro de masa. Así, mientras el punto 1 (el de contacto) está momentáneamente



**10.14** El movimiento de una rueda es la suma del movimiento traslacional del centro de masa y el movimiento rotacional de la rueda alrededor del centro de masa. Si la rueda no resbala, la rapidez del borde relativa al centro de masa debe ser igual a la magnitud de  $\vec{v}_{\text{cm}}$ . La rueda está instantáneamente en reposo en el punto en que hace contacto con el suelo.





**10.15** El humo que se alza de las ruedas traseras de este coche de arrancones indica que los neumáticos están resbalando sobre el pavimento, así que  $v_{\text{cm}}$  no es igual a  $R\omega$ .

en reposo, el punto 3 en la parte de arriba se mueve hacia adelante con el *doble de la rapidez* del centro de masa, y los puntos 2 y 4 a los lados tienen velocidades a  $45^\circ$  con la horizontal.

En un instante dado, podemos pensar que la rueda gira alrededor de un “eje de rotación instantáneo” que pasa por el punto de contacto con el suelo. La velocidad angular  $\omega$  es la misma para éste eje que para un eje que pasa por el centro de masa; un observador en el centro de masa ve que el borde da el mismo número de revoluciones por segundo como un observador en el borde ve que el centro de masa da alrededor de él. Si vemos así el movimiento de la rueda de la figura 10.14, la energía cinética de la rueda es  $K = \frac{1}{2}I_1\omega^2$ , donde  $I_1$  es el momento de inercia de la rueda alrededor de un eje que pasa por el punto 1. Sin embargo, por el teorema de los ejes paralelos, ecuación (9.19),  $I_1 = I_{\text{cm}} + MR^2$ , donde  $M$  es la masa total de la rueda e  $I_{\text{cm}}$  es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa. Usando la ecuación (10.14), la energía cinética de la rueda es

$$K = \frac{1}{2}I_1\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2$$

que es igual a la ecuación (10.11).

**CUIDADO** Es importante tener en cuenta que la relación  $v_{\text{cm}} = R\omega$  sólo se cumple si hay rodamiento sin deslizamiento. Cuando un coche de “arrancones” comienza a moverse, las ruedas traseras están girando con gran rapidez mientras que el vehículo casi no se mueve, así que  $R\omega$  es mayor que  $v_{\text{cm}}$  (Fig. 10.15). Si el conductor aplica los frenos con demasiada fuerza y el coche derrapa, las ruedas casi no girarán y  $R\omega$  será menor que  $v_{\text{cm}}$ .

Si un cuerpo rígido cambia de altura al moverse, también debemos considerar la energía potencial gravitacional. Como vimos en la sección 9.4, la energía potencial gravitacional asociada a cualquier cuerpo extendido de masa  $M$ , rígido o no, es la misma que si sustituimos el cuerpo por una partícula de masa  $M$  situada en el centro de masa del cuerpo. Esto es,

$$U = Mgy_{\text{cm}}$$

### Ejemplo 10.5

#### Casco cilíndrico que rueda

Un casco cilíndrico hueco de masa  $M$  y radio  $R$  rueda sin resbalar con rapidez  $v_{\text{cm}}$  en una superficie plana. ¿Qué energía cinética tiene?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Usaremos la ecuación (10.11) para obtener la energía cinética. El momento de inercia es  $I = MR^2$  de la tabla 9.2 y la rapidez angular es  $\omega = v_{\text{cm}}/R$  porque se rueda sin resbalar.

**EJECUTAR:** Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (10.11) obtenemos

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}Mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}(MR^2)\left(\frac{v_{\text{cm}}}{R}\right)^2 \\ &= Mv_{\text{cm}}^2 \end{aligned}$$

**EVALUAR:** La energía cinética es el doble de la que sería si el casco se estuviera deslizando con rapidez  $v_{\text{cm}}$  sin rodar. La mitad de la energía cinética total es traslacional y la otra mitad es rotacional.

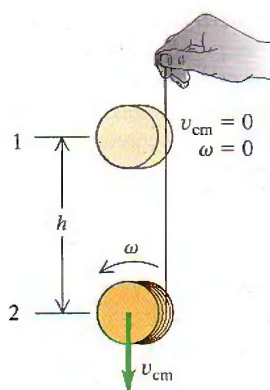
### Ejemplo 10.6

#### Rapidez de un yoyo burdo

Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$  (Fig. 10.16). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse al caer y girar

el cilindro. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez  $v_{\text{cm}}$  del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia  $h$ .





10.16 Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura 10.16 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo 9.8 (sección 9.4), hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica.

**PLANTEAR:** Las energías potenciales son  $U_1 = Mgh$  y  $U_2 = 0$ . El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es  $K_1 = 0$ , y la final ( $K_2$ ) está dada por la ecuación (10.11). El momento de inercia es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , y  $\omega = v_{cm}/R$  porque el cilindro no resbala en el cordel.

**EJECUTAR:** Utilizando la ecuación (10.11), la energía cinética en el punto 2 es

$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

Entonces, la conservación de la energía da

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ 0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

y

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

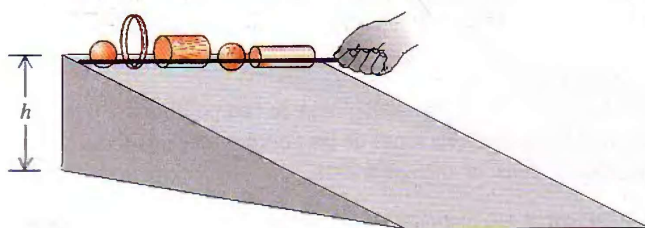
**EVALUAR:** Ésta es menor que la rapidez  $\sqrt{2gh}$  que tendría un objeto que se deja caer, porque un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

**Ejemplo 10.7****Carrera de cuerpos rodantes**

En una demostración, un profesor pone a “competir” diversos cuerpos rígidos redondos soltándolos del reposo desde arriba de un plano inclinado (Fig. 10.17). ¿Qué forma debe tener un cuerpo para llegar a la base primero?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Podemos usar conservación de la energía porque los cuerpos no resbalan sobre el plano inclinado. La fricción cinética no efectúa trabajo si los cuerpos ruedan sin resbalar. También podemos despreciar los efectos de la *fricción de rodamiento*, presentada en la sección 5.3, si los cuerpos y la superficie sobre la que ruedan son perfectamente rígidos. (Más adelante explicaremos por qué.)



10.17 ¿Cuál cuerpo baja más rápidamente y por qué?

**PLANTEAR:** Cada cuerpo parte del reposo desde arriba de una pendiente de altura  $h$ , así que  $K_1 = 0$ ,  $U_1 = Mgh$  y  $U_2 = 0$ . La energía cinética en la base del plano está dada por la ecuación (10.11). Si los cuerpos ruedan sin resbalar,  $\omega = v_{cm}/R$ . Los momentos de inercia de todos los cuerpos redondos de la tabla 9.2 (alrededor de ejes que pasan por su centro de masa) pueden expresarse como  $I_{cm} = cMR^2$ , donde  $c$  es un número puro menor o igual que 1 que depende de la forma del cuerpo. Nuestro objetivo es hallar el valor de  $c$  que proporciona al cuerpo la más alta rapidez en la base del plano inclinado.

**EJECUTAR:** Por la conservación de la energía,

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \\ 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}cMR^2\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 + c)Mv_{cm}^2$$

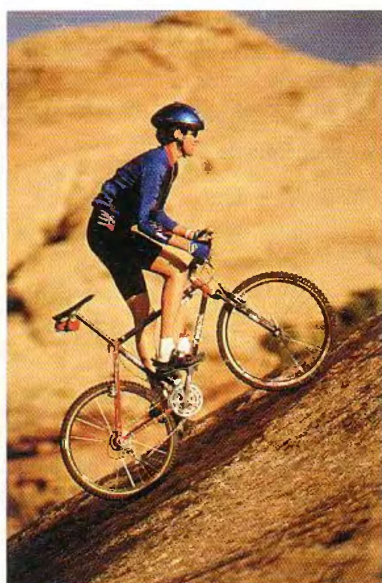
así que la rapidez en la base de la pendiente es

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + c}}$$



**EVALUAR:** Éste resultado es sorprendente; la rapidez no depende de la masa  $M$  del cuerpo ni de su radio  $R$ . Todos los cilindros sólidos uniformes tienen la misma rapidez abajo, aun si sus masas y radios son diferentes, porque tienen la misma  $c$ . Todas las esferas sólidas tienen la misma rapidez, etc. Cuanto menor sea  $c$ , mayor será la rapidez del cuerpo abajo (y en cualquier punto de la bajada).

Los cuerpos con  $c$  pequeña siempre vencen a aquellos con  $c$  grande, porque menos de su energía cinética se dedica a rotación y más a traslación. Si leemos los valores de  $c$  de la tabla 9.2, vemos que el orden de llegada es: cualquier esfera sólida, cualquier cilindro sólido, cualquier esfera hueca de pared delgada y cualquier cilindro hueco de pared delgada.



**10.18** El eje de una rueda de bicicleta pasa por el centro de masa de la rueda y es un eje de simetría. Por tanto, la rotación de la rueda está descrita por la ecuación (10.16), siempre que la bicicleta no dé la vuelta ni se incline hacia un lado (lo cual alteraría la orientación del eje).

### Traslación y rotación combinadas: dinámica

También podemos analizar el movimiento traslacional y rotacional combinado de un cuerpo rígido desde la perspectiva de la dinámica. Mostramos en la sección 8.5 que, para un cuerpo de masa total  $M$ , la aceleración  $\vec{a}_{\text{cm}}$  del centro de masa es igual a la de una masa puntual  $M$  sobre la que actúan todas las fuerzas externas a las que está sujeto el cuerpo:

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \quad (10.15)$$

El movimiento rotacional alrededor del centro de masa se describe mediante el análogo rotacional de la segunda ley de Newton, ecuación (10.6):

$$\sum \tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z \quad (10.16)$$

donde  $I_{\text{cm}}$  es el momento de inercia respecto a un eje que pasa por el centro de masa y  $\sum \tau_z$  incluye todos los momentos de torsión externos respecto a éste eje. No es obvio que la ecuación (10.16) sea aplicable al movimiento de un cuerpo rígido en traslación; después de todo, nuestra deducción de  $\sum \tau_z = \alpha_z$  en la sección 10.2 dio por hecho que el eje de rotación era estacionario. No obstante, la ecuación (10.16) es válida *aun si el eje de rotación se mueve*, si se satisfacen estas condiciones:

1. El eje que pasa por el centro de masa debe ser un eje de simetría.
2. El eje no debe cambiar de dirección.

Estas condiciones se satisfacen en muchos tipos de rotación (Fig. 10.18). Cabe señalar que en general éste eje de rotación móvil *no* está en reposo en un marco de referencia inercial.

Ahora podemos resolver problemas de dinámica en los que intervengan cuerpos rígidos con movimientos: traslacional y rotacional simultáneos, siempre que el eje de rotación cumpla las condiciones anteriores. La estrategia de resolución de problemas bosquejada en la sección 10.2 es igualmente útil aquí, y le recomendamos repasarla. Tenga presente que, si un cuerpo tiene movimiento traslacional y rotacional al mismo tiempo, necesitamos dos ecuaciones de movimiento independientes *para el mismo cuerpo*. Una, la ecuación (10.15), describe la traslación del centro de masa. La otra, ecuación (10.16), describe la rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa.

#### Ejemplo 10.8

### Aceleración de un yoyo burdo

Para el yoyo burdo del ejemplo 10.6, calcule la aceleración hacia abajo del cilindro y la tensión en el cordel.

#### SOLUCIÓN

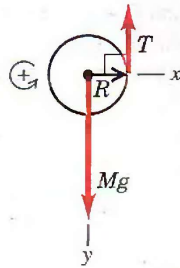
**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Usaremos las ecuaciones (10.15) y (10.16), junto con la condición que el cordel no resbale en el cilin-

dro. La figura 10.19 es un diagrama de cuerpo libre del yoyo, donde se indican las direcciones de las coordenadas positivas. Con estas coordenadas, la incógnita es  $a_{\text{cm-y}}$ .

**EJECUTAR:** La ecuación para la traslación del centro de masa es

$$\sum F_y = Mg + (-T) = Ma_{\text{cm-y}} \quad (10.17)$$





**10.19** Diagrama de cuerpo libre de un yoyo burdo (ver Fig. 10.16).

El momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es  $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$ . Sólo la fuerza de tensión tiene un momento de torsión respecto a dicho eje, así que la ecuación para la rotación alrededor de él es

$$\sum \tau_z = TR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \frac{1}{2}MR^2\alpha_z \quad (10.18)$$

El cordel se desenrolla sin resbalar, así que  $v_{\text{cm}} = R\omega$  por la ecuación (10.14); la derivada de ésta relación respecto a  $t$  es

$$a_{\text{cm-y}} = R\alpha_z \quad (10.19)$$

Ahora usamos la ecuación (10.19) para eliminar  $\alpha_z$  de la ecuación (10.18) y resolvemos las ecuaciones (10.17) y (10.18) simultáneamente para obtener  $T$  y  $a_{\text{cm-y}}$ . Los resultados son sencillísimos:

$$a_{\text{cm-y}} = \frac{2}{3}g \quad T = \frac{1}{3}Mg$$

Usando la fórmula de aceleración constante  $v_{\text{cm-y}}^2 = v_{\text{cm-0}}^2 + 2a_{\text{cm-y}}h$ , podemos demostrar que la rapidez del yoyo después de caer una distancia  $h$  es  $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$ , como determinamos en el ejemplo 10.6.

**EVALUAR:** Desde el punto de vista de la dinámica, la fuerza de tensión es fundamental, pues hace que la aceleración del yoyo sea menor que  $g$ , y su momento de torsión hace girar al yoyo. No obstante, cuando analizamos esta situación en el ejemplo 10.6 usando métodos de energía, ¡no tuvimos que considerar la tensión! Dado que no se perdió ni ganó energía mecánica, desde el punto de vista energético el cordel sólo es importante porque ayuda a convertir parte de la energía potencial gravitacional en energía cinética rotacional.

### Ejemplo 10.9

### Aceleración de una esfera rodante

Una bola de bolos sólida rueda sin resbalar por la rampa de retorno junto a la mesa (Fig. 10.20a). La rampa forma un ángulo  $\beta$  con la horizontal. ¿Qué aceleración tiene la bola? Trátela como esfera sólida uniforme, despreciando los agujeros.

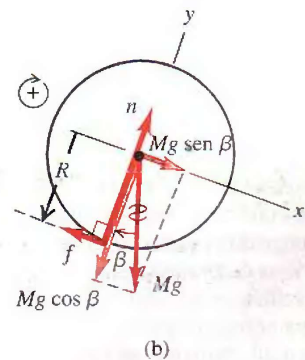
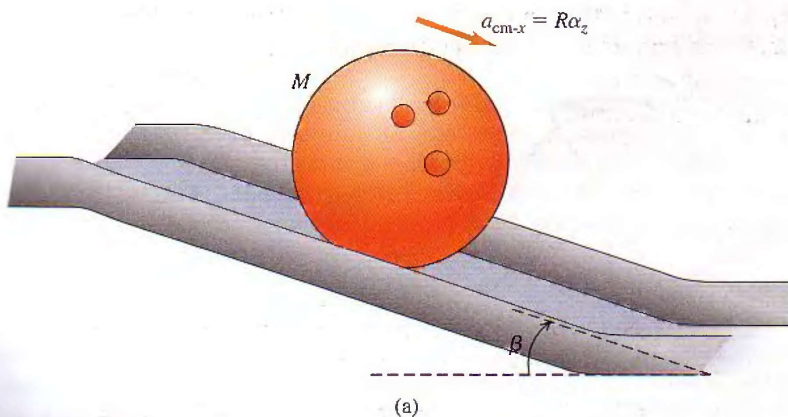
#### SOLUCIÓN:

**IDENTIFICAR:** Al igual que en el ejemplo 10.8, usaremos la ecuación (10.15) para describir el movimiento traslacional, y la ecuación (10.16), para describir el movimiento rotacional. La incógnita es la aceleración del centro de masa de la bola.

**PLANTEAR:** La figura 10.20b es el diagrama de cuerpo libre, e indica las direcciones de coordenadas positivas. De la tabla 9.2, el momento de inercia de una esfera sólida es  $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}MR^2$ . Las ecuaciones de movimiento para traslación y para rotación alrededor del eje que pasa por el centro de masa son, respectivamente,

$$\sum F_x = Mg \sin \beta + (-f) = Ma_{\text{cm-x}} \quad (10.20)$$

$$\sum \tau_z = fR = I_{\text{cm}}\alpha_z = \left(\frac{2}{5}MR^2\right)\alpha_z \quad (10.21)$$



**10.20** (a) Una bola de bolos baja rodando una rampa. (b) Diagrama de cuerpo libre de la bola.



Sólo la fuerza de fricción  $f$  tiene un momento de torsión respecto al eje que pasa por el centro de masa. Si la bola rueda sin resbalar, tenemos la misma relación cinemática  $a_{\text{cm-x}} = R\alpha_z$  que en el ejemplo 10.8. Usamos esto para eliminar  $\alpha_z$  de la ecuación (10.21):

$$fR = \frac{2}{5}MRa_{\text{cm-x}}$$

Ésta y la ecuación (10.20) son dos ecuaciones para dos incógnitas,  $a_{\text{cm-x}}$  y  $f$ . Despejamos  $f$  de la ecuación (10.20), sustituimos en la ecuación anterior para eliminar  $f$ , y despejamos  $a_{\text{cm-x}}$  para obtener

$$a_{\text{cm-x}} = \frac{5}{7}g \sin \beta$$

La aceleración es  $\frac{5}{7}$  de lo que sería si la bola pudiera deslizarse sin fricción por la rampa, como el tobogán del ejemplo 5.9 (sección 5.2). Sustituimos ésto en la ecuación (10.20) y despejamos  $f$ :

$$f = \frac{2}{7}Mg \sin \beta$$

**EVALUAR:** Dado que la bola no resbala en el punto de contacto instantáneo con la rampa,  $f$  es una fuerza de fricción *estática*; evita el deslizamiento y da a la bola su aceleración angular. Podemos dedu-

cir una ecuación para el coeficiente de fricción  $\mu_s$  mínimo necesario para evitar el deslizamiento. La fuerza normal es  $n = Mg \cos \beta$ . La fuerza máxima de fricción estática es  $\mu_s n$ , así que  $\mu_s$  debe ser de por lo menos

$$\mu_s = \frac{f}{n} = \frac{\frac{2}{7}Mg \sin \beta}{Mg \cos \beta} = \frac{2}{7} \tan \beta$$

Si el plano no está muy inclinado,  $\beta$  es pequeña, y no se requiere un  $\mu_s$  grande para evitar el deslizamiento. Al aumentar el ángulo, aumenta el valor requerido de  $\mu_s$ , como indicaría la intuición. Si la bola comienza a resbalar, las ecuaciones (10.20) y (10.21) siguen siendo válidas, pero ya no se cumple que  $v_{\text{cm-x}} = R\omega_z$  y  $a_{\text{cm-x}} = R\alpha_z$ ; sólo tenemos dos ecuaciones para tres incógnitas ( $a_{\text{cm-x}}$ ,  $\alpha_z$  y  $f$ ). La resolución del problema de rodamiento *con* deslizamiento requiere considerar la fricción *cinética* (ver problema de desafío 10.101).

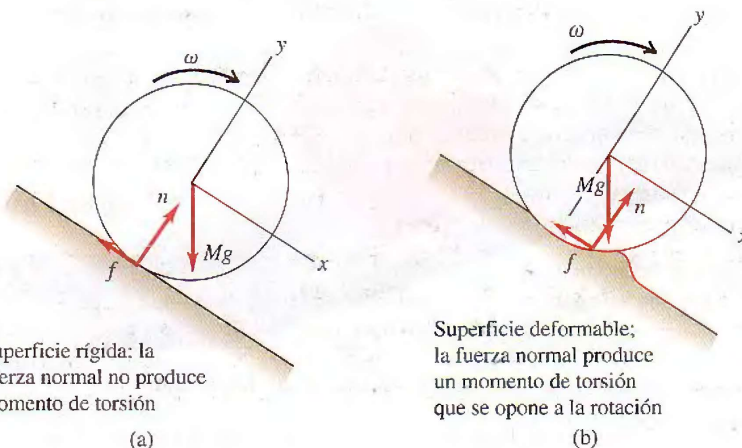
Si la bola desciende una distancia vertical  $h$  al bajar por la rampa, su desplazamiento sobre la rampa es  $h/\sin \beta$ . El lector deberá poder demostrar que la rapidez de la bola en la base de la rampa sería  $v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$ , que es el resultado que obtuvimos en el ejemplo 10.7 con  $c = \frac{2}{5}$ .

Si la bola rodara de *subida*, la fuerza de fricción también estaría dirigida pendiente arriba, como en la figura 10.20b. ¿Entiende por qué?

## Fricción de rodamiento

En el ejemplo 10.7 dijimos que podemos despreciar la fricción de rodamiento si tanto el cuerpo como la superficie sobre la que rueda son perfectamente rígidos. En la figura 10.21a una esfera perfectamente rígida baja rodando una pendiente perfectamente rígida. La línea de acción de la fuerza normal pasa por el centro de la esfera, así que el momento de torsión es cero; no hay deslizamiento en el punto de contacto, así que la fricción no efectúa trabajo. La figura 10.21b muestra una situación más realista en la que la superficie se “amontona” delante de la esfera y ésta rueda en una zanja somera o poco profunda. Debido a estas deformaciones, las fuerzas de contacto sobre la esfera ya no actúan en un solo punto, sino en una área, concentrándose en el frente de la esfera como se muestra. En consecuencia, la fuerza normal ejerce un momento de torsión que se opone a la rotación. Ade-

**10.21** (a) Fuerzas sobre una esfera perfectamente rígida que baja rodando una pendiente perfectamente rígida. (b) Si la esfera o la pendiente es deformable, las fuerzas de contacto actúan en diferentes posiciones. La fuerza normal produce un momento de torsión antihorario que se opone a la rotación horaria. La deformación se muestra muy exagerada.





más, hay cierto deslizamiento de la esfera en la superficie debido a la deformación, causando pérdida de energía mecánica. La combinación de estos efectos es el fenómeno de *fricción de rodamiento*, que también ocurre si el cuerpo que rueda es deformable, como un neumático. Es común que el cuerpo que rueda y la superficie tengan la suficiente rigidez como para hacer caso omiso de la fricción de rodamiento, y esto es lo que hemos hecho en los ejemplos de la sección.

### Evalúe su comprensión

En el ejemplo 10.9, ¿qué valor tendrían la aceleración y la fuerza de fricción estática si la bola fuera una esfera hueca?

## 10.4 | Trabajo y potencia en movimiento rotacional

Cuando pedaleamos una bicicleta, aplicamos fuerzas a un cuerpo en rotación y efectuamos trabajo sobre él. Algo similar ocurre en otras situaciones de la vida real, como el eje de un motor que impulsa una herramienta de potencia o a un vehículo. Podemos expresar el trabajo en términos del momento de torsión y desplazamiento angular.

Suponga que una fuerza tangencial  $\vec{F}_{\text{tan}}$  actúa en el borde de un disco pivoteado; por ejemplo, una niña que corre empujando un tiovivo (Fig. 10.22a). La rueda gira un ángulo infinitesimal  $d\theta$  alrededor de un eje fijo durante un tiempo infinitesimal  $dt$  (Fig. 10.22b). El trabajo  $dW$  efectuado por  $\vec{F}_{\text{tan}}$  mientras un punto del borde se mueve una distancia  $ds$  es  $dW = F_{\text{tan}} ds$ . Si  $d\theta$  se mide en radianes,  $ds = R d\theta$  y

$$dW = F_{\text{tan}} R d\theta$$

$F_{\text{tan}} R$  es el momento de torsión  $\tau_z$  debido a la fuerza  $\vec{F}_{\text{tan}}$ , así que

$$dW = \tau_z d\theta \quad (10.22)$$

El trabajo total  $W$  efectuado por el momento de torsión durante un desplazamiento angular de  $\theta_1$  a  $\theta_2$  es

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_z d\theta \quad (\text{trabajo efectuado por un momento de torsión}) \quad (10.23)$$

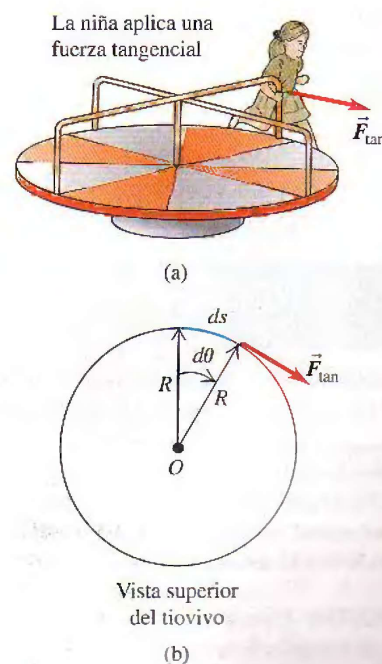
Si el momento de torsión es *constante* y el cambio de ángulo es finito  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ ,

$$W = \tau_z(\theta_2 - \theta_1) = \tau_z \Delta\theta \quad (10.24)$$

(trabajo efectuado por un momento de torsión constante)

El trabajo efectuado por un momento de torsión *constante* es el producto del momento de torsión y el desplazamiento angular. Si el momento de torsión se expresa en  $\text{N}\cdot\text{m}$  y el desplazamiento en radianes, el trabajo está en joules. La ecuación (10.24) es el análogo rotacional de la ecuación (6.1),  $W = Fs$ , y la ecuación (10.23) es el análogo de la ecuación (6.7),  $W = \int F_x dx$ , para el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento rectilíneo.

Si la fuerza de la figura 10.22 tuviera una componente axial o radial, dicha componente no efectuaría trabajo porque el desplazamiento del punto de aplicación sólo tiene componente tangencial. Una componente de fuerza radial o axial tampoco contribuiría al momento de torsión alrededor del eje de rotación, así que las ecuaciones (10.23) y (10.24) son correctas para cualquier fuerza, independientemente de sus componentes.



**10.22** Una fuerza tangencial aplicada a un cuerpo en rotación efectúa trabajo.



Si un momento de torsión efectúa trabajo sobre un cuerpo rígido que gira, la energía cinética cambia en una cantidad igual a ese trabajo. Podemos demostrar esto usando exactamente el mismo procedimiento que en las ecuaciones (6.11) a (6.13) para una partícula. Primero representamos el momento de torsión *neto* sobre el cuerpo con  $\tau_z$ , de modo que, por la ecuación (10.6),  $\tau_z = I\alpha_z$ . Al usar esta ecuación, estamos suponiendo que el cuerpo es rígido y, por tanto, tiene momento de inercia constante. Transformamos el integrando de la ecuación (10.23) en una integral sobre  $\omega_z$  así:

$$\tau_z d\theta = (I\alpha_z) d\theta = I \frac{d\omega_z}{dt} d\theta = I \frac{d\theta}{dt} d\omega_z = I\omega_z d\omega_z$$

Dado que  $\tau_z$  es el momento de torsión neto, la integral de la ecuación (10.23) es el trabajo *total* efectuado sobre el cuerpo rígido en rotación. Así, la ecuación se convierte en

$$W_{\text{tot}} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2 \quad (10.25)$$

El cambio de energía cinética rotacional de un cuerpo *rígido* es igual al trabajo efectuado por fuerzas ejercidas desde afuera del cuerpo. Esta ecuación es análogo a la ecuación (6.13), el teorema trabajo-energía para una partícula.

¿Qué hay con la *potencia* asociada al trabajo efectuado por un momento de torsión sobre un cuerpo en rotación? Si dividimos ambos miembros de la ecuación (10.22) entre el intervalo  $dt$  durante el que se da el desplazamiento angular, obtenemos

$$\frac{dW}{dt} = \tau_z \frac{d\theta}{dt}$$

Pero  $dW/dt$  es la rapidez con que se efectúa trabajo, o *potencia*  $P$ , y  $d\theta/dt$  es velocidad angular  $\omega_z$ , así que

$$P = \tau_z \omega_z \quad (10.26)$$

Si un momento de torsión  $\tau_z$  (respecto al eje de rotación) actúa sobre un cuerpo que gira con velocidad angular  $\omega_z$ , su potencia (rapidez con que efectúa trabajo) es el producto de  $\tau_z$  y  $\omega_z$ . Esto es el análogo de la relación  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$  que desarrollamos en la sección 6.4 para el movimiento de partículas.

### Ejemplo 10.10

## Potencia de motores y momento de torsión

La potencia desarrollada por el motor de un automóvil se anuncia como 200 hp a 6000 rpm. Calcule el momento de torsión correspondiente.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Nos dan la potencia desarrollada  $P$  y la velocidad angular  $\omega_z$ , así que podemos obtener el momento de torsión con la ecuación (10.26).

**EJECUTAR:** Primero debemos convertir la potencia a watts y la velocidad angular a rad/s:

$$P = 200 \text{ hp} = 200 \text{ hp} \left( \frac{746 \text{ W}}{1 \text{ hp}} \right) = 1.49 \times 10^5 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \omega_z &= 6000 \text{ rev/min} = \left( \frac{6000 \text{ rev}}{1 \text{ min}} \right) \left( \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) \left( \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \\ &= 628 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Por la ecuación (10.26),

$$\tau_z = \frac{P}{\omega_z} = \frac{1.49 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m/s}}{628 \text{ rad/s}} = 237 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**EVALUAR:** Podríamos aplicar este momento de torsión usando una llave de tuercas de 0.25 m de largo y aplicando una fuerza de 948 N al extremo de su mango. ¿Podría el lector hacerlo?



Ejemplo  
10.11

## Cálculo de potencia a partir del momento de torsión

Un motor eléctrico ejerce un momento de torsión constante de  $10 \text{ N}\cdot\text{m}$  sobre una piedra de amolar montada en un eje. El momento de inercia de la piedra es  $I = 2.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y el sistema parte del reposo. Calcule el trabajo efectuado por el motor en 8.0 segundos y la energía cinética al final de este lapso. ¿Qué potencia media desarrolló el motor?

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Usamos la versión rotacional de la segunda ley de Newton,  $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ , para obtener la aceleración angular de la piedra. Después usaremos las ecuaciones de cinemática de la sección 9.2 para calcular el ángulo que la piedra gira en 8.0 s (lo cual nos da, a través de la ecuación (10.24), el trabajo efectuado) y la velocidad angular en ese momento (lo cual nos da la energía cinética). Obtenemos la potencia media dividiendo el trabajo realizado entre el intervalo de tiempo.

**EJECUTAR:** Tenemos  $\Sigma \tau_z = 10 \text{ N}\cdot\text{m}$  (el único momento de torsión que actúa se debe al motor) e  $I = 2.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ , así que, por  $\Sigma \tau_z = I\alpha_z$ , la aceleración angular es de  $5.0 \text{ rad/s}^2$ . Por la ecuación (9.11), el ángulo total que el sistema gira en 8.0 s es

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\alpha_z t^2 = \frac{1}{2}(5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 160 \text{ rad}$$

y el trabajo total efectuado por el momento de torsión es

$$W = \tau_z \Delta\theta = (10 \text{ N}\cdot\text{m})(160 \text{ rad}) = 1600 \text{ J}$$

Por las ecuaciones (9.7) y (9.17), la velocidad angular y la energía cinética en  $t = 8.0 \text{ s}$  son

$$\omega_z = \alpha_z t = (5.0 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s}) = 40 \text{ rad/s}$$

$$K = \frac{1}{2}I\omega_z^2 = \frac{1}{2}(2.0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(40 \text{ rad/s})^2 = 1600 \text{ J}$$

La energía cinética inicial era cero, así que el trabajo efectuado es igual al incremento en la energía cinética [Véase ecuación (10.35)].

La potencia media es

$$P_{\text{med}} = \frac{1600 \text{ J}}{8.0 \text{ s}} = 200 \text{ J/s} = 200 \text{ W}$$

**EVALUAR:** Podemos comprobar el valor que obtuvimos para la potencia media considerando la potencia instantánea,  $P = \tau_z \omega_z$ . Observe que, dado que  $\omega_z$  aumenta continuamente,  $P$  también aumenta continuamente; su valor es cero en  $t = 0$  y aumenta a  $(10 \text{ N}\cdot\text{m})(40 \text{ rad/s}) = 400 \text{ W}$  en  $t = 8.0 \text{ s}$ . La velocidad angular y la potencia aumentan uniformemente con el tiempo, así que la potencia media es la mitad de este valor máximo, o sea  $200 \text{ W}$ .

## Evalúe su comprensión

Se aplican momentos de torsión iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Los dos cilindros están inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética?

## 10.5 | Cantidad de movimiento angular

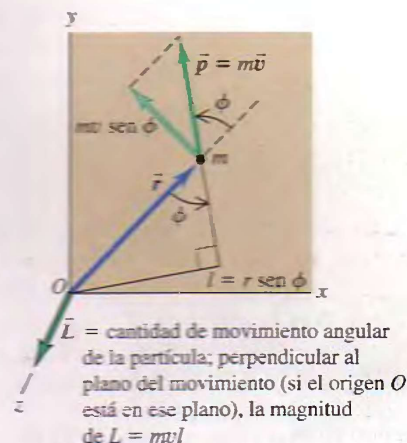
Todas las cantidades rotacionales que hemos visto en los capítulos 9 y 10 son análogos de una cantidad en el movimiento traslacional de una partícula. El análogo de la cantidad de movimiento de una partícula es la **cantidad de movimiento angular**, una cantidad vectorial denotada con  $\vec{L}$ . Su relación con la cantidad de movimiento  $\vec{p}$  (que a veces llamaremos *cantidad de movimiento lineal* por claridad) es exactamente la misma que entre momento de torsión y fuerza,  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$ . Para una partícula de masa constante  $m$ , velocidad  $\vec{v}$ , cantidad de movimiento  $\vec{p} = m\vec{v}$ , y vector de posición  $\vec{r}$  relativo al origen  $O$  de un marco inercial, definiremos la cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$  como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (10.27)$$

(cantidad de movimiento angular de una partícula)

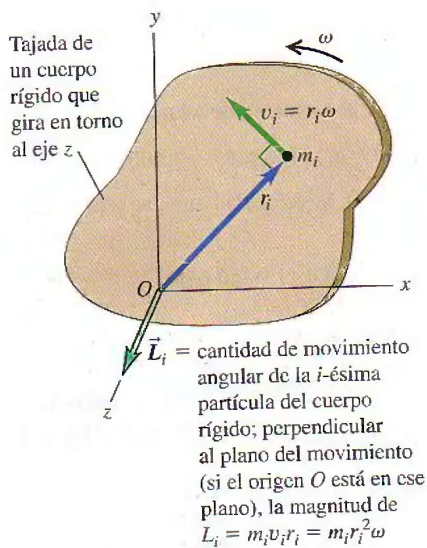
El valor de  $\vec{L}$  depende del origen escogido, ya que en él interviene el vector de posición de la partícula relativo al origen. Las unidades de la cantidad de movimiento angular son  $\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ .

En la figura 10.23, para una partícula que se mueve en el plano  $xy$ ; se muestran: su vector de posición  $\vec{r}$  y su cantidad de movimiento  $\vec{p} = m\vec{v}$ . El vector de canti-



**10.23** Cálculo de la cantidad de movimiento angular  $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p}$  de una partícula de masa  $m$  que se mueve en el plano  $xy$ .





**10.24** Cálculo de la cantidad de movimiento angular de una partícula de masa  $m_i$  en un cuerpo rígido que gira. (Compare con la Fig. 10.23.) Cada partícula se mueve en un círculo alrededor del eje de rotación con la misma rapidez angular  $\omega$ .

dad de movimiento angular  $\vec{L}$  es perpendicular al plano  $xy$ . La regla de la mano derecha para productos vectoriales nos dice que su dirección es en el eje  $+z$ , y su magnitud es

$$L = mvr \sin \phi = mvl \quad (10.28)$$

donde  $l$  es la distancia perpendicular desde la línea de  $\vec{v}$  a  $O$ . Esta distancia hace las veces de "brazo de palanca" para el vector de cantidad de movimiento.

Si una fuerza neta  $\vec{F}$  actúa sobre una partícula, su velocidad y cantidad de movimiento cambian, y también puede cambiar su cantidad de movimiento angular. Podemos demostrar que la *rapidez de cambio* de la cantidad de movimiento angular es igual al momento de torsión de la fuerza neta. Derivamos la ecuación (10.27) respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left( \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = (\vec{v} \times m\vec{v}) + (\vec{r} \times m\vec{a})$$

El primer término es cero porque contiene el producto vectorial de  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$  consigo mismo. En el segundo término sustituimos  $m\vec{a}$  por la fuerza neta  $\vec{F}$ , obteniendo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau} \quad (10.29)$$

(para una partícula sobre la que actúa una fuerza  $\vec{F}$ )

**La rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de una partícula es igual al momento de torsión de la fuerza neta que actúa sobre ella.** Compare este resultado con la ecuación (8.3), que dice que la rapidez de cambio  $d\vec{p}/dt$  de la cantidad de movimiento *lineal* de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella.

Podemos usar la ecuación (10.28) para calcular la cantidad de movimiento angular total de un cuerpo rígido que gira sobre el eje  $z$  con velocidad angular  $\omega$ . Consideremos primero una rebanada del cuerpo que está en el plano  $xy$  (Fig. 10.24). Cada partícula de la rebanada se mueve en un círculo centrado en el origen, y en cada instante su velocidad  $\vec{v}_i$  es perpendicular a su vector de posición  $\vec{r}_i$ , como se muestra. Así, en la ecuación (10.28),  $\phi = 90^\circ$  para toda partícula. Una partícula de masa  $m_i$  que está a una distancia  $r_i$  de  $O$  tiene una rapidez  $v_i$  igual a  $r_i\omega$ . Por la ecuación (10.28), la magnitud  $L_i$  de su cantidad de movimiento angular es

$$L_i = m_i(r_i\omega)r_i = m_i r_i^2 \omega \quad (10.30)$$

La dirección de la cantidad de movimiento angular de cada partícula, dada por la regla de la mano derecha para el producto vectorial, es sobre el eje  $+z$ .

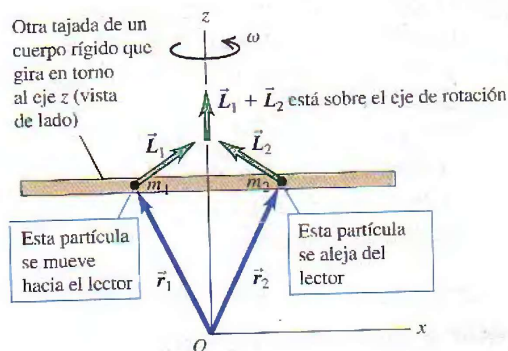
La cantidad de movimiento angular *total* de la rebanada que está en el plano  $xy$  es la suma  $\sum L_i$  de las cantidades de movimiento angulares  $L_i$  de las partículas. Haciendo la sumatoria de la ecuación (10.30), tenemos

$$L = \sum L_i = \left( \sum m_i r_i^2 \right) \omega = I\omega$$

donde  $I$  es el momento de inercia de la rebanada alrededor del eje  $z$ .

Podemos efectuar este mismo cálculo para las demás rebanadas del cuerpo, todas paralelas al plano  $xy$ . Para los puntos que no están en ese plano, surge una complicación porque los vectores  $\vec{r}$  tienen componente en la dirección  $z$  además de las direcciones  $x$  y  $y$ ; esto da a la cantidad de movimiento angular de cada partícula una componente perpendicular al eje  $z$ . Pero si el eje  $z$  es un eje de simetría, las componentes perpendiculares de partículas en lados opuestos de este eje su-





man cero (Fig. 10.25). Así, cuando un cuerpo gira alrededor de un eje de simetría, su vector de cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$  queda sobre el eje de simetría y su magnitud es  $L = I\omega$ .

El vector de velocidad angular  $\vec{\omega}$  también está sobre el eje de rotación, como vimos al final de la sección 9.1. Así, para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría,  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  tienen la misma dirección (Fig. 10.26), y tenemos la relación *vectorial*

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (10.31)$$

(para un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría)

Por la ecuación (10.29), la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de una partícula es igual al momento de torsión de la fuerza neta que actúa sobre ella. Para cualquier sistema de partículas (incluidos cuerpos rígidos y no rígidos), la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular *total* es igual a la suma de los momentos de torsión de todas las fuerzas que actúan sobre todas las partículas. Los momentos de torsión de las fuerzas *internas* suman *cero* si las fuerzas actúan sobre la línea que va de una partícula a otra, como en la figura 10.8, así que la suma de momentos de torsión sólo incluye los momentos de las fuerzas *externas*. (Hubo una cancelación similar cuando hablamos del movimiento del centro de masa en la sección 8.5.) Si la cantidad de movimiento angular total del sistema es  $\vec{L}$  y la suma de momentos externos es  $\sum \vec{\tau}$ , entonces

$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (\text{para cualquier sistema de partículas}) \quad (10.32)$$

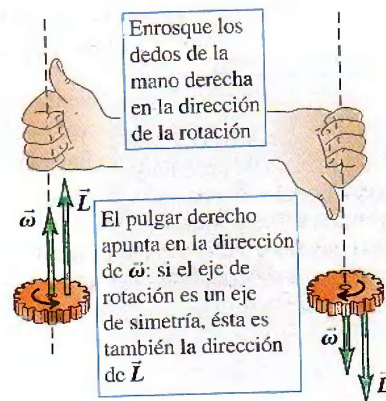
Por último, si el sistema de partículas es un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje de simetría (el eje  $z$ ),  $L_z = I\omega_z$  e  $I$  es constante. Si el eje tiene dirección fija en el espacio, los vectores  $\vec{L}$  y  $\vec{\omega}$  sólo cambian en magnitud. En tal caso,  $dL_z/dt = I d\omega_z/dt = I\alpha_z$ , o sea,

$$\sum \tau_z = I\alpha_z$$

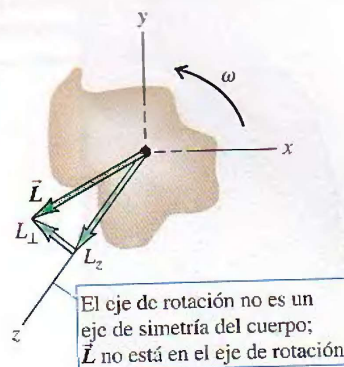
que es otra vez nuestra relación básica para la dinámica de la rotación de un cuerpo rígido. Si el cuerpo *no* es rígido,  $I$  puede cambiar; en tal caso,  $L$  cambiará aun si  $\omega$  es constante. La ecuación (10.32) seguirá siendo válida, pero la ecuación (10.6) no.

Si el eje de rotación *no* es un eje de simetría, la cantidad de movimiento angular en general *no* es paralela al eje (Fig. 10.27). Al girar el cuerpo, el vector de cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$  describe un cono alrededor del eje de rotación. Dado que  $\vec{L}$  cambia, debe estar actuando un momento de torsión externo neto sobre el cuerpo aun si la magnitud de la velocidad angular  $\omega$  es constante. Si el cuerpo es una rueda desbalanceada de un coche, este momento de torsión provendrá de la

**10.25** Cantidad de movimiento angular de dos partículas de un cuerpo rígido que gira. Las dos partículas tienen la misma masa y están situadas simétricamente a cada lado del eje de rotación. Aunque los vectores de cantidad de movimiento angular  $\vec{L}_1$  y  $\vec{L}_2$  de las partículas individuales no están a lo largo del eje de rotación, su suma vectorial  $\vec{L}_1 + \vec{L}_2$  sí lo está.



**10.26** En la rotación alrededor de un eje de simetría,  $\vec{\omega}$  y  $\vec{L}$  son paralelos y están sobre el eje. Las direcciones están dadas por la regla de la mano derecha (compare con la figura 9.5).



**10.27** Si el eje de rotación de un cuerpo rígido no es un eje de simetría,  $\vec{L}$  no está en general sobre el eje de rotación. Aun si  $\vec{\omega}$  es constante, la dirección de  $\vec{L}$  cambia, y se requiere un momento de torsión neto para mantener la rotación.



fricción en los cojinetes, que hace que éstos se desgasten. “Balancear” una rueda implica distribuir la masa de modo que el eje de rotación sea un eje de simetría; así,  $\vec{L}$  apuntará a lo largo del eje de rotación y no se requerirá un momento de torsión neto para que la rueda siga girando.

En rotación de eje fijo, podemos usar el término “cantidad de movimiento angular del cuerpo” para referirnos sólo a la *componente* de  $\vec{L}$  sobre el eje de rotación del cuerpo (el eje  $z$  en la Fig. 10.27), con un signo para indicar el sentido de rotación igual que con la velocidad angular.

### Ejemplo 10.12

## Cantidad de movimiento angular y momento de torsión

Una hélice de turbina del motor de un *jet* (Fig. 10.28) tiene un momento de inercia de  $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40 \text{ rad/s}^3)t^2$$

a) Calcule la cantidad de movimiento angular de la hélice en función de  $t$  y su valor en  $t = 3.0 \text{ s}$ . b) Calcule el momento de torsión neto que actúa sobre la hélice en función de  $t$ , y su valor en  $t = 3.0 \text{ s}$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría, así que podemos usar la ecuación (10.31) para obtener  $L_z$  a partir de  $\omega_z$ , y la ecuación (10.32) para relacionar el momento de torsión neto con la derivada de  $L_z$  respecto al tiempo.

### EJECUTAR:

a) La única componente de cantidad de movimiento angular está sobre el eje de rotación ( $z$ ):

$$L_z = I\omega_z = (2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(40 \text{ rad/s}^3)t^2 = (100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t^2$$

(Omitimos “rad” de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En  $t = 3.0 \text{ s}$ ,  $L_z = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ .

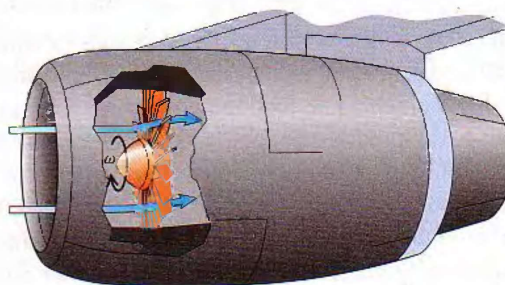
b) La dirección de la cantidad de movimiento angular no cambia, así que el momento de torsión también está sobre el eje de rotación. Por la ecuación (10.32), su componente en ese eje es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(2t) = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t$$

En el instante  $t = 3.0 \text{ s}$ ,

$$\tau_z = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)(3.0 \text{ s}) = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 600 \text{ N} \cdot \text{m}$$

**EVALUAR:** Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es  $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40 \text{ rad/s}^2)(2t) = (80 \text{ rad/s}^2)t$ . Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, el momento de torsión que actúa sobre la hélice es  $\tau_z = I\alpha_z = (2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(80 \text{ rad/s}^2)t = (200 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3)t$ , lo que coincide con nuestro cálculo anterior.



**10.28** Se usa una hélice de turbina para meter aire en el motor de turbo-reacción.

### Evalúe su comprensión

Una pelotita está pegada al extremo de un cordel. Usted sostiene el cordel por el otro extremo y da vueltas a la pelota sobre su mano. Si la rapidez de la pelotita es constante, ¿es constante su cantidad de movimiento lineal  $\vec{p}$ ? ¿Es constante su cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$ ? ¿A qué se debe la diferencia?

## 10.6 | Conservación de la cantidad de movimiento angular

Acabamos de ver que la cantidad de movimiento angular puede servir para expresar de otro modo el principio dinámico básico del movimiento rotacional. También es la base del **principio de conservación de la cantidad de movimiento angular**. Al igual que la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento lineal, este principio es una ley de conservación universal, válida en todas las



escalas, desde los sistemas atómicos y nucleares hasta los movimientos de las galaxias. Este principio es consecuencia directa de la ecuación (10.32):  $\sum \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ . Si  $\sum \vec{\tau} = 0$ ,  $d\vec{L}/dt = 0$  y  $\vec{L}$  es constante. Si el momento de torsión externo neto que actúa sobre un sistema es cero, la cantidad de movimiento angular total del sistema es constante (se conserva).

Un trapecista, un clavadista y un patinador haciendo piruetas en la punta de un patín aprovechan este principio. Suponga que una trapecista acaba de separarse de un columpio con los brazos y piernas extendidos y girando en sentido antihorario alrededor de su centro de masa. Al encoger los brazos y las piernas, su momento de inercia  $I_{cm}$  respecto a su centro de masa cambia de un valor grande  $I_1$  a uno mucho menor  $I_2$ . La única fuerza externa que actúa sobre ella es su peso, que no tiene momento de torsión respecto a un eje que pasa por su centro de masa. Así, su cantidad de movimiento angular  $L_z = I_{cm}\omega_z$  permanece constante, y su velocidad angular  $\omega_z$  aumenta al disminuir  $I_{cm}$ . Esto es,

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \quad (\text{momento de torsión externo neto cero}) \quad (10.33)$$

Cuando una patinadora o bailarina gira con los brazos estirados y luego los encoge, su velocidad angular aumenta al disminuir su momento de inercia. En ambos casos se conserva la cantidad de movimiento angular en un sistema en el que el momento de torsión externo neto es cero.

Si un sistema tiene varias partes, las fuerzas internas que esas partes ejercen entre sí causan cambios en sus cantidades de movimiento angulares, pero la cantidad de movimiento angular *total* no cambia. Por ejemplo, considere dos cuerpos  $A$  y  $B$  que interactúan entre sí pero con nadie más, como los astronautas de la sección 8.2 (Fig. 8.7). Suponga que el cuerpo  $A$  ejerce una fuerza  $\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$  sobre el cuerpo  $B$ ; el momento de torsión correspondiente (respecto al punto que escojamos) es  $\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$ . Según la ecuación (10.32), este momento es igual a la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular de  $B$ :

$$\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B} = \frac{d\vec{L}_B}{dt}$$

Al mismo tiempo,  $B$  ejerce una fuerza  $\vec{F}_{B \text{ sobre } A}$  sobre el cuerpo  $A$ , con un momento de torsión correspondiente  $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A}$ .

$$\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

Por la tercera ley de Newton,  $\vec{F}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{F}_{A \text{ sobre } B}$ . Además, si las fuerzas actúan en la misma línea, como en la figura 10.8, sus brazos de palanca respecto al eje escogido son iguales. Así, los *momentos de torsión* de estas fuerzas son iguales y opuestos, y  $\vec{\tau}_{B \text{ sobre } A} = -\vec{\tau}_{A \text{ sobre } B}$ . Por tanto, si sumamos las ecuaciones anteriores tenemos

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \frac{d\vec{L}_B}{dt} = 0$$

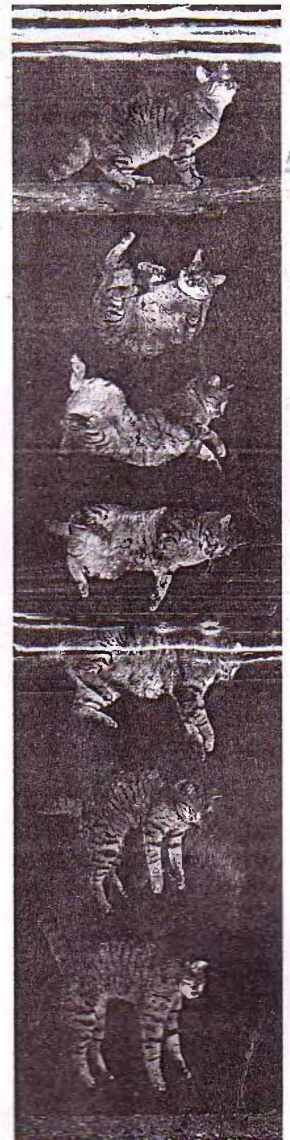
o, dado que  $\vec{L}_A + \vec{L}_B$  es la cantidad de movimiento angular *total*  $\vec{L}$  del sistema,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (\text{momento de torsión externo neto cero}) \quad (10.34)$$

Es decir, la cantidad de movimiento angular total del sistema es constante. Los **momentos de torsión** de las fuerzas internas pueden transferir cantidad de movimiento angular de un cuerpo al otro, pero no pueden cambiar la cantidad de movimiento angular *total* del sistema (Fig. 10.29).

Activ  
ONLINE  
Physics

7.14 La hola le pega al bat



10.29 Un gato que cae tuerce diversas partes de su cuerpo en direcciones distintas para caer parado. En todo momento durante este proceso, la cantidad de movimiento angular total del gato sigue siendo cero.

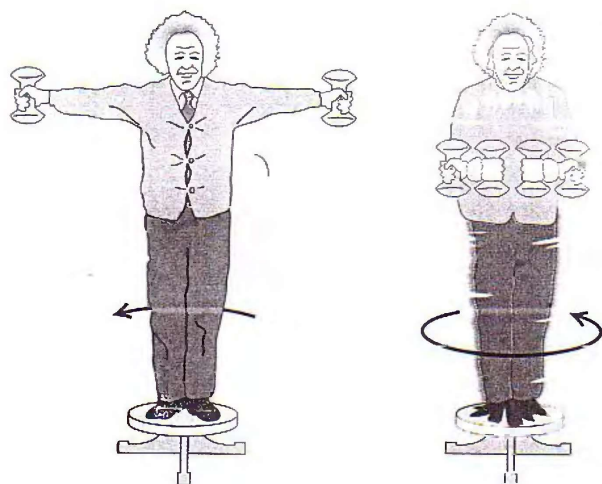


**Ejemplo  
10.13****Todo mundo puede bailar ballet**

Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (Fig. 10.30). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él lleva las mancuernas a su abdomen, e indique el efecto de esto sobre su energía cinética. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de  $3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  con los brazos estirados, y baja a  $2.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final; trátelas como partículas.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Si despreciamos la fricción en la mesita, ningún momento de torsión externo actuará alrededor del eje vertical ( $z$ ), así que la cantidad de movimiento angular respecto a



10.30 Diversión con la conservación de la cantidad de movimiento angular... si uno no se marea.

ese eje será constante y podremos usar la ecuación (10.33) para calcular la incógnita (la velocidad angular final  $\omega_{2z}$ ).

**EJECUTAR:** El momento de inercia del sistema es  $I = I_{\text{prof}} + I_{\text{manc}}$ . Cada mancuerna de masa  $m$  aporta  $mr^2$  a  $I_{\text{manc}}$ , donde  $r$  es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0 \text{ kg})(1.0 \text{ m})^2 = 13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1 \text{ rev}}{2.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ rev/s}$$

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Por la ecuación (10.33), la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2} \omega_{1z} = \frac{13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} (0.50 \text{ rev/s}) = 2.5 \text{ rev/s}$$

Es decir, la velocidad angular aumenta en un factor de 5 en tanto que la cantidad de movimiento angular se mantiene constante. Observe que no tuvimos que cambiar “revoluciones” a “radianes” en este cálculo. ¿Por qué no?

**EVALUAR:** Para calcular la energía cinética, debemos expresar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en rad/s. (¿Por qué?) Tenemos  $\omega_1 = (0.5 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 3.14 \text{ rad/s}$  y  $\omega_2 = (2.5 \text{ rev/s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 15.7 \text{ rad/s}$ . La energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_{1z}^2 = \frac{1}{2} (13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (3.14 \text{ rad/s})^2 = 64 \text{ J}$$

y la energía cinética final es

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_{2z}^2 = \frac{1}{2} (2.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (15.7 \text{ rad/s})^2 = 320 \text{ J}$$

¿De dónde salió la energía adicional?

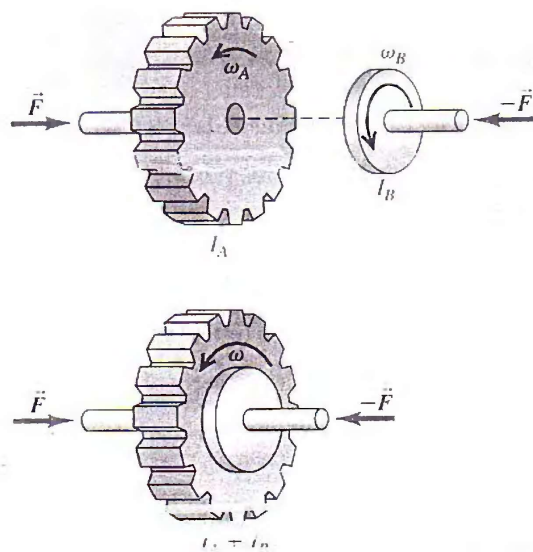
**Ejemplo  
10.14****Un “choque” rotacional I**

La figura 10.31 muestra dos discos. Uno es un volante de motor; el otro, una placa de embrague sujeta a un eje de transmisión. Sus momentos de inercia son  $I_A$  e  $I_B$ . Inicialmente, los discos están girando con velocidades angulares constantes  $\omega_A$  y  $\omega_B$ , respectivamente. Luego, juntamos los discos con fuerzas que actúan sobre el eje, a fin de no aplicar un momento de torsión a ningún disco. Los discos se frotan y finalmente alcanzan una velocidad angular final común  $\omega$ . Deduzca una expresión para  $\omega$ .

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** El único momento de torsión que actúa sobre cualquiera de los discos es el aplicado por el otro disco; no hay momentos externos. Así, la cantidad de movimiento angular total del sistema es la misma antes y después de juntarse los discos. Al final, giran como un solo cuerpo con momento de inercia total  $I = I_A + I_B$  y velocidad angular  $\omega$ , que es nuestra incógnita.





**10.31** Si el momento de torsión externo neto es cero, la cantidad de movimiento angular se conserva. Las fuerzas mostradas están sobre el eje de rotación y, por tanto, no ejercen un momento de torsión alrededor del eje sobre ningún punto.

**EJECUTAR:** La figura 10.31 muestra que todas las velocidades angulares tienen la misma dirección, así que podemos ver a  $\omega_A$ ,  $\omega_B$  y  $\omega$  como componentes de velocidad angular a lo largo del eje de rotación. La conservación de la cantidad de movimiento angular da

$$I_A\omega_A + I_B\omega_B = (I_A + I_B)\omega$$

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

**EVALUAR:** Este “choque” entre dos discos es análogo a un choque totalmente inelástico (sección 8.3). Cuando se juntan dos objetos en movimiento traslacional a lo largo del mismo eje y quedan pegados, la cantidad de movimiento lineal del sistema se conserva. En la situación de la figura 10.31, dos objetos en movimiento *rotacional* a lo largo del mismo eje se juntan y adhieren, y la cantidad de movimiento *angular* se conserva. En un choque totalmente inelástico, la energía cinética del sistema disminuye; en el ejemplo 10.15, veremos qué sucede con la energía cinética del “choque” de dos discos que giran.

### Ejemplo 10.15

### Un “choque” rotacional II

En el ejemplo 10.14, suponga que el volante *A* tiene masa de 2.0 kg, radio de 0.20 m y rapidez angular inicial de 50 rad/s (unas 500 rpm), y que la placa de embrague *B* tiene masa de 4.0 kg, radio de 0.10 m y rapidez angular inicial de 200 rad/s. Calcule la rapidez angular final común  $\omega$  después de juntarse los discos. ¿Qué sucede con la energía cinética durante este proceso?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Usaremos el resultado del ejemplo 10.14 y la expresión  $K = \frac{1}{2}I\omega^2$  para la energía cinética rotacional.

**EJECUTAR:** Los momentos de inercia de los discos son

$$I_A = \frac{1}{2}m_A r_A^2 = \frac{1}{2}(2.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_B = \frac{1}{2}m_B r_B^2 = \frac{1}{2}(4.0 \text{ kg})(0.10 \text{ m})^2 = 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Del ejemplo 10.14 tenemos

$$\omega = \frac{I_A\omega_A + I_B\omega_B}{I_A + I_B}$$

$$= \frac{(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(50 \text{ rad/s}) + (0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(200 \text{ rad/s})}{0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

$$= 100 \text{ rad/s}$$

La energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(50 \text{ rad/s})^2$$

$$+ \frac{1}{2}(0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(200 \text{ rad/s})^2$$

$$= 450 \text{ J}$$

La energía cinética final es

$$K_2 = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.040 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.020 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(100 \text{ rad/s})^2 = 300 \text{ J}$$

**EVALUAR:** Se perdió un tercio de la energía cinética inicial durante este “choque angular”, el análogo rotacional de un choque totalmente inelástico. No debemos esperar que se conserve la energía cinética, aunque la fuerza externa y momento de torsión resultantes sean cero, porque actúan fuerzas internas no conservadoras (de fricción) al frotarse los discos y acercarse gradualmente a una velocidad angular común.



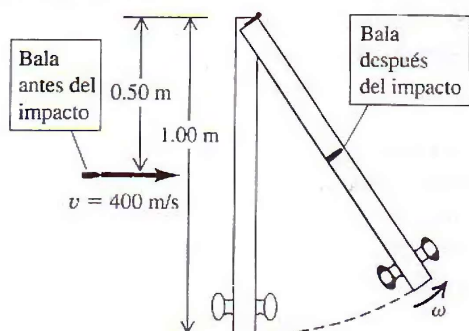
**Ejemplo  
10.16****Cantidad de movimiento angular en una acción policiaca**

Una puerta de 1.00 m de anchura y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta (Fig. 10.32). Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta. ¿Se conserva la energía cinética?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay momento de torsión externo alrededor del eje definido por las bisagras, así que la cantidad de movimiento angular respecto a este eje se conserva.

**PLANTEAR:** La cantidad de movimiento angular inicial está totalmente en la bala y está dada por la ecuación (10.28). La cantidad de movimiento angular final es la de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y despejaremos la rapidez angular  $\omega$  de la puerta y la bala inmediatamente después del choque.



**10.32** Una puerta se abre con un disparo (vista superior). La bala se incrusta en el centro de la puerta.

**EJECUTAR:** La cantidad de movimiento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010 \text{ kg})(400 \text{ m/s})(0.50 \text{ m}) = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

La cantidad de movimiento angular final es  $I\omega$ , donde  $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$ . De la tabla 9.2, para una puerta de anchura  $d$ ,

$$I_{\text{puerta}} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15 \text{ kg})(1.0 \text{ m})^2}{3} = 5.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{\text{bala}} = ml^2 = (0.010 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 = 0.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La conservación de la cantidad de movimiento angular exige que  $mvl = I\omega$ , o sea,

$$\omega = \frac{mvl}{I} = \frac{2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{5.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 0.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2} = 0.40 \text{ rad/s}$$

El choque de la bala con la puerta es inelástico porque durante el impacto actúan fuerzas no conservadoras. Por tanto, no esperamos que se conserve la energía cinética. Comprobamos esto calculando las energías cinéticas inicial y final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010 \text{ kg})(400 \text{ m/s})^2 = 800 \text{ J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(0.40 \text{ rad/s})^2 = 0.40 \text{ J}$$

¡La energía cinética final es sólo 1/2000 del valor inicial!

**EVALUAR:** La rapidez angular final de la puerta es muy baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar  $90^\circ$  ( $\pi/2$  radianes). ¿Le queda claro que la rapidez aumentaría al doble si la bala se disparara contra el borde de la puerta, cerca de la perilla?

**Evalúe su comprensión**

Si los casquetes polares se derritieran totalmente por el calentamiento global, el hielo derretido se redistribuiría en toda la Tierra. Use ideas de cantidad de movimiento angular para explicar cómo ese cambio afectaría la duración del día (el tiempo que la Tierra tarda en girar sobre su eje). Suponga que el Sol, la Luna y los planetas ejercen momentos de torsión despreciables sobre la Tierra.

**10.7 | Giróscopos y precesión**

En todas las situaciones que hemos examinado en este capítulo, el eje de rotación se ha mantenido fijo o, si se ha movido, ha mantenido su dirección (como en el rodamiento sin deslizamiento). Diversos fenómenos físicos nuevos, algunos inesperados, se presentan si el eje de rotación puede cambiar de dirección. Por ejemplo, consideremos un giróscopo de juguete apoyado en un extremo (Fig. 10.33). Si lo



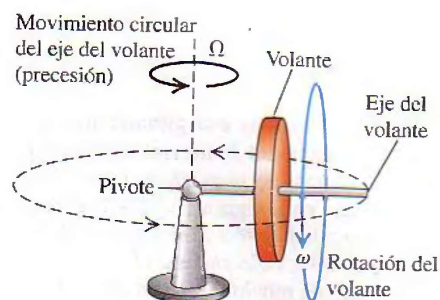
sostenemos con el eje del volante horizontal y lo soltamos, el extremo libre del eje cae debido a la gravedad... si el volante no está girando. Si el volante gira, lo que sucede es muy distinto. Una posibilidad es un movimiento circular uniforme del eje en un plano horizontal, combinado con la rotación del volante alrededor del eje. Este sorprendente movimiento del eje, no intuitivo, se denomina **precesión**. La precesión se observa en la Naturaleza, no sólo en máquinas giratorias como los giróscopos. En este momento la Tierra misma está en precesión: su eje de rotación (que pasa por los polos norte y sur) cambia lentamente de dirección, completando un ciclo de precesión cada 26,000 años.

Para estudiar este extraño fenómeno, debemos recordar que la velocidad angular, la cantidad de movimiento angular y el momento de torsión son cantidades *vectoriales*. En particular, necesitamos la relación general entre el momento de torsión neto  $\Sigma \vec{\tau}$  que actúa sobre un cuerpo y la rapidez de cambio de la cantidad de movimiento angular del cuerpo  $\vec{L}$ , dada por la ecuación  $\Sigma \vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ . Apliquemos primero esta ecuación al caso en que el volante *no* gira (Fig. 10.34a). Tomamos el origen  $O$  en el pivote y suponemos que el volante es simétrico, con masa  $M$  y momento de inercia  $I$  alrededor de su eje. Este eje inicialmente está sobre el eje  $x$ . Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el giróscopo son la fuerza normal  $\vec{n}$  que actúa en el pivote (donde suponemos que no hay fricción) y el peso  $\vec{w}$  del volante que actúa en su centro de masa, a una distancia  $r$  del pivote. La fuerza normal tiene momento de torsión cero respecto al pivote, y el peso tiene un momento de torsión  $\vec{\tau}$  en la dirección  $y$  (Fig. 10.34a). Al principio, no hay rotación y la cantidad de movimiento angular inicial  $\vec{L}_i$  es cero. Por la ecuación (10.32), el *cambio*  $d\vec{L}$  en la cantidad de movimiento angular en un intervalo corto  $dt$  después de este instante es

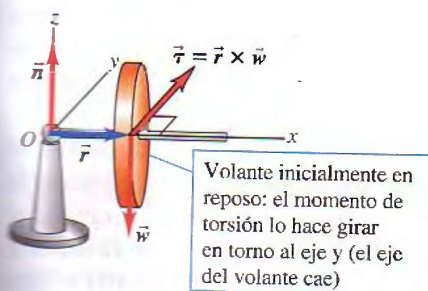
$$d\vec{L} = \vec{\tau} dt \quad (10.35)$$

Este cambio es en la dirección  $y$ , la de  $\vec{\tau}$ . Al transcurrir cada intervalo adicional  $dt$ , la cantidad de movimiento angular cambia en incrementos  $d\vec{L}$  en la dirección  $y$  porque la dirección del momento de torsión es constante (Fig. 10.34b). El aumento constante de la cantidad de movimiento angular horizontal implica que el giróscopo girará hacia abajo alrededor del eje  $y$  con rapidez creciente hasta tirar la base o golpear la mesa en la que ésta descansa.

Veamos ahora qué sucede si el volante *está* girando inicialmente, de modo que la cantidad de movimiento angular inicial  $\vec{L}_i$  no es cero (Fig. 10.35a). Dado que el volante gira alrededor de su eje de simetría,  $\vec{L}_i$  está sobre el eje. Sin embargo, cada cambio de cantidad de movimiento angular  $d\vec{L}$  es perpendicular al eje, porque el momento de torsión  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$  también lo es (Fig. 10.35b). Esto hace que cambie la *dirección* de  $\vec{L}$  pero no su magnitud. Los cambios  $d\vec{L}$  siempre están en el

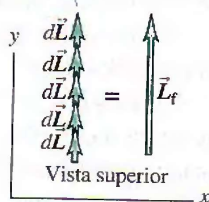


**10.33** Giróscopo apoyado en un extremo. Puesto que el volante gira con rapidez angular  $\omega$ , el volante y el eje no caen, sino que tienen un movimiento circular horizontal llamado precesión. La rapidez angular de la precesión es  $\Omega$ .



(a)

Cantidad de movimiento angular inicial cero ( $\vec{L}_i = 0$ ), momento de torsión  $\vec{\tau}$  siempre en la misma dirección, todos los vectores  $d\vec{L}$  en la misma dirección

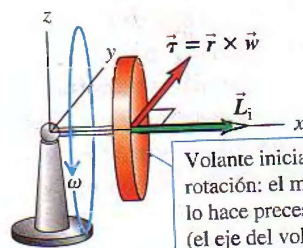


(b)

**10.34** (a) El volante no está girando inicialmente. El momento de torsión  $\vec{\tau}$  se debe al peso  $\vec{w}$ . (b) Vista directa hacia abajo desde arriba del giróscopo. En cada intervalo sucesivo de tiempo  $dt$ , el momento de torsión produce un cambio  $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$  en la cantidad de movimiento angular. En este caso, la cantidad de movimiento angular final  $\vec{L}_f$  tiene la misma dirección que  $\vec{\tau}$ , y el eje del volante cae.



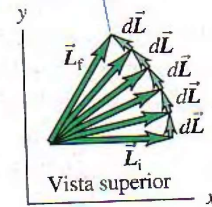
**10.35** (a) El volante está girando inicialmente con cantidad de movimiento angular  $\vec{L}_i$ . Las fuerzas (no se muestran) son las mismas que en la figura 10.34a. (b) Dado que la cantidad de movimiento angular inicial no es cero, cada cambio  $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$  en la cantidad de movimiento angular es perpendicular a  $\vec{L}$ . El resultado es que la magnitud de  $\vec{L}$  no cambia, pero su dirección cambia continuamente.



Volante inicialmente en rotación: el momento de torsión lo hace precesar en torno al eje z (el eje del volante no cae)

(a)

Hay una cantidad de movimiento angular inicial  $\vec{L}_i$ ; el momento de torsión  $\vec{\tau}$  sólo altera la dirección de  $\vec{L}$  (vectores  $d\vec{L}$  perpendiculares a  $\vec{L}$ )



Vista superior

(b)

plano horizontal  $xy$ , así que el vector de cantidad de movimiento angular y el eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. En otras palabras, el eje no cae; sólo tiene precesión.

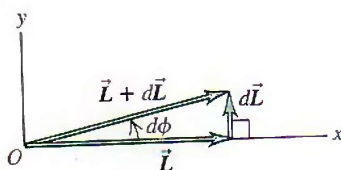
Si esto todavía le parece misterioso, imagine una pelota atada a un cordón. Si la pelota está en reposo y tiramos del cordón, la pelota se moverá hacia nosotros. Pero si la bola se está moviendo inicialmente y tiramos continuamente del cordón en una dirección perpendicular al movimiento de la pelota, ésta se moverá en un círculo alrededor de nuestra mano; no se acercará a ella. En el primer caso la pelota tiene cero cantidad de movimiento lineal  $\vec{p}$  al principio; cuando aplicamos una fuerza  $\vec{F}$  hacia nosotros durante un tiempo  $dt$ , la pelota adquiere una cantidad de movimiento  $d\vec{p} = \vec{F} dt$ , también hacia nosotros. Pero si la pelota ya tiene una cantidad de movimiento lineal  $\vec{p}$ , un cambio de cantidad de movimiento  $d\vec{p}$  perpendicular a  $\vec{p}$  cambiará la dirección del movimiento, no la rapidez. Sustituya  $\vec{p}$  por  $\vec{L}$  y  $\vec{F}$  por  $\vec{\tau}$  en este argumento, y verá que la precesión no es sino el análogo rotacional del movimiento circular uniforme.

En el instante que se muestra en la figura 10.35a, el giróscopo tiene cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$ . Un intervalo corto  $dt$  después, la cantidad de movimiento angular es  $\vec{L} + d\vec{L}$ ; el cambio infinitesimal en cantidad de movimiento angular es  $d\vec{L} = \vec{\tau} dt$ , perpendicular a  $\vec{L}$ . Como muestra el diagrama vectorial de la figura 10.36, esto implica que el eje de volante del giróscopo giró un ángulo pequeño  $d\phi$  dado por  $d\phi = |d\vec{L}|/|\vec{L}|$ . La rapidez con que se mueve el eje,  $d\phi/dt$ , se denomina **rapidez angular de precesión**; denotando esta cantidad con  $\Omega$ , tenemos

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau_z}{L_z} = \frac{wr}{I\omega} \quad (10.36)$$

Así, la rapidez angular de precesión es *inversamente* proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giróscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta; si la fricción en su cojinete hace que el volante se frene, ¡la rapidez angular de precesión *aumenta*! La rapidez angular de precesión de la Tierra es muy lenta (1 rev/26,000 años) porque su cantidad de movimiento angular de giro  $L_z$  es grande y el momento de torsión  $\tau_z$  debido a las influencias gravitacionales del Sol y la Luna es relativamente pequeño.

Al precesar un giróscopo, su centro de masa describe un círculo de radio  $r$  en un plano horizontal. La componente vertical de aceleración es cero, así que la fuerza normal hacia arriba  $\vec{n}$  ejercida por el pivote debe ser igual en magnitud al peso. El movimiento circular del centro de masa con rapidez angular  $\Omega$  requiere una fuerza  $\vec{F}$  dirigida hacia el centro del círculo, con magnitud  $F = M\Omega^2 r$ . Esta fuerza también debe ser proporcionada por el pivote.



**10.36** Vista detallada de parte de la figura 10.35b. En un tiempo  $dt$  el vector de cantidad de movimiento angular y el eje del volante precesan juntos un ángulo  $d\phi$ .



Un supuesto clave que hicimos en nuestro análisis del giróscopo fue que el vector de cantidad de movimiento angular  $\vec{L}$  sólo está asociado a la rotación del volante y es puramente horizontal. Sin embargo, también habrá una componente vertical de cantidad de movimiento angular asociada a la precesión del giróscopo. Al hacer caso omiso de esto, hemos supuesto tácitamente que la precesión es *lenta*, es decir, que la rapidez angular de precesión  $\Omega$  es mucho menor que la rapidez angular de rotación  $\omega$ . Como muestra la ecuación (10.36), un valor grande de  $\omega$  automáticamente produce un valor pequeño de  $\Omega$ , así que la aproximación es razonable. Si la precesión no es lenta, aparecen efectos adicionales, incluido un bamboleo vertical o *nutación* (vibración) del eje del volante, superpuesto a la precesión. Podemos ver la nutación (vibración) en un giróscopo cuando su rotación se hace lenta, de modo que  $\Omega$  aumenta y la componente vertical de  $\vec{L}$  ya no puede despreciarse.

### Ejemplo 10.17

### Giróscopo en precesión

La figura 10.37a es una vista superior de una rueda de giróscopo cilíndrica que un motor eléctrico puso a girar. El pivote está en  $O$  y la masa del eje es insignificante. a) Vista de arriba, ¿la precesión es horaria o antihoraria? b) Si una revolución de precesión tarda 4.0 s, ¿qué rapidez angular tiene la rueda?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR y PLANTEAR:** Determinaremos la dirección de precesión empleando la regla de la mano derecha como en la figura 10.35, que muestra el mismo tipo de giróscopo que la figura 10.37. Utilizaremos la relación entre rapidez angular de precesión  $\Omega$  y la rapidez angular de giro  $\omega$ , ecuación (10.36), para obtener el valor de  $\omega$ .

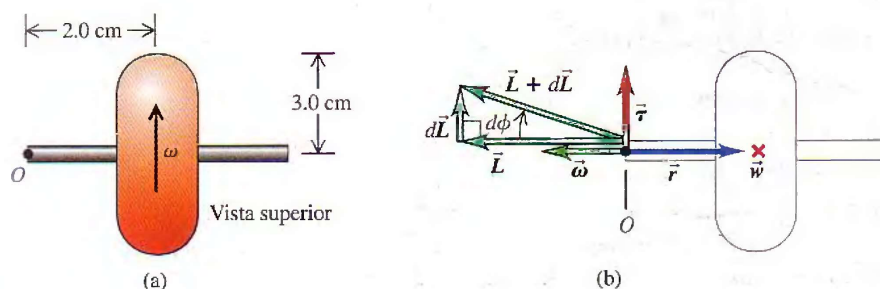
**EJECUTAR:** a) La regla de la mano derecha indica que  $\vec{\omega}$  y  $\vec{L}$  son a la izquierda (Fig. 10.37b). El peso  $\vec{w}$  apunta hacia adentro de la página en esta vista superior y actúa en el centro de masa (denotado con  $\times$ ); el momento de torsión  $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{w}$  es hacia arriba de la pá-

gina, lo mismo que  $d\vec{L}/dt$ . La adición de un pequeño  $d\vec{L}$  al  $\vec{L}$  que tenemos inicialmente altera la dirección de  $\vec{L}$  como se muestra, así que la precesión es horaria vista desde arriba.

b) Tenga cuidado de no confundir  $\omega$  y  $\Omega$ . Tenemos que  $\Omega = (1 \text{ rev})/(4.0 \text{ s}) = (2\pi \text{ rad})/(4.0 \text{ s}) = 1.57 \text{ rad/s}$ . El peso es  $mg$ , y el momento de inercia alrededor del eje de simetría de un cilindro sólido de radio  $R$  es  $I = \frac{1}{2}mR^2$ . Despejando  $\omega$  en la ecuación (10.36) tenemos

$$\omega = \frac{wr}{I\Omega} = \frac{mgr}{(mR^2/2)\Omega} = \frac{2gr}{R^2\Omega} = \frac{2(9.8 \text{ m/s}^2)(2.0 \times 10^{-2} \text{ m})}{(3.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2(1.57 \text{ rad/s})} = 280 \text{ rad/s} = 2600 \text{ rev/min}$$

**EVALUAR:** La rapidez angular de precesión  $\Omega$  es mucho menor que la rapidez angular de rotación  $\omega$ , así que tenemos un ejemplo de precesión lenta.



**10.37** ¿Qué dirección tiene la precesión del giróscopo?

#### Evalúe su comprensión

Suponga que la masa del volante de la figura 10.35 se aumenta al doble pero todas las demás dimensiones y la rapidez angular de rotación no cambian. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rapidez angular de precesión?