

▲ **FIGURA 8.17** Momento de fuerza sobre una partícula La magnitud del momento de fuerza sobre una partícula de masa  $m$  es  $\tau = mr^2a$ .

## 8.3 Dinámica rotacional

**OBJETIVOS:** a) Describir el momento de inercia de un cuerpo rígido y b) aplicar la forma rotacional de la segunda ley de Newton a situaciones físicas.

### Momento de inercia

El momento de fuerza es el análogo rotacional de la fuerza en un movimiento rectilíneo, y un momento de fuerza neto produce movimiento rotacional. Para analizar esta relación, considere una fuerza neta constante que actúa sobre una partícula de masa  $m$  en torno a un eje dado (►figura 8.17). La magnitud del momento de fuerza sobre la partícula es

$$\tau_{\text{neto}} = r_{\perp} F_{\text{neto}} = r F_{\perp} = r m a_{\perp} = m r^2 \alpha \quad \text{momento de fuerza sobre una partícula} \quad (8.4)$$

donde  $a_{\perp} = a_t = r\alpha$  es la aceleración tangencial ( $a_t$ , ecuación 7.13). Para analizar la rotación de un cuerpo rígido en torno a un eje fijo, aplicamos esta ecuación a cada partícula y obtenemos la sumatoria de los resultados en todo el cuerpo ( $n$  partículas), para calcular el momento de fuerza total. Puesto que todas las partículas de un cuerpo rígido en rotación tienen la misma aceleración angular, podemos sumar simplemente las magnitudes de todos los momentos de fuerza individuales:

$$\begin{aligned} \tau_{\text{neto}} &= \sum \tau_i = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots + \tau_n \\ &= m_1 r_1^2 \alpha + m_2 r_2^2 \alpha + m_3 r_3^2 \alpha + \cdots + m_n r_n^2 \alpha \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2) \alpha \\ \sum \tau_{\text{neto}} &= \left( \sum m_i r_i^2 \right) \alpha \end{aligned} \quad (8.5)$$

Sin embargo, en un cuerpo rígido, las masas ( $m_i$ ) y las distancias al eje de rotación ( $r_i$ ) no cambian. Por lo tanto, la cantidad entre paréntesis en la ecuación 8.5 es constante, y se denomina **momento de inercia**,  $I$  (para un eje dado):

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{momento de inercia} \quad (8.6)$$

Unidad SI de momento de inercia: kilogramo-metro al cuadrado ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

Nos conviene escribir la magnitud del momento de fuerza neto como:

$$\tau_{\text{neto}} = I \alpha \quad \text{momento de fuerza neto sobre un cuerpo rígido} \quad (8.7)$$

Ésta es la **forma rotacional de la segunda ley de Newton** ( $\vec{\tau}_{\text{neto}} = I \vec{\alpha}$ , en forma vectorial). Recordemos que, al igual que las fuerzas netas, se requieren momentos de fuerza netos ( $\tau_{\text{neto}}$ ) para producir aceleraciones angulares.

Como podría inferirse al comparar la forma rotacional de la segunda ley de Newton con la forma traslacional ( $\vec{F}_{\text{neto}} = m \vec{a}$ ), el momento de inercia  $I$  es una medida de la **inercia rotacional**: la tendencia de un cuerpo a resistir los cambios en su movimiento rotacional. Aunque  $I$  es constante para un cuerpo rígido y es el análogo rotacional de la masa, debemos tener presente que, a diferencia de la masa de una partícula, el momento de inercia de un cuerpo se refiere a un eje específico y puede tener diferente valor para diferentes ejes.

El momento de inercia también depende de la distribución de masa del cuerpo *relativa* a su eje de rotación. Es más fácil (es decir, se requiere un momento de fuerza menor) impartir a un objeto una aceleración angular en torno a ciertos ejes que en torno a otros. El ejemplo que sigue ilustra esto.

### Ejemplo 8.10 ■ Inercia rotacional: distribución de masa y eje de rotación

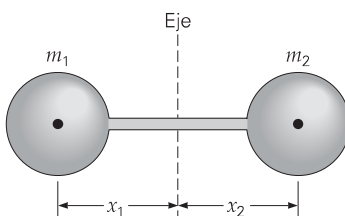
Calcule el momento de inercia en torno al eje indicada para cada una de las configuraciones unidimensionales de mancuerna de la ►figura 8.18. (Considere insignificante la masa de la barra conectora y exprese su respuesta con tres cifras significativas para efectuar comparaciones.)

**Razonamiento.** Ésta es una aplicación directa de la ecuación 8.6 a casos con masas y distancias diferentes. Mostrará que el momento de inercia de un objeto depende del eje de rotación y de la distribución de masa relativa al eje de rotación. La suma de  $I$  sólo incluirá dos términos (dos masas).

**Solución.**

**Dado:** Valores de  $m$  y  $r$  de la figura

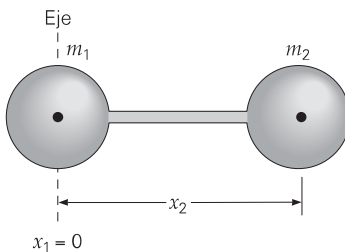
**Encuentre:**  $I = \sum m_i r_i^2$



a)  $m_1 = m_2 = 30 \text{ kg}$   
 $x_1 = x_2 = 0.50 \text{ m}$

b)  $m_1 = 40 \text{ kg}, m_2 = 10 \text{ kg}$   
 $x_1 = x_2 = 0.50 \text{ m}$

c)  $m_1 = m_2 = 30 \text{ kg}$   
 $x_1 = x_2 = 1.5 \text{ m}$



d)  $m_1 = m_2 = 30 \text{ kg}$   
 $x_1 = 0, x_2 = 3.0 \text{ m}$

e)  $m_1 = 40 \text{ kg}, m_2 = 10 \text{ kg}$   
 $x_1 = 0, x_2 = 3.0 \text{ m}$

▲ **FIGURA 8.18** Momento de inercia El momento de inercia depende de la distribución de la masa relativa a un eje de rotación dado y, en general, tiene un valor distinto para cada eje. Esta diferencia refleja el hecho de que los objetos giran más o menos fácilmente en torno a ciertos ejes. Véase el ejemplo 8.10.

Con  $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$ :

- a)  $I = (30 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (30 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 = 15.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 b)  $I = (40 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 + (10 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 = 12.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 c)  $I = (30 \text{ kg})(1.5 \text{ m})^2 + (30 \text{ kg})(1.5 \text{ m})^2 = 135 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 d)  $I = (30 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (30 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 = 270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$   
 e)  $I = (40 \text{ kg})(0 \text{ m})^2 + (10 \text{ kg})(3.0 \text{ m})^2 = 90.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Este ejemplo muestra claramente que el momento de inercia depende de la masa y de su distribución relativa a un eje específico de rotación. En general, el momento de inercia es mayor cuanto más lejos esté la masa del eje de rotación. Este principio es importante en el diseño de volantes, que se usan en los automóviles para que el motor siga operando suavemente entre encendidos de cilindros sucesivos. La masa del volante se concentra cerca del borde, lo que le confiere un momento de inercia grande, el cual resiste cambios en el movimiento.

**Ejercicio de refuerzo.** En los incisos d y e del ejemplo, ¿los momentos de inercia serían distintos si el eje de rotación pasara por  $m_2$ ? Explique.

## A FONDO 8.1 ESTABILIDAD EN ACCIÓN



**FIGURA 1** Inclinarsse contra la curva Al tomar una curva o dar vuelta, el ciclista debe inclinarse hacia el centro de la curva. (Este ciclista podría haber explicado el porqué.)

Cuando paseamos en una bicicleta y damos vuelta en una superficie plana, instintivamente nos inclinamos hacia el centro de la curva (figura 1). ¿Por qué? Parecería que, si nos inclinamos en vez de mantenemos verticales, aumentará la probabilidad de caernos. No obstante, la inclinación en realidad aumenta la estabilidad. Todo es cuestión de momentos de fuerza.

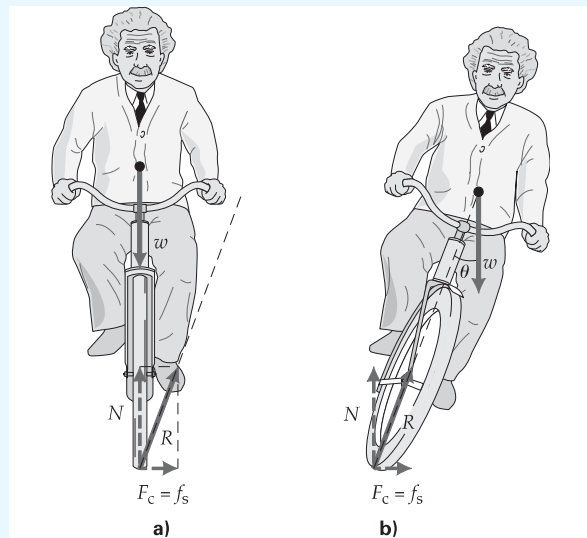
Cuando un vehículo toma una curva circular horizontal, se requiere una fuerza centrípeta para mantener al vehículo en el camino, como vimos en el capítulo 7. Esta fuerza generalmente es la fuerza de fricción estática entre los neumáticos y el pavimento. Como se ilustra en la figura 2a, la fuerza de reacción  $\vec{R}$  del suelo sobre la bicicleta proporciona la fuerza centrípeta requerida ( $\vec{R}_x = \vec{F}_c = \vec{f}_s$ ) para tomar la curva, y la fuerza normal ( $\vec{R}_y = \vec{N}$ ).

Suponga que, cuando actúan estas fuerzas, el ciclista intenta tomar la curva manteniéndose vertical, como en la figura 2a. Vemos que la línea de acción de  $\vec{R}$  no pasa por el centro de gravedad del sistema (indicado con un punto). Como el eje de rotación pasa por el centro de gravedad, habrá un momento de fuerza antihorario que tenderá a hacer girar la bicicleta, de tal

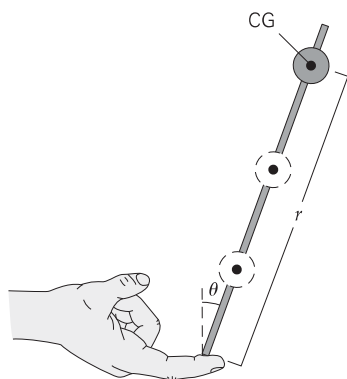
manera que las ruedas resbalen hacia adentro. En cambio, si el ciclista se inclina hacia adentro con el ángulo adecuado (figura 2b), tanto la línea de acción de  $\vec{R}$  como el peso pasarán por el centro de gravedad, y no habrá inestabilidad rotacional (como bien sabía el caballero de la bicicleta).

No obstante, sigue habiendo un momento de fuerza sobre el ciclista inclinado. Efectivamente, cuando se inclina hacia el centro de la curva, su peso produce un momento de fuerza en torno a un eje que pasa por el punto de contacto con el suelo. Este momento de fuerza, junto con el giro del manubrio, hace que la bicicleta dé vuelta. Si la bicicleta no se estuviera moviendo, habría rotación en torno a este eje, y la bicicleta y el ciclista se caerían.

La necesidad de inclinarse en las curvas es muy evidente en las carreras de ciclismo y de motociclismo en pistas horizontales. Las cosas pueden facilitarse para los competidores si la pista se peralta de manera que ofrezca una inclinación natural (sección 7.3).



**FIGURA 2** Da la vuelta Véase el texto para una descripción.



▲ FIGURA 8.19 ¿Mayor estabilidad con un centro de gravedad más alto? Véase el ejemplo integrado 8.11.

### Ejemplo integrado 8.11 ■ Equilibrismo: ubicación del centro de gravedad

a) Una varilla con una bola móvil, como la de la figura 8.19, se equilibra más fácilmente si la bola está en una posición más alta. ¿Esto se debe a que, cuando la bola está más alta, 1) el sistema tiene un centro de gravedad más alto y es más estable; 2) el centro de gravedad se aparta de la vertical, y el momento de fuerza y la aceleración angular son menores; 3) el centro de gravedad está más cerca del eje de rotación, o 4) el momento de inercia en torno al eje de rotación es mayor? b) Suponga que la distancia entre la bola y el dedo, para la posición extrema de la figura 8.19, es de 60 cm; mientras que la distancia de la posición más cercana es de 20 cm. Cuando la varilla gira, ¿cuántas veces mayor es la aceleración angular de la varilla con la bola en la posición más cercana, que con la bola en la posición más lejana? (Desprecie la masa de la varilla.)

**a) Razonamiento conceptual.** Con la bola en cualquier posición y la varilla vertical, el sistema está en equilibrio inestable. En la sección 8.2 vimos que los cuerpos rígidos con base ancha y centro de gravedad bajo son más estables, así que la respuesta 1) no es correcta. Un leve movimiento hará que la varilla gire en torno a un eje que pasa por el punto de contacto. Al estar el CG en una posición más alta y apartado de la vertical, el brazo de palanca será mayor (y el momento de fuerza también será *mayor*), así que la 2) también es incorrecta. Con la bola en una posición más alta, el centro de gravedad está *más lejos* del eje de rotación, de manera que la 3. también es incorrecta. Esto deja la 4) por proceso de eliminación, pero vamos a comprobar que sea correcta.

Alejar el CG del eje de rotación tiene una consecuencia interesante: un mayor momento de inercia, o resistencia a los cambios de movimiento rotacional y, por ende, una menor aceleración angular. Sin embargo, con la bola en una posición más alta, cuando la varilla comienza a girar el momento de fuerza es mayor. El resultado neto es el aumento en el momento de inercia produce una resistencia aun mayor al movimiento rotacional y, por lo tanto, una menor aceleración angular. [Note que el momento de fuerza ( $\tau = rF \sin \theta$ ) varía con  $r$ , mientras que el momento de inercia ( $I = mr^2$ ) varía con  $r^2$ , así que aumenta más al incrementarse  $r$ . ¿Qué efecto tiene  $\sin \theta$ ?] Entonces, cuanto más pequeña sea la aceleración angular, más tiempo tendremos para ajustar la mano bajo la varilla, para equilibrarla alineando verticalmente el eje de rotación y el centro de gravedad. Entonces, el momento de fuerza será cero y la varilla estará otra vez en equilibrio, aunque inestable. Por tanto, la respuesta correcta es 4.

**b) Razonamiento cuantitativo y solución.** Cuando se pregunta cuántas veces algo es mayor o menor que otra cosa, por lo regular implica el uso de un cociente donde se cancelan una o más cantidades que no se conocen. No nos dan la masa de la bola, que necesitaríamos para calcular el momento de fuerza gravitacional ( $\tau$ ). Tampoco nos dan el ángulo  $\theta$ . Por lo tanto, lo mejor es partir de las ecuaciones básicas y ver qué sucede.

**Dado:**  $r_1 = 20 \text{ cm}$     **Encuentre:** cuántas veces es mayor la aceleración angular de la varilla con la bola en  $r_1$ , en comparación con  $r_2$   
 $r_2 = 60 \text{ cm}$

La aceleración angular está dada por la ecuación 8.7,  $\alpha = \tau_{\text{neto}}/I$ . Por lo tanto, nos fijamos en el momento de fuerza  $\tau_{\text{neto}}$  y en el momento de inercia  $I$ . Por las ecuaciones básicas del capítulo,  $\tau_{\text{neto}} = r_1 F = rF \sin \theta$  (ecuación 8.2) o  $\tau_{\text{neto}} = rmg \sin \theta$ , donde  $F = mg$  en este caso, siendo  $m$  la masa de la bola. Asimismo,  $I = mr^2$  (ecuación 8.6). Por lo tanto,

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{neto}}}{I} = \frac{rmg \sin \theta}{mr^2} = \frac{g \sin \theta}{r}$$

(Note que la aceleración angular  $\alpha$  es inversamente proporcional al brazo de palanca  $r$ ; es decir, cuanto mayor sea el brazo de palanca, menor será la aceleración angular.)  $\sin \theta$  no ha desaparecido, pero observemos qué sucede cuando se forma el cociente de las aceleraciones angulares:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{g \sin \theta / r_1}{g \sin \theta / r_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{60 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 3 \quad \text{o} \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{3}$$

Por lo tanto, la aceleración angular de la varilla con la bola en la posición superior es un tercio de la aceleración, cuando la bola está en la posición inferior.

**Ejercicio de refuerzo.** Al caminar sobre una barra delgada, como un riel de ferrocarril, el lector seguramente habrá notado que es más fácil si estira los brazos a los lados. Por lo mismo, los equilibristas a menudo usan pértigas largas, como en la imagen con que inicia el capítulo. ¿Cómo ayuda esta postura a mantener el equilibrio?

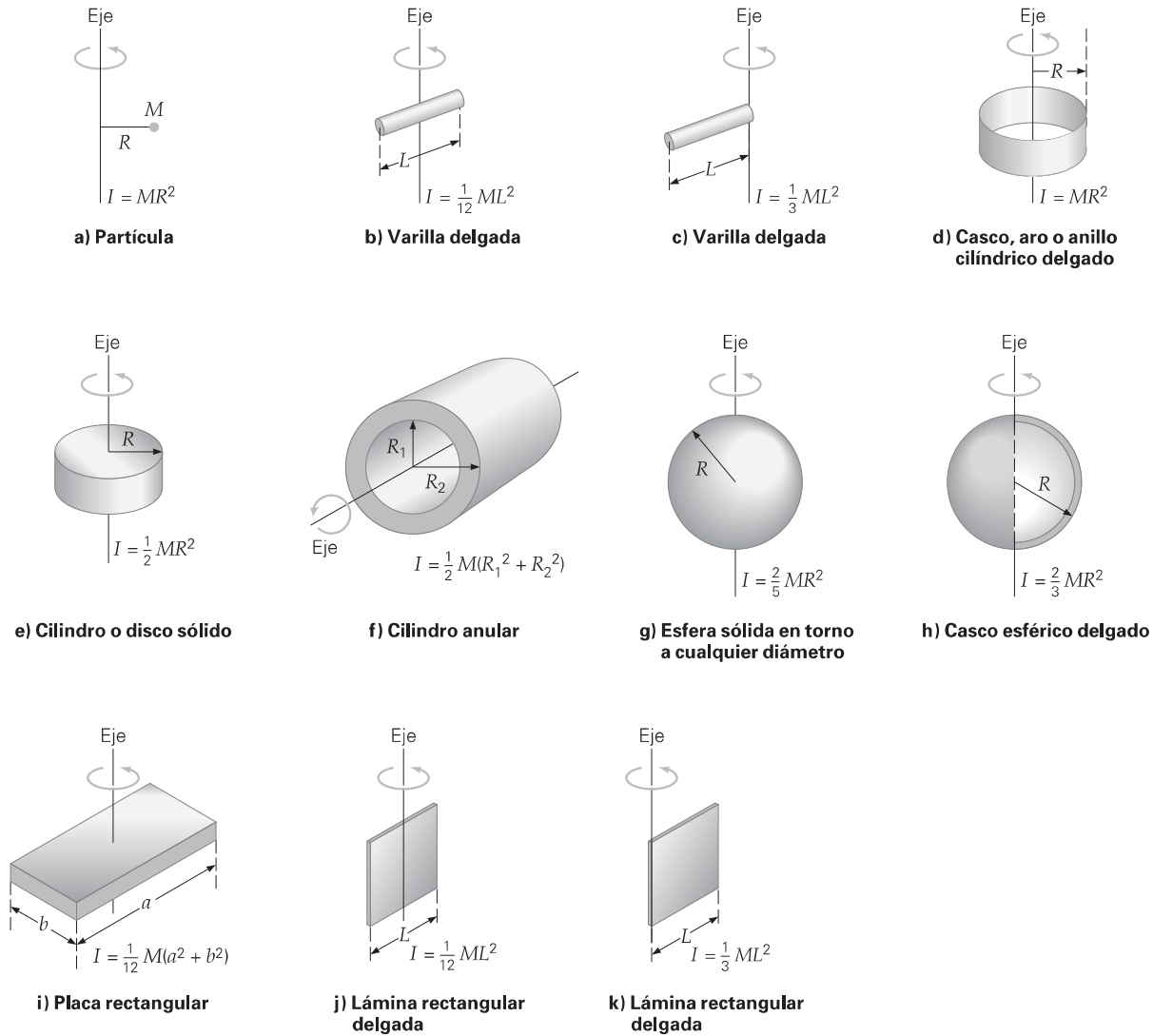
Como muestra el Ejemplo integrado 8.11, el momento de inercia es una consideración importante en el movimiento rotacional. Si modificamos el eje de rotación y la distribución relativa de la masa, podremos cambiar el valor de  $I$  y afectar el movimiento. Si el lector alguna vez jugó fútbol o béisbol, probablemente le hicieron una recomendación en este sentido. Al batear, suele aconsejarse a los niños que sujeten el bate más arriba.

Ahora sabemos por qué. Al hacerlo, el niño acerca el eje de rotación del bate al extremo más masivo del bate (o a su centro de masa). Esto reduce el momento de inercia del bate (menor  $r$  en el término  $mr^2$ ). Entonces, al batear, la aceleración angular será mayor. El bate oscila más rápidamente y aumenta la probabilidad de golpear la pelota antes de que pase. El bateador sólo dispone de una fracción de segundo para hacer el *swing*, y con  $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$ , la mayor  $\alpha$  permite al bate girar más rápidamente.

### Teorema de ejes paralelos

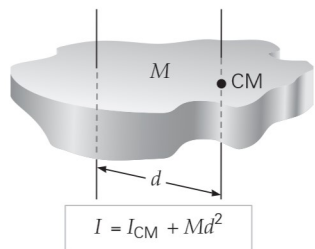
Calcular el momento de inercia de la mayoría de los cuerpos rígidos extendidos requiere matemáticas que están más allá del alcance de este libro. En la [figura 8.20](#) se presentan los resultados para algunas formas comunes. Los ejes de rotación generalmente se hacen coincidir con ejes de simetría (ejes que pasan por el centro de masa),

▼ **FIGURA 8.20** Momento de inercia de algunos objetos de densidad uniforme y formas comunes





**Nota:**  $I = I_{CM}$ , el valor mínimo de  $I$ , cuando  $d = 0$ .



▲ **FIGURA 8.21** Teorema de ejes paralelos El momento de inercia en torno a un eje paralelo a otro que pasa por el centro de masa de un cuerpo es  $I = I_{CM} + Md^2$ , donde  $M$  es la masa total del cuerpo y  $d$  es la distancia entre los dos ejes.



▲ **FIGURA 8.22** Momento de fuerza en acción Véase el ejemplo 8.12.

para tener una distribución simétrica de la masa. Una excepción es la varilla con eje de rotación en un extremo (figura 8.20c). Este eje es paralelo a un eje de rotación que pasa por el centro de masa de la varilla (figura 8.20b). El momento de inercia en torno a tal eje paralelo está dado por un útil teorema llamado **teorema de ejes paralelos**; a saber,

$$I = I_{CM} + Md^2 \quad (8.8)$$

donde  $I$  es el momento de inercia en torno a un eje paralelo a uno que pasa por el centro de masa y está a una distancia  $d$  de él,  $I_{CM}$  es el momento de inercia en torno a un eje que pasa por el centro de masa y  $M$  es la masa total del cuerpo (◀ figura 8.21). Si el eje pasa por el extremo de la varilla (figura 8.20c), el momento de inercia se obtiene aplicando el teorema de ejes paralelos a la varilla delgada de la figura 8.20b:

$$I = I_{CM} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

### Aplicaciones de dinámica rotacional

La forma rotacional de la segunda ley de Newton nos permite analizar situaciones de dinámica rotacional. Los ejemplos 8.12 y 8.13 ilustran esto. En tales situaciones, es muy importante enumerar debidamente todos los datos, por el gran número de variables.

#### Ejemplo 8.12 ■ Abrir la puerta: momento de fuerza en acción

Un estudiante abre una puerta uniforme de 12 kg aplicando una fuerza constante de 40 N a una distancia perpendicular de 0.90 m de las bisagras (◀ figura 8.22). Si la puerta tiene 2.0 m de altura y 1.0 m de ancho, ¿qué magnitud tendrá su aceleración angular? (Suponga que la puerta gira libremente sobre sus bisagras.)

**Razonamiento.** Con la información dada, podemos calcular el momento de fuerza neto aplicado. Para calcular la aceleración angular de la puerta, necesitamos conocer su momento de inercia. Podemos calcularlo, porque conocemos la masa y las dimensiones de la puerta.

**Solución.** Con la información dada en el problema, elaboramos la lista:

**Dado:**  $M = 12 \text{ kg}$  **Encuentre:**  $\alpha$  (magnitud de la aceleración angular)  
 $F = 40 \text{ N}$   
 $r_{\perp} = r = 0.90 \text{ m}$   
 $h = 2.0 \text{ m}$  (altura de la puerta)  
 $w = 1.0 \text{ m}$  (ancho de la puerta)

Necesitamos aplicar la forma rotacional de la segunda ley de Newton (ecuación 8.7),  $\tau_{\text{neto}} = I\alpha$ , donde  $I$  es en torno al eje de las bisagras.  $\tau_{\text{neto}}$  se calcula a partir de los datos, de manera que el problema se reduce a determinar el momento de inercia de la puerta.

Examinando la figura 8.20, vemos que el caso (k) corresponde a una puerta (tratada como rectángulo uniforme) que gira sobre bisagras, así que  $I = \frac{1}{3}ML^2$ , donde  $L = w$ , el ancho de la puerta. Entonces,

$$\tau_{\text{neto}} = I\alpha$$

o

$$\alpha = \frac{\tau_{\text{neto}}}{I} = \frac{r_{\perp}F}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3rF}{Mw^2} = \frac{3(0.90 \text{ m})(40 \text{ N})}{(12 \text{ kg})(1.0 \text{ m})^2} = 9.0 \text{ rad/s}^2$$

**Ejercicio de refuerzo.** En este ejemplo, si se aplicara el momento de fuerza constante a lo largo de una distancia angular de  $45^\circ$  y luego se dejara de aplicar, ¿cuánto tardaría la puerta en abrirse totalmente ( $90^\circ$ )?

En problemas con poleas en el capítulo 4, siempre despreciamos la masa (y la inercia) de la polea para simplificar. Ahora sabemos cómo incluir tales cantidades y podemos tratar las poleas de forma más realista, como en el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 8.13 ■ Las poleas también tienen masa: consideración de la inercia de una polea

Un bloque de masa  $m$  cuelga de una cuerda que pasa por una polea sin fricción, con forma de disco, de masa  $M$  y radio  $R$ , como se muestra en la **figura 8.23**. Si el bloque desciende desde el reposo bajo la influencia de la gravedad, ¿qué magnitud tendrá su aceleración lineal? (Desprecie la masa de la cuerda.)

**Razonamiento.** Las poleas reales tienen masa e inercia rotacional, lo que afecta su movimiento. La masa suspendida (con la cuerda) aplica un momento de fuerza a la polea. Aquí usaremos la forma rotacional de la segunda ley de Newton para obtener la aceleración angular de la polea y, luego, su aceleración tangencial, la cual tiene la misma magnitud que la aceleración lineal del bloque. (¿Por qué?) Como no se dan valores numéricos, la respuesta quedará en forma de símbolos.

**Solución.** La aceleración lineal del bloque depende de la aceleración angular de la polea, así que examinaremos primero el sistema de la polea. Tratamos a la polea como un disco, así que su momento de inercia es  $I = \frac{1}{2}MR^2$  (figura 8.20e). Un momento de fuerza debido a la fuerza de tensión en la cuerda ( $T$ ) actúa sobre la polea. Con  $\tau = I\alpha$  (considerando sólo el recuadro superior de la figura 8.23), obtenemos

$$\tau_{\text{neto}} = r_{\perp}F = RT = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha$$

de manera que

$$\alpha = \frac{2T}{MR}$$

La aceleración lineal del bloque y la aceleración angular de la polea están relacionados por  $a = R\alpha$ , donde  $a$  es la aceleración tangencial, y

$$a = R\alpha = \frac{2T}{M} \quad (1)$$

Sin embargo, no conocemos  $T$ . Si examinamos la masa en descenso (el recuadro inferior) y sumamos las fuerzas en la dirección vertical (positivas en la dirección del movimiento), tendremos

$$mg - T = ma$$

es decir,

$$T = mg - ma \quad (2)$$

Ahora usamos la ecuación 2 para eliminar  $T$  de la ecuación 1:

$$a = \frac{2T}{M} = \frac{2(mg - ma)}{M}$$

Despejando  $a$ ,

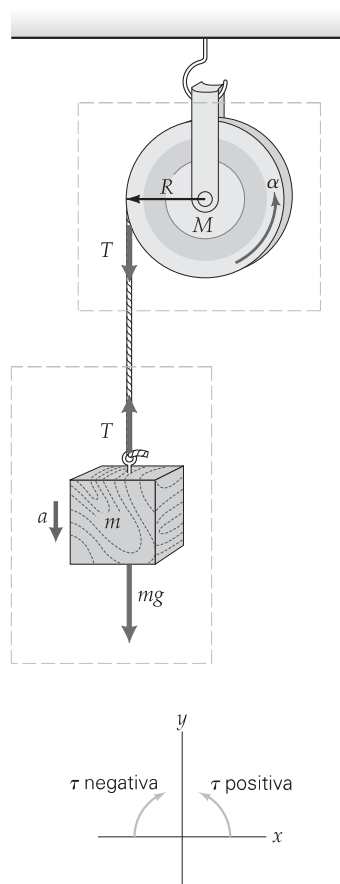
$$a = \frac{2mg}{(2m + M)} \quad (3)$$

Vemos que si  $M \rightarrow 0$  (como en el caso de las poleas ideales sin masa de capítulos anteriores),  $I \rightarrow 0$  y  $a = g$  (por la ecuación 3). Aquí, sin embargo,  $M \neq 0$ , así que tenemos  $a < g$ . (¿Por qué?)

**Ejercicio de refuerzo.** Es posible caracterizar de forma incluso más realista las poleas. En este ejemplo, despreciamos la fricción, pero en la práctica existe un momento de fuerza de fricción ( $\tau_f$ ) que debe incluirse. ¿Qué forma tendría la aceleración angular (similar a la ecuación 3) en este caso? Demuestre que su resultado es dimensionalmente correcto.

En ejercicios de poleas, también despreciamos la masa de la cuerda. Es una estrategia que da una buena aproximación si la cuerda es relativamente ligera. Si tomáramos en cuenta la masa de la cuerda, tendríamos una masa continuamente variable que cuelga de la polea, y el momento de fuerza producido sería variable. Un problema así rebasa el alcance de este libro.

Suponga que tenemos masas suspendidas de ambos lados de una polea. En este caso, habría que calcular el momento de fuerza neto. Si no conocemos los valores de las masas o el sentido en que girará la polea, tan sólo suponemos una dirección. Al igual que en el caso lineal, si el resultado sale con el signo opuesto, indicará que supusimos la dirección equivocada.



▲ **FIGURA 8.23** Polea con inercia Si tomamos en cuenta la masa (inercia rotacional) de una polea, seremos capaces de describir de manera más realista el movimiento. Véase el ejemplo 8.13.



Exploración 10.3 Momento de fuerza y momento de inercia



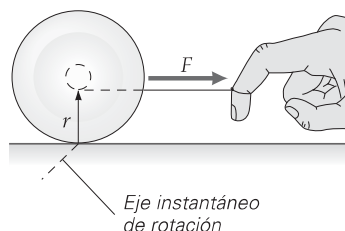
Exploración 10.4 Momento de fuerza sobre una polea debido a la tensión de dos cuerdas

## Sugerencia para resolver problemas

En problemas como los de los ejemplos 8.13 y 8.14, que se ocupan de movimientos rotacionales y traslacionales acoplados, debemos tener en cuenta que, si la cuerda no resbala, las magnitudes de las aceleraciones generalmente están relacionadas por  $a = r\alpha$ ; mientras que  $v = r\omega$  relaciona las magnitudes de las velocidades en cualquier instante. Si aplicamos la segunda ley de Newton (en forma rotacional o lineal) a diferentes partes del sistema, obtendremos ecuaciones que pueden combinarse utilizando tales relaciones. También en el caso de rodamiento sin deslizamiento,  $a = r\alpha$  y  $v = r\omega$  relacionan las cantidades angulares con el movimiento rectilíneo del centro de masa.

Otra aplicación de la dinámica rotacional es el análisis del movimiento de objetos que pueden rodar.

## Ejemplo conceptual 8.14 ■ Aplicación de otro momento de fuerza: ¿en qué sentido rueda el yo-yo?



▲ FIGURA 8.24 Tirar de la cuerda del yo-yo Véase el ejemplo conceptual 8.14.

Se tira de la cuerda de un yo-yo que descansa en una superficie horizontal, como se muestra en la figura 8.24. ¿El yo-yo rodará *a)* hacia la persona o *b)* en la dirección opuesta?

**Razonamiento y respuesta.** Apliquemos a la situación los principios de física que acabamos de estudiar. Vemos que el eje instantáneo de rotación está en la línea de contacto entre el yo-yo y la superficie. Si tuviéramos una vara parada verticalmente donde está el vector  $\vec{r}$  y tiráramos de una cuerda sujeta a la parte superior de la vara, en la dirección de  $\vec{F}$ , ¿en qué sentido giraría la vara? En sentido horario (alrededor de su eje instantáneo de rotación), desde luego. El yo-yo reacciona de forma similar; es decir, rueda en la dirección de la tracción, así que la respuesta es *a*. (Si el lector no está convencido, consiga un yo-yo y pruébelo.)

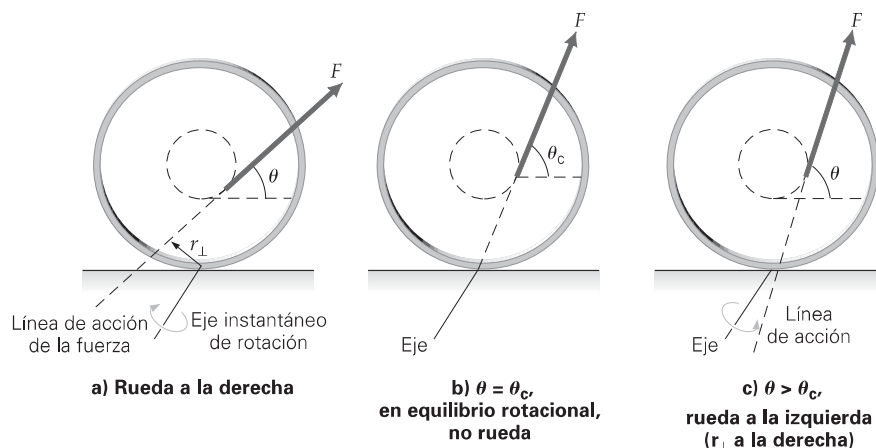
Esta situación tiene otros aspectos interesantes en física. La fuerza de tracción no es la única fuerza que actúa sobre el yo-yo; hay otras tres. ¿Aportan momentos de fuerza? Identifiquemos las fuerzas. Tenemos el peso del yo-yo y la fuerza normal de la superficie. También hay una fuerza horizontal de fricción estática entre el yo-yo y la superficie. (Si no la hubiera, el yo-yo resbalaría en lugar de rodar.) Sin embargo, las líneas de acción de estas tres fuerzas pasan por la línea de contacto, que es el eje instantáneo de rotación, así que no hay momentos de fuerza. (¿Por qué?)

¿Qué sucedería si aumentáramos el ángulo de la cuerda, es decir, de la fuerza de tracción (relativo a la horizontal) como se muestra en la figura 8.25a? El yo-yo seguiría rodando hacia la derecha. Como se aprecia en la figura 8.25b, con cierto ángulo crítico  $\theta_c$  la línea de fuerza pasa por el eje de rotación y el momento de fuerza neto sobre el yo-yo es cero, así que el yo-yo no rueda.

Si rebasamos este ángulo crítico (figura 8.25c), el yo-yo comenzará a rodar en sentido antihorario, es decir, hacia la izquierda. Note que la línea de acción de la fuerza está al otro lado del eje de rotación, en comparación con la figura 8.26a, y el brazo de palanca ( $r_\perp$ ) cambió de dirección, así que se invirtió la dirección del momento de fuerza neto.

**Ejercicio de refuerzo.** Suponga que la cuerda del yo-yo está en el ángulo crítico y se pasa sobre una barra redonda horizontal que está a una altura adecuada. Se cuelga un peso del extremo de la cuerda, de manera que suministre la fuerza necesaria para la condición de equilibrio. ¿Qué sucederá si ahora tiramos del yo-yo hacia nosotros, alejándolo de su posición de equilibrio, y lo soltamos?

► FIGURA 8.25 El ángulo hace la diferencia *a)* Si la línea de acción está a la izquierda del eje instantáneo, el yo-yo rodará hacia la derecha. *b)* Con un ángulo crítico  $\theta_c$ , la línea de acción pasa por el eje, y el yo-yo estará en equilibrio. *c)* Cuando la línea de acción está a la derecha del eje, el yo-yo rueda hacia la izquierda. Véase el ejemplo conceptual 8.14.



## 8.4 Trabajo rotacional y energía cinética

**OBJETIVOS:** Analizar, explicar y usar las formas rotacionales de a) el trabajo, b) la energía cinética y c) la potencia.

En esta sección presentaremos los análogos rotacionales de diversas ecuaciones del movimiento rectilíneo asociadas con el trabajo y la energía cinética, para momentos de fuerza constantes. Como su desarrollo es similar al de sus contrapartes rectilíneas, no lo explicaremos detalladamente. Al igual que en el capítulo 5,  $W$  es el trabajo neto si dos o más fuerzas o momentos de fuerza actúan sobre un objeto.

**Trabajo rotacional** Podemos pasar directamente del trabajo efectuado por una fuerza al trabajo efectuado por un momento de fuerza, pues los dos están relacionados ( $\tau = r_{\perp}F$ ). En movimiento rotacional, el **trabajo rotacional**  $W = Fs$  efectuado por una sola fuerza  $F$  que actúa tangencialmente a lo largo de un arco  $s$  es

$$W = Fs = F(r_{\perp}\theta) = \tau\theta$$

donde  $\theta$  está en radianes. Así, para un solo momento de fuerza que actúa durante un ángulo de rotación  $\theta$ ,

$$W = \tau\theta \quad (\text{una sola fuerza}) \quad (8.9)$$

En este libro, los vectores tanto del momento de fuerza ( $\tau$ ) como del desplazamiento angular ( $\theta$ ) casi siempre estarán sobre el eje fijo de rotación, de manera que no hay que preocuparse por componentes paralelos, como en el caso del trabajo traslacional. El momento de fuerza y el desplazamiento angular podrían tener direcciones opuestas, en cuyo caso el momento de fuerza efectuará trabajo negativo y frenará la rotación del cuerpo. Esta situación es similar a la del movimiento traslacional cuando  $F$  y  $d$  tienen direcciones opuestas.

**Potencia rotacional** De la ecuación 8.9 es fácil deducir una expresión para la **potencia rotacional** instantánea, el análogo rotacional de la potencia (rapidez de realización de trabajo):

$$P = \frac{W}{t} = \tau\left(\frac{\theta}{t}\right) = \tau\omega \quad (8.10)$$

### Teorema trabajo-energía y energía cinética

Podemos deducir la relación entre el trabajo rotacional neto efectuado sobre un cuerpo rígido (actúa más de una fuerza) y el cambio de energía cinética rotacional del cuerpo, partiendo de la ecuación para trabajo rotacional:

$$W_{\text{neto}} = \tau\theta = I\alpha\theta$$

Puesto que suponemos que nuestros momentos de fuerza se deben exclusivamente a fuerzas constantes,  $\alpha$  es constante. Sin embargo, por la cinemática rotacional del capítulo 7, sabemos que para una aceleración angular constante,  $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$ , y

$$W_{\text{neto}} = I\left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2$$

Por la ecuación 5.6 (trabajo-energía), sabemos que  $W_{\text{neto}} = \Delta K$ . Por lo tanto,

$$W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = K - K_0 = \Delta K \quad (8.11)$$

Entonces, la expresión para la **energía cinética rotacional**,  $K$ , es

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (8.12)$$

Así, el trabajo rotacional neto efectuado sobre un objeto es igual al cambio de energía cinética rotacional del objeto (con cero energía cinética rectilínea). Por lo tanto, si queremos alterar la energía cinética rotacional de un objeto, tendremos que aplicar un momento de fuerza neto.

Es posible deducir directamente la expresión para la energía cinética de un cuerpo rígido en rotación (en torno a un eje fijo). La sumatoria de las energías cinéticas instantáneas de las partículas individuales del cuerpo, relativas al eje fijo, da

$$K = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(\sum m_i r_i^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde, para cada partícula del cuerpo,  $v_i = r_i\omega$ . Así, la ecuación 8.12 no representa una nueva forma de energía; más bien es sólo otra expresión para la energía cinética, en una forma más conveniente para estudiar la rotación de cuerpos rígidos.

Trabajo rotacional

Potencial rotacional

Análogo rotacional del teorema trabajo-energía

Energía cinética rotacional

**TABLA 8.1** Cantidades y ecuaciones traslacionales y rotacionales

Traslacional		Rotacional	
Fuerza:	$\vec{F}$	Momento de fuerza (magnitud):	$\tau = rF \sin \theta$
Masa (inercia):	$m$	Momento de inercia:	$I = \sum m_i r_i^2$
Segunda ley de Newton:	$\vec{F}_{\text{neto}} = m\vec{a}$	Segunda ley de Newton:	$\vec{\tau}_{\text{neto}} = I\vec{\alpha}$
Trabajo:	$W = Fd$	Trabajo:	$W = \tau\theta$
Potencia:	$P = Fv$	Potencia:	$P = \tau\omega$
Energía cinética:	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energía cinética:	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Teorema trabajo-energía:	$W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta K$	Teorema trabajo-energía:	$W_{\text{neto}} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \Delta K$
Cantidad de movimiento lineal:	$\vec{p} = m\vec{v}$	Cantidad de movimiento angular:	$\vec{L} = I\vec{\omega}$

En la tabla 8.1 se resumen los análogos traslacionales y rotacionales. (Aparece también la cantidad de movimiento angular, que veremos en la sección 8.5.)

Cuando un objeto tiene movimiento tanto traslacional como rotacional, su energía cinética total podría dividirse en partes que reflejen los dos tipos de movimiento. Por ejemplo, para un cilindro que rueda sin resbalar en una superficie horizontal, el movimiento es puramente rotacional relativo al eje instantáneo de rotación (el punto o línea de contacto), que está instantáneamente en reposo. La energía cinética total del cilindro rodante es

$$K = \frac{1}{2}I_i\omega^2$$

donde  $I_i$  es el momento de inercia en torno al eje instantáneo. Este momento de inercia alrededor del punto de contacto (nuestro eje) está dado por el teorema de ejes paralelos (ecuación 8.8),  $I_i = I_{\text{CM}} + MR^2$ , donde  $R$  es el radio del cilindro. Entonces,

$$K = \frac{1}{2}I_i\omega^2 = \frac{1}{2}(I_{\text{CM}} + MR^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

Sin embargo, como no hay deslizamiento,  $v_{\text{CM}} = R\omega$ , y

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 \quad (\text{rodamiento sin resbalar}) \quad (8.13)$$

$$\underset{\text{KE}}{\text{total}} = \underset{\text{KE}}{\text{rotacional}} + \underset{\text{KE}}{\text{traslacional}}$$

Aunque aquí usamos un cilindro como ejemplo, éste es un resultado general, válido para cualquier objeto que rueda sin resbalar.

Así, la *energía cinética total de un objeto es la suma de dos aportaciones: la energía cinética traslacional del centro de masa del objeto y la energía cinética rotacional del objeto relativa a un eje horizontal que pasa por su centro de masa.*

**Nota:** un cuerpo rodante tiene energía cinética tanto traslacional como rotacional.

### Ejemplo 8.15 ■ División de energía: rotacional y traslacional

Un cilindro sólido uniforme de 1.0 kg rueda sin resbalar con una rapidez de 1.8 m/s sobre una superficie plana. *a)* Calcule la energía cinética total del cilindro. *b)* ¿Qué porcentaje de este total es energía cinética rotacional?

**Razonamiento.** El cilindro tiene energía cinética tanto rotacional como traslacional, así que podemos usar la ecuación 8.13, cuyos términos están relacionados por la condición de rodar sin resbalar.

**Solución.**

**Dado:**  $M = 1.0 \text{ kg}$       **Encuentre:** *a)*  $K$  (energía cinética total)  
 $v_{\text{CM}} = 1.8 \text{ m/s}$       *b)*  $\frac{K_r}{K} (\times 100\%)$  (porcentaje de energía rotacional)  
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2$  (de la figura 8.20e)

**a)** El cilindro rueda sin resbalar, así que se cumple la condición  $v_{\text{CM}} = R\omega$ . Entonces, la energía cinética total es la suma de la energía cinética rotacional,  $K_r$ , y la energía cinética traslacional del centro de masa,  $K_{\text{CM}}$  (ecuación 8.13):

$$K = \frac{1}{2}I_{\text{CM}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{\text{CM}}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2 = \frac{1}{4}Mv_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{CM}}^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_{\text{CM}}^2 = \frac{3}{4}(1.0 \text{ kg})(1.8 \text{ m/s})^2 = 2.4 \text{ J}$$



Ilustración 11.3 Energía cinética rotacional y traslacional



b) La energía cinética rotacional  $K_r$  del cilindro es el primer término de la ecuación anterior, así que formamos un cociente en forma simbólica para obtener

$$\frac{K_r}{K} = \frac{\frac{1}{4} M v_{CM}^2}{\frac{3}{4} M v_{CM}^2} = \frac{1}{3} (\times 100\%) = 33\%$$

Así, la energía cinética total del cilindro se compone de una parte rotacional y una traslacional, siendo la rotacional la tercera parte del total.

En el inciso b no necesitamos el radio del cilindro ni la masa. Como usamos un cociente, se cancelaron estas cantidades. Sin embargo, *no* hay que pensar que esta división exacta de la energía es un resultado general. Es fácil demostrar que el porcentaje es distinto para objetos con diferente momento de inercia. Por ejemplo, cabe esperar que una esfera rodante tenga un porcentaje menor de energía cinética rotacional que un cilindro, porque su momento de inercia es menor ( $I = \frac{2}{5} MR^2$ ).

**Ejercicio de refuerzo.** Podemos incluir la energía potencial aplicando la conservación de la energía a un objeto que rueda por un plano inclinado. En este ejemplo, suponga que el cilindro sube por un plano inclinado de  $20^\circ$  sin resbalar. a) ¿A qué altura vertical (medida por la distancia vertical de su CM) en el plano se detendrá el cilindro? b) Para calcular la altura en el inciso a), el lector seguramente igualó la energía cinética inicial con la energía potencial gravitacional final. Es decir, la energía cinética total se redujo por el trabajo efectuado por la gravedad. Sin embargo, también actúa una fuerza de fricción (que evita el deslizamiento). ¿No efectúa trabajo también esa fuerza?

### Ejemplo 8.16 ■ Bajar rodando o resbalando: ¿cuál es más rápido?

Un aro cilíndrico uniforme se suelta desde el reposo a una altura de 0.25 m en un plano inclinado, cerca de su parte superior (► figura 8.26). Si el cilindro baja rodando por el plano sin resbalar y no se pierde energía por la fricción, ¿qué rapidez lineal tiene el centro de masa del cilindro en la base de la pendiente?

**Razonamiento.** Aquí, energía potencial gravitacional se convierte en energía cinética, tanto rotacional como traslacional. La energía (mecánica) se conserva, pues  $W_f$  es cero.

**Solución.**

**Dado:**  $h = 0.25$  m **Encuentre:**  $v_{CM}$  (rapidez del CM)  
 $I_{CM} = MR^2$  (de la figura 8.20d)

Puesto que la energía mecánica total del cilindro se conserva, se escribe

$$E_o = E$$

o bien, como  $v_o = 0$  en la cima de la pendiente, y suponiendo que  $U = 0$  en la base,

$$U_o = K$$

$$Mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

*inicialmente en reposo*                      *en la base de la pendiente*

Si usamos la condición para rodamiento,  $v_{CM} = R\omega$ , obtendremos

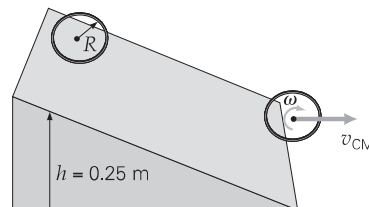
$$Mgh = \frac{1}{2} (MR^2) \left( \frac{v_{CM}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 = M v_{CM}^2$$

Despejamos  $v_{CM}$ ,

$$v_{CM} = \sqrt{gh} = \sqrt{(9.8 \text{ m/s}^2)(0.25 \text{ m})} = 1.6 \text{ m/s}$$

Aquí tampoco necesitamos mucha información numérica. Observe que el aro bajó rodando desde la misma altura hasta la que subió el cilindro del ejercicio de refuerzo del ejemplo 8.15, pero la rapidez del aro es menor que la del cilindro en la base de la rampa. ¿Por qué? Por la diferencia en los momentos de inercia.

**Ejercicio de refuerzo.** Suponga que el plano inclinado de este ejemplo no tiene fricción y el aro baja deslizándose en vez de rodar. ¿Cómo se compararía su rapidez en la base en este caso? ¿Por qué son distintas las rapidezces?



▲ **FIGURA 8.26** Movimiento rodante y energía. Cuando un objeto baja rodando por un plano inclinado, hay conversión de energía potencial en energía cinética traslacional y rotacional. Esto hace al rodamiento más lento que el deslizamiento sin fricción. Véase el ejemplo 8.16.



Exploración 11.3 Deslizamiento sobre un plano inclinado

### Carrera arreglada

Como muestra el ejemplo 8.16, para un objeto que se rueda hacia abajo sobre un plano inclinado, sin resbalar,  $v_{CM}$  es independiente de  $M$  y de  $R$ . Las masas y los radios se cancelan, de manera que todos los objetos de una forma específica (con la misma ecuación de momento de inercia) ruedan con la misma rapidez lineal, sean cuales fueren su tamaño y su densidad. Sin embargo, tal rapidez sí varía con el momento de inercia, que varía dependiendo de la forma. Por lo tanto, cuerpos rígidos de diferente forma ruedan con diferente rapidez. Por ejemplo, si soltamos un aro cilíndrico, un cilindro sólido y una esfera uniforme al mismo tiempo desde la cima de un plano inclinado, la esfera ganaría la carrera para llegar a la base, seguida del cilindro, con el aro llegando en último lugar, ¡siempre!

El lector puede ensayar este experimento con unas cuantas latas de alimentos y otros recipientes cilíndricos —uno lleno con algún material sólido (efectivamente, un cuerpo rígido) y otro vacío y con los extremos recortados— y una esfera sólida lisa. Recuerde que ni las masas ni los radios importan. Pensaríamos que un cilindro anular (un cilindro hueco cuyos radios externo e interno difieren considerablemente; figura 8.20f) sería el posible ganador de una carrera así, pero siempre pierde. La carrera rodando cuesta abajo está arreglada, aunque se varíen las masas y los radios.

Otro aspecto del rodamiento se trata en la sección A fondo 8.2: ¿Resbalar o rodar hasta parar?

## 8.5 Cantidad de movimiento angular

**OBJETIVOS:** a) Definir cantidad de movimiento angular y b) aplicar el principio de la conservación de la cantidad de movimiento angular a situaciones físicas.

Otra cantidad importante en el movimiento rotacional es la cantidad de movimiento angular. En la sección 6.1 vimos cómo una fuerza altera la cantidad de movimiento lineal de un objeto. De forma análoga, los cambios en la cantidad de movimiento angular están asociados al momento de fuerza. Como vimos, el momento de fuerza es el producto de un brazo de palanca y una fuerza. Asimismo, la **cantidad de movimiento angular** ( $L$ ) es el producto de un brazo de palanca y una cantidad de movimiento lineal. Para una partícula de masa  $m$ , la magnitud de la cantidad de movimiento lineal es  $p = mv$ , donde  $v = r\omega$ . La magnitud de la cantidad de movimiento angular es

$$L = r_{\perp}p = mr_{\perp}v = mr_{\perp}^2\omega \quad \text{cantidad de movimiento angular de una partícula} \quad (8.14)$$

Unidad SI de cantidad de movimiento angular: kilogramo-metro al cuadrado sobre segundo ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ ) donde  $v$  es la rapidez de la partícula,  $r_{\perp}$  es el brazo de palanca y  $\omega$  es la rapidez angular.

En un movimiento circular,  $r_{\perp} = r$ , porque  $\vec{v}$  es perpendicular a  $\vec{r}$ . En un sistema de partículas que constituyen un cuerpo rígido, todas las partículas describen círculos, y la magnitud total de la cantidad de movimiento angular es

$$L = (\sum m_i r_i^2)\omega = I\omega \quad \text{cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido} \quad (8.15)$$

que es, en el caso de rotación en torno a un eje fijo (en notación vectorial),

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (8.16)$$

Así pues,  $\vec{L}$  tiene la dirección del vector de velocidad angular ( $\vec{\omega}$ ). Esa dirección está dada por la regla de la mano derecha.

En movimiento rectilíneo, el cambio de la cantidad de movimiento lineal total de un sistema está relacionado con la fuerza externa por  $\vec{F}_{\text{neto}} = \Delta\vec{P}/\Delta t$ . La cantidad de movimiento angular está relacionada de manera análoga con el momento de fuerza neto (en magnitud):

$$\tau_{\text{neto}} = I\alpha = \frac{I\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\Delta(I\omega)}{\Delta t} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Es decir,

$$\tau_{\text{neto}} = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (8.17)$$

Así, el momento de fuerza neto es igual a la *tasa de cambio de la cantidad de movimiento angular con el tiempo*. En otras palabras, un momento de fuerza neto produce un cambio en la cantidad de movimiento angular.



Ilustración 10.3 Momento de inercia, energía rotacional y cantidad de movimiento angular



Exploración 11.4 Momento de inercia y cantidad de movimiento angular

**Nota:** repase la ecuación 6.3 de la sección 6.1.

## A FONDO

8.2 ¿RESBALAR O RODAR HASTA PARAR?  
FRENOS ANTIBLOQUEO

Durante una emergencia al conducir un vehículo, el instinto nos haría pisar a fondo el pedal del freno para intentar detener el vehículo rápidamente, es decir, en la distancia más corta. Sin embargo, con las ruedas bloqueadas, el coche derrapa, deslizándose hasta que se detiene, y muchas veces fuera de control. En tal caso, la fuerza de fricción deslizando actúa sobre las ruedas.

Para evitar el derrape, nos enseñan a bombear los frenos para detenernos rodando, no resbalando, sobre todo en un camino mojado o con hielo. Muchos automóviles modernos cuentan con un sistema computarizado de frenos que evita el bloqueo (ABS, *antilock braking system*) haciendo eso automáticamente. Cuando los frenos se aplican firmemente y el automóvil comienza a deslizarse, sensores en las ruedas detectan el deslizamiento y una computadora asume el control del sistema de frenado. Suelta momentáneamente los frenos y luego varía la presión del fluido de los frenos con una acción de bombeo (¡hasta 13 veces por segundo!), de manera que las ruedas sigan rodando sin derrapar.

Si no hay deslizamiento, actúan tanto la fricción rodante como la fricción estática. Sin embargo, en muchos casos la fuerza de fricción rodante es pequeña, y sólo hay que tomar en cuenta la fricción estática. El ABS trata de mantener la fricción estática cerca de su valor máximo,  $f_s \approx f_{s\text{máx}}$ , lo cual no es fácil hacer con el pedal.

¿El hecho de resbalar en vez de rodar afecta mucho la distancia de frenado de un automóvil? Calculamos la diferencia suponiendo que la fricción de rodamiento es insignificante. Aunque la fuerza externa de la fricción estática no efectúa trabajo al disipar energía para detener un vehículo (esto se hace internamente por fricción con las zapatas), sí determina si las ruedas se deslizan o ruedan.

En el ejemplo 2.8, la distancia de frenado de un vehículo estaba dada por

$$x = \frac{v_0^2}{2a}$$

Por la segunda ley de Newton, la fuerza neta en la dirección horizontal es  $F = f = \mu N = \mu mg = ma$ , y la desaceleración es  $a = \mu g$ . Por lo tanto,

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu g} \quad (1)$$

Sin embargo, como señalamos en el capítulo 4, el coeficiente de fricción deslizando (cinética) generalmente es menor que el de fricción estática; es decir,  $\mu_k < \mu_s$ . Podemos apreciar la diferencia general entre la detención rodante y la detención deslizando suponiendo la misma velocidad inicial  $v_0$  en ambos casos. Luego, utilizamos la ecuación 1 para formar un cociente:

$$\frac{x_{\text{rodante}}}{x_{\text{deslizando}}} = \frac{\mu_k}{\mu_s} \quad \text{o} \quad x_{\text{rodante}} = \left( \frac{\mu_k}{\mu_s} \right) x_{\text{deslizando}}$$

En la tabla 4.1 vemos que  $\mu_k = 0.60$  para caucho sobre concreto húmedo, y el valor de  $\mu_s$  para estas superficies es 0.80. Si usamos estos valores para comparar las distancias de frenado, obtenemos

$$x_{\text{rodante}} = \left( \frac{0.60}{0.80} \right) x_{\text{deslizando}} = (0.75) x_{\text{deslizando}}$$

Así, el automóvil se detiene rodando en el 75% de la distancia requerida para parar resbalando; por ejemplo, 15 m en vez de 20 m. Aunque esto podría variar dependiendo de las condiciones, podría ser una diferencia importante, incluso vital.

## Conservación de la cantidad de movimiento angular

La ecuación 8.17 se dedujo utilizando  $\tau_{\text{neto}} = I\alpha$ , que es válido para un sistema rígido de partículas o un cuerpo rígido con momento de inercia constante. No obstante, la ecuación 8.17 es una ecuación general que también es válida para un sistema no rígido de partículas. En un sistema así, podría haber un cambio en la distribución de masa y un cambio en el momento de inercia. Por ello, podría haber aceleración angular incluso en ausencia de un momento de fuerza neto. ¿Cómo es posible esto?

Si el momento de fuerza neto sobre un sistema es cero, entonces, por la ecuación 8.17,  $\vec{\tau}_{\text{neto}} = \Delta \vec{L} / \Delta t = 0$ , y

$$\Delta \vec{L} = \vec{L} - \vec{L}_0 = I \vec{\omega} - I_0 \vec{\omega}_0 = 0$$

o bien,

$$I\omega = I_0\omega_0 \quad (8.18)$$

Por lo tanto, la condición para la **conservación de la cantidad de movimiento angular** es:

En ausencia de un momento de fuerza externo, no equilibrado, se conserva (se mantiene constante) la cantidad de movimiento angular total (vectorial) de un sistema.

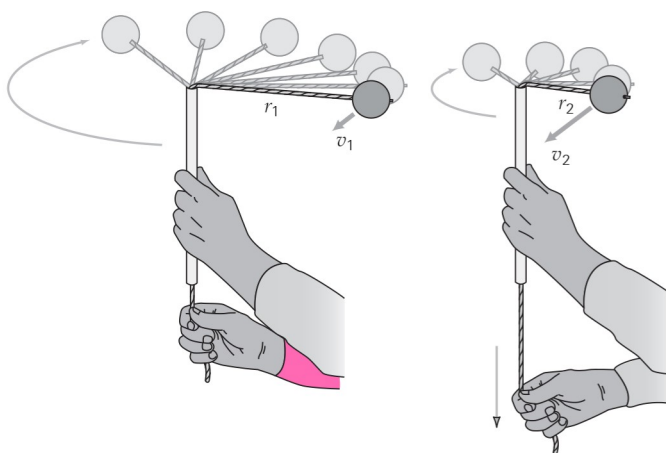
Conservación de la cantidad de movimiento angular

Al igual que con la cantidad de movimiento lineal total, se cancelan los momentos de fuerza internos que surgen de fuerzas internas.

En un cuerpo rígido con momento de inercia constante (es decir,  $I = I_0$ ), la rapidez angular se mantiene constante ( $\omega = \omega_0$ ) en ausencia de un momento de fuerza neto. No obstante, en algunos sistemas podría cambiar el momento de inercia, lo cual ocasionaría un cambio en la rapidez angular, como ilustra el siguiente ejemplo.

**Nota:** la cantidad de movimiento angular se conserva cuando el momento de fuerza neto es cero. ( $\vec{L}$  es fija.) Ésta es la tercera ley de conservación en mecánica.

► **FIGURA 8.27** Conservación de la cantidad de movimiento angular. Cuando se tira de la cuerda hacia abajo a través del tubo, acelera la pelota que da vueltas. Véase el ejemplo 8.17.



### Ejemplo 8.17 ■ Tirón hacia abajo: conservación de la cantidad de movimiento angular

Una pelota pequeña, sujeta a una cuerda que pasa por un tubo, se mueve en un círculo como se ilustra en la [figura 8.27](#). Cuando se tira de la cuerda hacia abajo a través del tubo, aumenta la rapidez angular de la pelota. *a)* ¿Ese aumento en la rapidez angular se debe a un momento de fuerza causado por la fuerza de tracción? *b)* Si la pelota gira inicialmente con rapidez de 2.8 m/s en un círculo de 0.30 m de radio, ¿qué rapidez tangencial tendrá si el radio se reduce a 0.15 m tirando de la cuerda? (Desprecie la masa de la cuerda.)

**Razonamiento.** *a)* Se aplica una fuerza a la pelota a través de la cuerda; pero hay que considerar el eje de rotación. *b)* En ausencia de un momento de fuerza neto, se conserva la cantidad de movimiento angular (ecuación 8.18) y la rapidez tangencial está relacionada con la rapidez angular por  $v = r\omega$ .

**Solución.**

**Dado:**  $r_1 = 0.30 \text{ m}$   
 $r_2 = 0.15 \text{ m}$   
 $v_1 = 2.8 \text{ m/s}$

**Encuentre:** *a)* Causa del incremento en la rapidez angular  
*b)*  $v_2$  (rapidez tangencial final)

*a)* El cambio de velocidad angular, o aceleración angular, no se debe a un momento de fuerza producido por la fuerza de tracción. La fuerza sobre la pelota, transmitida por la cuerda (tensión) actúa pasando por el eje de rotación, así que su momento es cero. Puesto que la porción de la cuerda que gira se acorta, disminuye el momento de inercia de la pelota ( $I = mr^2$ , por la figura 8.20a). Como en ausencia de un momento de fuerza externo, se conserva la cantidad de movimiento angular ( $L$ ) de la pelota; y si se reduce  $I$  se debe incrementar  $\omega$ .

*b)* Puesto que se conserva la cantidad de movimiento angular, igualamos las magnitudes de las cantidades de movimiento angulares:

$$I_0\omega_0 = I\omega$$

Luego, utilizando  $I = mr^2$  y  $\omega = v/r$ , obtenemos

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

y

$$v_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)v_1 = \left(\frac{0.30 \text{ m}}{0.15 \text{ m}}\right)2.8 \text{ m/s} = 5.6 \text{ m/s}$$

Cuando se acorta la distancia radial, la pelota se acelera.


**Ejercicio de refuerzo.** Examinemos la situación de este ejemplo en términos de trabajo y energía. Si la rapidez inicial es la misma y la fuerza de tracción vertical es 7.8 N, ¿qué rapidez final tendrá la pelota de 0.10 kg?

El ejemplo 8.17 debería ayudarnos a entender la ley de Kepler de áreas iguales (capítulo 7) desde otro punto de vista. La cantidad de movimiento angular de un planeta se conserva aproximadamente, ignorando el débil momento de fuerza gravitacional de otros planetas. (La fuerza gravitacional del Sol sobre un planeta produce poco o ningún momento de fuerza sobre él. ¿Por qué?) Por lo tanto, cuando un planeta está



más cerca del Sol en su órbita elíptica, tiene un menor brazo de palanca y su rapidez es mayor, por la conservación de la cantidad de movimiento angular. [Éste es el fundamento de la segunda ley de Kepler (ley de áreas), sección 7.6.] Asimismo, cuando la altura de un satélite en órbita varía durante el curso de una órbita elíptica en torno a un planeta, el satélite se acelera o se frena por el mismo principio.

### Cantidad de movimiento angular en la vida real

En la  figura 8.28a se muestra una demostración muy utilizada de la conservación de la cantidad de movimiento angular. Un individuo sentado en un banco giratorio sostiene pesas con los brazos extendidos y se le pone a girar lentamente. Alguien más debe proporcionar un momento de fuerza exterior que inicie esta rotación, porque el individuo en el banco no puede iniciar el movimiento por sí mismo. (¿Por qué no?) Una vez que está girando, si acerca sus brazos al cuerpo, aumenta la rapidez angular y gira con mucho mayor rapidez. Si vuelve a extender los brazos, nuevamente desacelerará. ¿Puede el lector explicar este fenómeno?

Si  $L$  es constante, ¿qué sucede con  $\omega$  cuando  $I$  se reduce disminuyendo  $r$ ? La rapidez angular debe aumentar para compensar la reducción de  $I$  y mantener  $L$  constante. Los patinadores en hielo giran con gran velocidad acercando sus brazos al eje de su cuerpo para reducir su momento de inercia (figura 8.28b). De forma similar, un clavadista gira durante un clavado alto acercando el tronco del cuerpo a sus extremidades, con lo que reduce considerablemente su momento de inercia. Las enormes rapideces del viento en los tornados y huracanes representan otro ejemplo del mismo efecto (figura 8.28c).

La cantidad de movimiento angular también es importante en los saltos de patinaje artístico, en los cuales el patinador gira en el aire, como en un triple axel o un triple lutz. Un momento de fuerza que se aplica al saltar imparte al patinador cantidad de movimiento angular, y los brazos y piernas se acercan al eje del cuerpo para reducir el momento de inercia y aumentar la rapidez angular, para así efectuar varios giros durante el salto. Para aterrizar con menor rapidez angular, el patinador extiende los brazos y la pierna que no tocará el hielo. Quizás el lector se haya fijado en que casi todos estos aterrizajes siguen una trayectoria curva, la cual permite al patinador recuperar el control.



Exploración 11.5 Conservación de la cantidad de movimiento angular



a)



◀ **FIGURA 8.28** Cambio en el momento de inercia

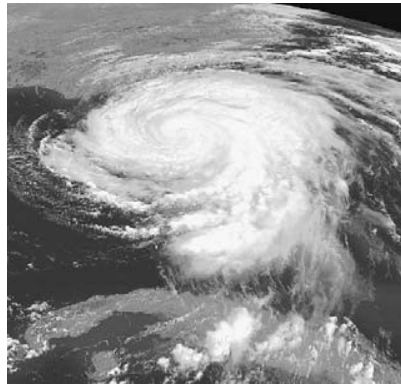
a) Girando lentamente con masas en los brazos extendidos, el momento de inercia de este individuo es relativamente grande. (Las masas están lejos del eje de rotación.) El hombre está aislado: no actúan sobre él momentos de fuerza externos (si despreciamos la fricción), así que se conserva su cantidad de movimiento angular,  $L = I\omega$ . Cuando junta los brazos al cuerpo, disminuye su momento de inercia. (¿Por qué?) En consecuencia,  $\omega$  debe aumentar, y el giro se hace vertiginoso. b) Los patinadores en hielo modifican su momento de inercia para incrementar  $\omega$  al girar. c) El mismo principio ayuda a explicar la violencia de los vientos que giran en torno al centro de un huracán. Al precipitarse aire hacia el centro de la tormenta, donde la presión es baja, su velocidad de rotación debe aumentar para que se conserve la cantidad de movimiento angular.



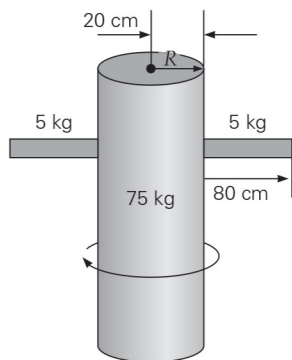
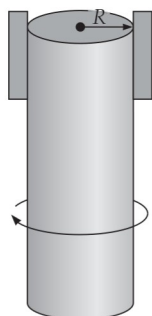
b)



c)





a) Brazos extendidos  
(no está a escala)b) Brazos sobre  
la cabeza

▲ FIGURA 8.29 Modelo de un patinador. Cambios en el momento de inercia y en el giro. Véase el ejemplo 8.18.

### Ejemplo 8.18 ■ Un patinador como modelo

Por lo general, las situaciones de la vida real son complejas, pero algunas se pueden analizar usando modelos simples. En la figura 8.29 se ilustra un modelo para analizar el giro de un patinador, empleando un cilindro y dos varillas para representarlo. En el inciso a el patinador inicia el giro con los “brazos” extendidos; mientras que en el inciso b los “brazos” están sobre la cabeza para lograr un giro más rápido por la conservación de la cantidad de movimiento angular. Si la rapidez de giro inicial es 1 revolución por 1.5 s, ¿cuál será la rapidez angular cuando los brazos están pegados al cuerpo?

**Razonamiento.** El cuerpo y los brazos de un patinador se representan con un cilindro y unas varillas, de manera que conozcamos los momentos de inercia (figura 8.20). Hay que dar atención especial al hecho de encontrar el momento de inercia de los brazos alrededor del eje de rotación (a través del cilindro). Esto puede hacerse aplicando el teorema del eje paralelo (ecuación 8.8).

Si se conserva la cantidad de movimiento angular,  $L = L_o$  o  $I\omega = I_o\omega_o$ , conociendo la rapidez angular inicial y dadas las cantidades para evaluar los momentos de inercia (figura 8.29), es posible determinar la rapidez angular final.

**Solución.** Se listan los datos (véase la figura 8.29):

**Dado:**  $\omega_o = (1 \text{ rev}/1.5 \text{ s})(2\pi \text{ rad/rev}) = 4.2 \text{ rad/s}$  **Encuentre:**  $\omega$  (rapidez angular final)

$M_c = 75 \text{ kg}$  (el cilindro o el cuerpo)

$M_r = 5.0 \text{ kg}$  (una varilla o un brazo)

$R = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}$

$L = 80 \text{ cm} = 0.80 \text{ m}$

Momento de inercia (a partir de la figura 8.20).

cilindro:  $I_c = \frac{1}{2}M_cR^2$  varilla:  $I_r = \frac{1}{12}M_rL^2$

Primero calculemos los momentos de inercia del sistema utilizando el teorema del eje paralelo,  $I = I_{cm} + Md^2$  (ecuación 8.8).

Antes: El  $I_c$  del cilindro es una recta hacia delante (figura 8.20e):

$$I_c = \frac{1}{2}M_cR^2 = \frac{1}{2}(75 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Refiriendo el momento de inercia de una varilla horizontal (figura 8.29a) al eje de rotación del cilindro mediante el teorema del eje paralelo:

$$\begin{aligned} I_r &= I_{cm(\text{varilla})} + Md^2 \\ &= \frac{1}{12}M_rL^2 + M_r(R + L/2)^2 \text{ donde el eje paralelo a través del CM de la varilla es una distancia de } R + L/2 \text{ a partir del eje de rotación.} \\ &= \frac{1}{12}(5.0 \text{ kg})(0.80 \text{ m})^2 + (5.0 \text{ kg})(0.20 \text{ m} + 0.40 \text{ m})^2 = 2.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

$$\text{Además, } I_o = I_c + 2I_r = 1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(2.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2) = 5.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**Después:** En la figura 8.29b, al tratar la masa de un brazo como si su centro de masa ahora estuviera a sólo unos 20 cm del eje de rotación, el momento de inercia de cada brazo es  $I = M_rR^2$  (figura 8.20b), e

$$I = I_c + 2(M_rR^2) = 1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 2(5.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(0.20 \text{ m})^2 = 1.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Entonces, con la conservación de la cantidad de movimiento angular,  $L = L_o$  o  $I\omega = I_o\omega_o$  y

$$\omega = \left(\frac{I_o}{I}\right)\omega_o = \left(\frac{5.7 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{1.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}\right)(4.2 \text{ rad/s}) = 13 \text{ rad/s}$$

De manera que la rapidez angular se incrementa por un factor de 3.

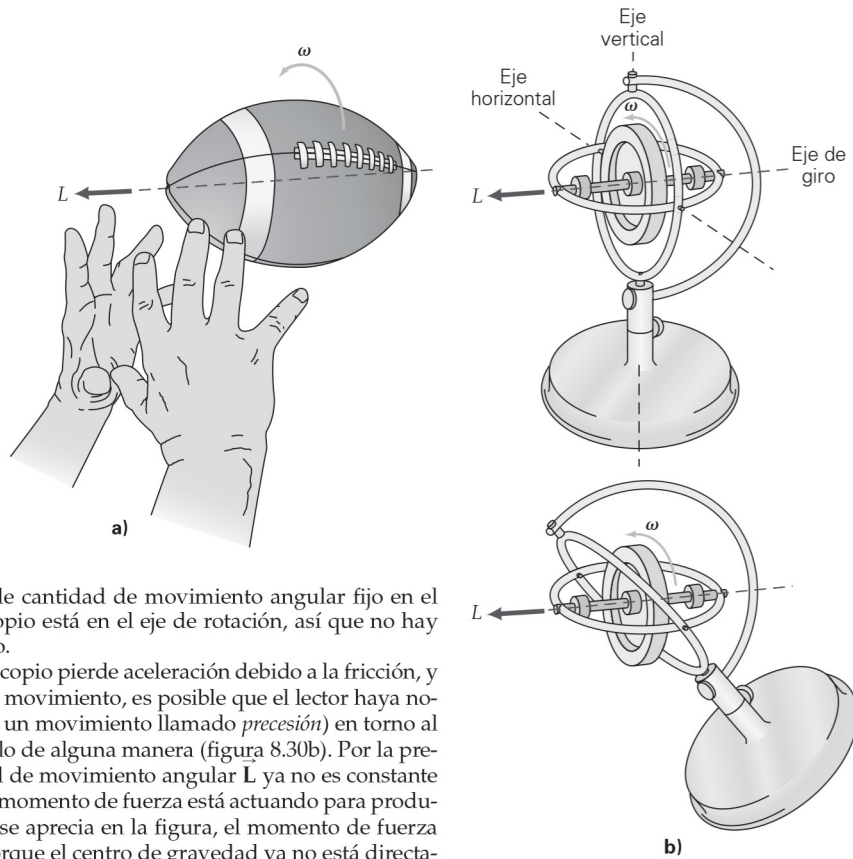
**Ejercicio de refuerzo.** Suponga que un patinador con el 75% de la masa del patinador del ejercicio realiza un giro. ¿Cuál sería la rapidez de giro  $\omega$  en este caso? (Considere que todas las masas se reducen al 75%.)

La cantidad de movimiento angular,  $\vec{L}$ , es un vector, y cuando se conserva o es constante, no deben cambiar su magnitud ni su dirección. Así, cuando no actúan momentos de fuerza externos, la dirección de  $\vec{L}$  es fija en el espacio. Éste es el principio en que se basa la precisión de los pases en fútbol americano, así como el movimiento de una brújula giroscópica (figura 8.30). En fútbol americano, el balón generalmente se lanza con una espiral. Este giro, o acción giroscópica, estabiliza el eje de rotación del balón en la dirección del movimiento. Asimismo, el acanalado del cañón de un rifle imparte un giro a las balas, con la finalidad de aumentar su estabilidad direccional.

En la brújula, el vector  $\vec{L}$  de un giroscopio en rotación se ajusta a una dirección dada (generalmente el norte). En ausencia de momentos de fuerza externos, no cambia la dirección de la brújula, aunque su portador (un avión o barco, por ejemplo) cambie de dirección. Quizás el lector haya jugado con un giroscopio de juguete que se pone a girar y se coloca sobre un pedestal. Cuando está “dormido”, el giroscopio se mantiene equi-

► **FIGURA 8.30** Dirección constante de la cantidad de movimiento angular

Cuando se conserva la cantidad de movimiento angular, su dirección permanece constante en el espacio. *a)* Este principio se observa al lanzar un balón. *b)* También hay acción giroscópica en un giroscopio: una rueda giratoria montada universalmente en anillos de modo que pueda girar libremente en torno a cualquier eje. Cuando la montura se mueve, la rueda mantiene su dirección. Éste es el principio de la brújula giroscópica.

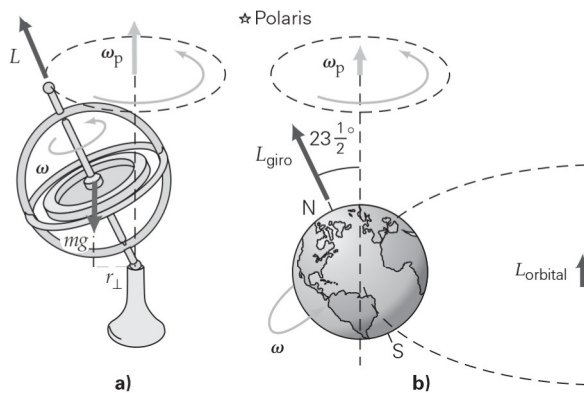


do durante algún tiempo, con su vector de cantidad de movimiento angular fijo en el espacio. El centro de gravedad del giroscopio está en el eje de rotación, así que no hay un momento de fuerza neto debido al peso.

Sin embargo, a final de cuentas el giroscopio pierde aceleración debido a la fricción, y esto hace que  $\mathbf{L}$  se incline. Al observar este movimiento, es posible que el lector haya notado cómo el eje de rotación da vueltas (en un movimiento llamado *precesión*) en torno al eje vertical. Da vueltas inclinado, por decirlo de alguna manera (figura 8.30b). Por la precesión del giroscopio, el vector de cantidad de movimiento angular  $\mathbf{L}$  ya no es constante en cuanto a dirección, lo que indica que un momento de fuerza está actuando para producir un cambio ( $\Delta\mathbf{L}$ ) con el tiempo. Como se aprecia en la figura, el momento de fuerza surge del componente vertical del peso, porque el centro de gravedad ya no está directamente arriba del punto de apoyo o en el eje vertical de rotación. El momento de fuerza instantáneo es tal que el eje del giroscopio se mueve, o “precesa”, en torno al eje vertical.

De forma similar, el eje de rotación de la Tierra experimenta precesión. Dicho eje tiene una inclinación de  $23.5^\circ$  con respecto a una línea perpendicular al plano de su órbita en torno al Sol; el eje “precesa” en torno a esta línea (► figura 8.31). La precesión se debe a pequeños momentos de fuerza gravitacionales que el Sol y la Luna ejercen sobre la Tierra.

El periodo de precesión del eje terrestre es de aproximadamente 26 000 años, así que la precesión no tiene un efecto cotidiano muy perceptible. No obstante, sí tiene un interesante efecto a largo plazo. Polaris no siempre será (ni siempre ha sido) la Estrella Polar, es decir, la estrella hacia la que apunta el eje de rotación de la Tierra. Hace unos 5000 años, Alfa Draconis era la Estrella Polar, y dentro de 5000 años lo será Alfa Cefeida, que está a una distancia angular de unos  $68^\circ$  de Polaris en el círculo descrito por la precesión del eje terrestre.



◀ **FIGURA 8.31** Precisión

Un momento de fuerza externo origina un cambio de cantidad de movimiento angular. *a)* En un giroscopio, el cambio es direccional, y el eje de rotación experimenta precesión con una aceleración angular  $\omega_p$  en torno a una línea vertical. (El momento de fuerza debido al peso apuntaría hacia afuera de la página en este dibujo, lo mismo que  $\Delta\mathbf{L}$ .) Aunque hay un momento de fuerza que haría que el giroscopio estático se desplomara, un giroscopio en rotación no se cae. *b)* Asimismo, el eje de la Tierra tiene precesión debido a momentos de fuerza gravitacionales producidos por el Sol y la Luna. No notamos este movimiento porque su periodo de precesión es de unos 26 000 años.

Hay otros efectos de momento de fuerza que actúan a largo plazo sobre la Tierra y la Luna. ¿Sabía usted que la rapidez de rotación diaria de la Tierra está disminuyendo, por lo cual los días son cada vez más largos? ¿Sabía que la Luna se está alejando de la Tierra? Esto se debe primordialmente a la fricción de las mareas oceánicas, que produce un momento de fuerza. El resultado es que la cantidad de movimiento angular de giro de la Tierra y, por ende, su rapidez de rotación, está cambiando. Esta desaceleración de la rotación hará que este siglo sea unos 25 segundos más largo que el anterior.

Dicha desaceleración, sin embargo, es un valor promedio. Ocasionalmente, la rotación de la Tierra se acelera durante periodos relativamente corto. Se cree que ello tiene que ver con la inercia rotacional de la capa líquida del núcleo terrestre. (Véase la sección A fondo 13.1 de la página 450.)

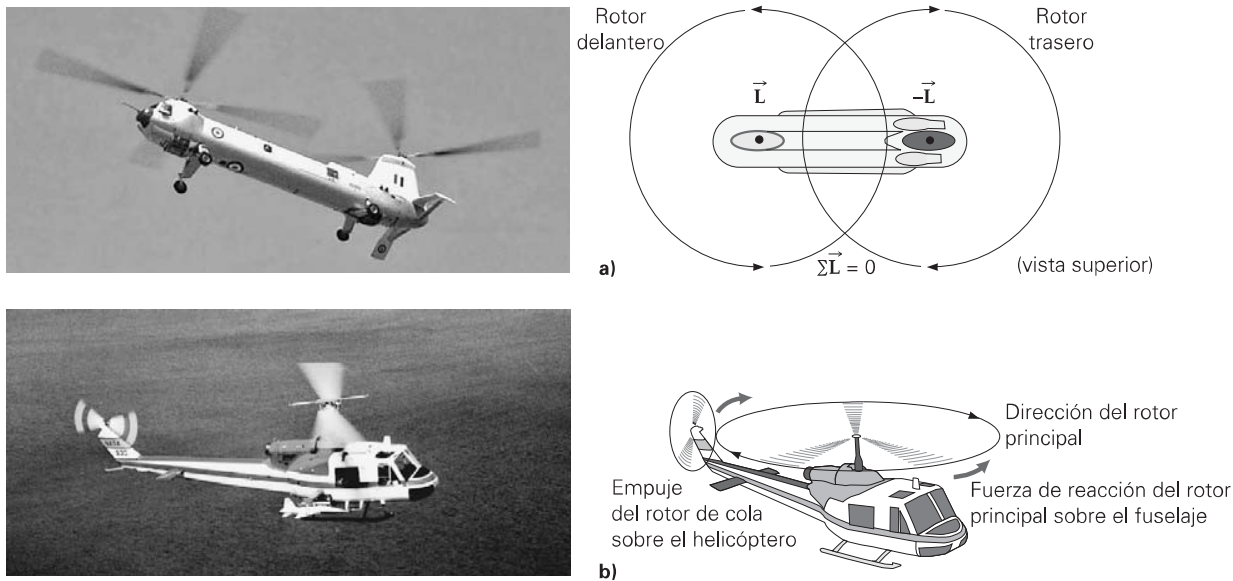
El momento de fuerza de las mareas se debe principalmente a la atracción gravitacional de la Luna, que es la causa fundamental de las mareas oceánicas. Este momento de fuerza es *interno* respecto al sistema Tierra-Luna, y se conserva la cantidad de movimiento angular total de ese sistema. Como la Tierra está perdiendo cantidad de movimiento angular, la Luna debe estar ganando cantidad de movimiento angular para que el total del sistema se mantenga constante. La Tierra pierde cantidad de movimiento angular de rotación; en tanto que la Luna gana cantidad de movimiento angular orbital. Por ello, la Luna se aleja poco a poco de la Tierra y disminuye su rapidez orbital. Tal alejamiento es de aproximadamente 4 cm por año. Por lo tanto, la Luna describe una espiral que se ensancha lentamente.

Por último, un ejemplo común donde la cantidad de movimiento angular es una consideración importante es el helicóptero. ¿Qué sucedería si un helicóptero sólo tuviera un rotor? Puesto que el motor que genera el momento de fuerza es interno, la cantidad de movimiento angular se conserva. Inicialmente,  $L = 0$ ; por lo tanto, para conservar la cantidad de movimiento angular total del sistema (rotor más fuselaje), las cantidades de movimiento angulares individuales del rotor y el fuselaje deberían tener direcciones opuestas para cancelarse. Al despegar, el rotor giraría en un sentido y el fuselaje del helicóptero giraría en el otro, lo cual es algo nada deseable.

Para que no se presente esta situación, los helicópteros tienen dos rotores. Los helicópteros grandes tienen dos rotores traslapantes (▼ figura 8.32a). Las cantidades de movimiento angulares de los rotores, que giran en direcciones opuestas, se cancelan, así que el fuselaje no tiene que girar para cancelar la cantidad de movimiento angular. Los rotores están a diferente altura para que sus aspas no choquen.

Los helicópteros pequeños con un solo rotor en la parte superior tienen un pequeño rotor en la cola para producir un momento de fuerza opuesto (figura 8.32b). Este rotor genera un empuje como el de una hélice y el momento de fuerza correspondiente compensa el momento de fuerza producido por el rotor principal. Además, el rotor de cola también ayuda a guiar la nave y, al aumentar o reducir su empuje, hace que el helicóptero gire en un sentido o en el otro.

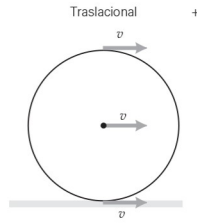
▼ FIGURA 8.32 Diferentes rotores  
Véase la descripción en el texto.



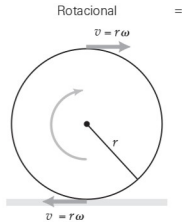


## Repaso del capítulo

- En el **movimiento traslacional puro**, todas las partículas de un cuerpo rígido tienen la misma velocidad instantánea.



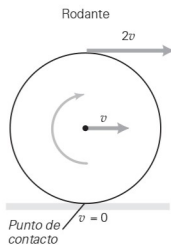
- En el **movimiento rotacional puro (en torno a un eje fijo)**, todas las partículas de un cuerpo rígido tienen la misma velocidad angular instantánea.



Condición para rodar sin resbalar:

$$v_{CM} = r\omega \quad (8.1)$$

(o  $s = r\theta$  o  $a_{CM} = r\alpha$ )

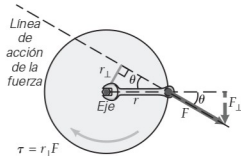


- El **momento de fuerza** ( $\vec{\tau}$ ), que es el análogo rotacional de la fuerza, es el producto de una fuerza y un brazo de palanca.

**Momento de fuerza (magnitud):**

$$\tau = r_{\perp} F = rF \sin \theta \quad (8.2)$$

(La dirección está dada por la regla de la mano derecha)

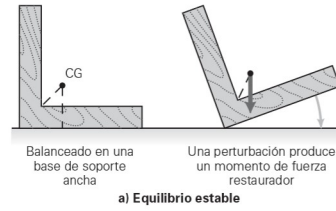


- El **equilibrio mecánico** requiere que la fuerza neta, o la sumatoria de las fuerzas, sea cero (equilibrio traslacional); y que el momento de fuerza neta, o sumatoria de los momentos de fuerza, sea cero (equilibrio rotacional).

**Condiciones para equilibrio mecánico traslacional y rotacional, respectivamente:**

$$\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\tau}_{neta} = \sum \vec{\tau}_i = 0 \quad (8.3)$$

- Un objeto está en **equilibrio estable** si su centro de gravedad, después de un pequeño desplazamiento, queda arriba y dentro de la base de soporte original del objeto.



a) Equilibrio estable

- El **momento de inercia** ( $I$ ) es el análogo rotacional de la masa y está dado por

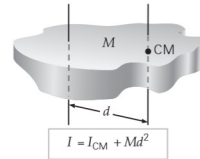
$$I = \sum m_i r_i^2 \quad (8.6)$$

**Forma rotacional de la segunda ley de Newton:**

$$\vec{\tau}_{neta} = I\vec{\alpha} \quad (8.7)$$

**Teorema de ejes paralelos:**

$$I = I_{CM} + Md^2 \quad (8.8)$$



**Trabajo rotacional:**

$$W = \tau\theta \quad (8.9)$$

**Potencia rotacional:**

$$P = \tau\omega \quad (8.10)$$

**Teorema trabajo-energía (rotacional):**

$$W_{neta} = \frac{1}{2}I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \Delta K \quad (8.11)$$

**Energía cinética rotacional:**

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (8.12)$$

**Energía cinética de un objeto rodante (sin deslizamiento):**

$$K = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 \quad (8.13)$$

- La **cantidad de movimiento angular**: el producto de un brazo de palanca y una cantidad de movimiento lineal, o de un momento de inercia y una velocidad angular.

**Cantidad de movimiento angular de una partícula en movimiento circular magnitud:**

$$L = r_{\perp} p = mr_{\perp} v = mr_{\perp}^2 \omega \quad (8.14)$$

**Cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido:**

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \quad (8.16)$$

**Momento de fuerza como cambio de cantidad de movimiento angular (forma de magnitud):**

$$\vec{\tau}_{neta} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t} \quad (8.17)$$

**Conservación de la cantidad de movimiento angular (con  $\vec{\tau}_{neta} = 0$ ):**

$$L = L_0 \quad \text{o} \quad I\omega = I_0\omega_0 \quad (8.18)$$

La cantidad de movimiento angular se conserva en la ausencia de un momento de fuerza externo y no equilibrado.

## Ejercicios

Los ejercicios designados **OM** son preguntas de opción múltiple; los **PC** son preguntas conceptuales; y los **EI** son ejercicios integrados. A lo largo del texto, muchas secciones de ejercicios incluirán ejercicios “apareados”. Estos pares de ejercicios, que se identifican con números subrayados, pretenden ayudar al lector a resolver problemas y aprender. El primer ejercicio de cada pareja (el de número par) se resuelve en la Guía de estudio, que puede consultarse si se necesita ayuda para resolverlo. El segundo ejercicio (de número impar) es similar, y su respuesta se da al final del libro.

### 8.1 Cuerpos rígidos, traslaciones y rotaciones

- OM** En el movimiento rotacional puro de un cuerpo rígido, *a*) todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad angular, *b*) todas las partículas del cuerpo tienen la misma velocidad tangencial, *c*) la aceleración siempre es cero o *d*) siempre hay dos ejes de rotación simultáneos.
- OM** Para un objeto sólo con movimiento de rotación, todas sus partículas tienen la misma *a*) velocidad instantánea, *b*) velocidad promedio, *c*) distancia a partir del eje de rotación, *d*) velocidad angular instantánea.
- OM** La condición para rodar sin resbalar es *a*)  $a_c = r\omega^2$ , *b*)  $v_{CM} = r\omega$ , *c*)  $F = ma$  o *d*)  $a_c = v^2/r$ .
- OM** Un objeto rodante *a*) tiene un eje de rotación a través del eje de simetría, *b*) tiene una velocidad cero en el punto o línea de contacto, *c*) se deslizará si  $s = r\theta$ , *d*) todas las opciones anteriores son verdaderas.
- OM** Para los neumáticos de un automóvil que se derrapa, *a*)  $v_{CM} = r\omega$ , *b*)  $v_{CM} > r\omega$ , *c*)  $v_{CM} < r\omega$ , *d*) ninguna de las anteriores.
- PC** Suponga que un compañero de su clase de física dice que un cuerpo rígido puede tener movimiento traslacional y rotacional al mismo tiempo. ¿Estaría de acuerdo? Si lo está, dé un ejemplo.
- PC** ¿Qué sucedería si la rapidez tangencial  $v$  de un cilindro rodante fuera menor que  $r\omega$ ? ¿ $v$  puede ser mayor que  $r\omega$ ? Explique.
- PC** Si la parte más alta de un neumático se mueve con rapidez  $v$ , ¿qué marcará el velocímetro del automóvil?
- Una rueda va rodando uniformemente en un plano, sin resbalar. Un poco de fango sale despedido de la rueda en la posición correspondiente las 9:00 en un reloj (parte trasera de la rueda). Describa el movimiento subsecuente del fango.
- Una cuerda pasa sobre una polea circular de 6.5 cm de radio. Si la polea da cuatro vueltas sin que la cuerda resbale, ¿qué longitud de cuerda pasará por la polea?
- Una rueda da cinco vueltas sobre una superficie horizontal sin resbalar. Si el centro de la rueda avanza 3.2 m, ¿qué radio tendrá la rueda?
- Una bola de bolos con un radio de 15.0 cm se desplaza por la pista de manera que su centro de masa se mueve a 3.60 m/s. El jugador estima que realiza 7.50 revoluciones completas en 2.00 segundos. ¿Está rodando sin deslizarse? Pruebe su respuesta suponiendo que la observación rápida del jugador limita las respuestas a dos cifras significativas.

- Una esfera con 15 cm de radio rueda sobre una superficie horizontal y la rapidez traslacional del centro de masa es 0.25 m/s. Calcule la rapidez angular en torno al centro de masa si la esfera rueda sin resbalar.
- EI** ●● *a*) Cuando un disco rueda sin resbalar, ¿el producto  $r\omega$  debería ser 1) mayor que, 2) igual a o 3) menor que  $v_{CM}$ ? *b*) Un disco de 0.15 m de radio gira  $270^\circ$  mientras avanza 0.71 m. ¿El disco rueda sin resbalar? Justifique su respuesta.
- Una pelota de bocce (o bochas, un deporte popular en Italia) con un diámetro de 6.00 cm rueda sin deslizarse sobre un césped horizontal. Tiene una rapidez angular inicial de 2.35 rad/s y llega al reposo después de 2.50 m. Suponiendo que la deceleración es constante, *a*) determine la magnitud de su deceleración angular y *b*) la magnitud de la aceleración tangencial máxima de la superficie de la pelota (indique dónde se localiza esa parte).
- Un cilindro de 20 cm de diámetro rueda con rapidez angular de 0.50 rad/s sobre una superficie horizontal. Si el cilindro experimenta una aceleración tangencial uniforme de  $0.018 \text{ m/s}^2$  sin resbalar hasta que su rapidez angular sea de 1.25 rad/s, ¿cuántas revoluciones completas habrá efectuado el cilindro durante su aceleración?

### 8.2 Momento de fuerza, equilibrio y estabilidad

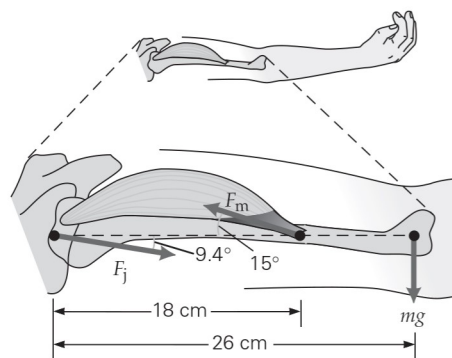
- OM** Es posible tener un momento de fuerza neto cuando *a*) todas las fuerzas actúan a través del eje de rotación, *b*)  $\sum \vec{F}_i = 0$ , *c*) un objeto está en equilibrio rotacional o *d*) un objeto permanece en equilibrio inestable.
- OM** Si un objeto en equilibrio inestable se desplaza un poco, *a*) su energía potencial disminuirá, *b*) el centro de gravedad estará directamente arriba del eje de rotación, *c*) no se efectuará trabajo gravitacional o *d*) entrará en equilibrio estable.
- OM** Un momento de fuerza tiene las mismas unidades que *a*) el trabajo, *b*) la fuerza, *c*) la velocidad angular o *d*) la aceleración angular.
- PC** Si levantamos objetos usando la espalda en vez de las piernas, es común que nos duela la espalda. ¿Por qué?
- PC** Una gimnasta sobre la barra de equilibrio se agacha cuando siente que está perdiendo el equilibrio. ¿Por qué?
- PC** Explique los actos de equilibrismo de la ►figura 8.33. ¿Dónde está el centro de gravedad?





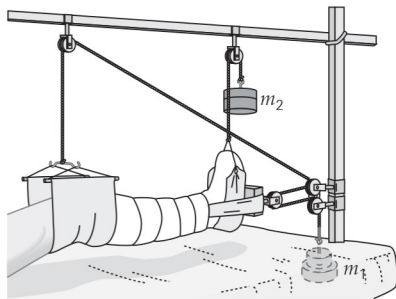
▲ **FIGURA 8.33** Actos de equilibrio. Véase el ejercicio 22. *Izquierda:* un mondadientes (palillo) en el borde de un vaso sostiene un tenedor y una cuchara. *Derecha:* una ave de juguete se equilibra en su pico.

23. **PC** “Reventar la rueda” es una acrobacia de motocicleta, en la cual el extremo frontal de la moto se eleva del piso en una salida rápida, y permanece en el aire durante cierta distancia. Explique la física implicada en esta acrobacia.
24. **PC** En los casos tanto del equilibrio estable como del inestable, un pequeño desplazamiento del centro de gravedad implica tener que realizar trabajo gravitacional. (Véase las pelotas y los recipientes cóncavos en la figura 8.11.) Sin embargo, hay otro tipo de equilibrio donde el desplazamiento del centro de masa no implica trabajo gravitacional. Se le conoce como *equilibrio neutro*, en el que, en esencia, el centro de gravedad desplazado se mueve en línea recta. Dé un ejemplo de un objeto en equilibrio neutro.
25. ● En la figura 8.4a, si el brazo forma un ángulo de  $37^\circ$  con la horizontal y se requiere un momento de fuerza de  $18 \text{ m} \cdot \text{N}$ , ¿qué fuerza debe generar el bíceps?
26. ● El tapón de vaciado del aceite en el motor de un automóvil se apretó con un momento de fuerza de  $25 \text{ m} \cdot \text{N}$ . Si se emplea una llave inglesa para cambiar el aceite, ¿cuál será la fuerza mínima necesaria para aflojar el tapón?
27. ● En el ejercicio 26, a causa del limitado espacio para trabajar, usted debe arrastrarse debajo del automóvil. Por lo tanto, no es posible aplicar la fuerza de forma perpendicular con respecto a la longitud de la llave inglesa. Si la fuerza aplicada forma un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al mango de la llave inglesa, ¿cuál será la fuerza que se requiere para aflojar el tapón de vaciado del aceite?
28. ● ¿Cuántas posiciones de equilibrio estable e inestable distintas tiene un cubo? Considere cada superficie, arista y esquina como una posición diferente.
29. **El** ● Dos niños están en extremos opuestos de un subibaja uniforme de masa insignificante. a) ¿Puede equilibrarse el balancín si los niños tienen diferente masa? ¿Cómo? b) Si un niño de  $35 \text{ kg}$  está a  $2.0 \text{ m}$  del punto pivote (o fulcro), ¿a qué distancia de ese punto, al otro lado, tendrá que sentarse su amiga de  $30 \text{ kg}$  para equilibrar el subibaja?
30. ● Una regla uniforme de un metro que pivotea sobre su punto medio, como en el ejemplo 8.5, tiene una masa de  $100 \text{ g}$  colgada de la posición de  $25.0 \text{ cm}$ . a) ¿En qué posición debería colgarse una masa de  $75.0 \text{ g}$  para que el sistema esté en equilibrio? b) ¿Qué masa tendría que colgarse de la posición de  $90.0 \text{ cm}$  para que el sistema esté en equilibrio?
31. ●● Demuestre que la regla de un metro equilibrada del ejemplo 8.5 está en equilibrio rotacional estático en torno a un eje horizontal que pasa por la marca de  $100 \text{ cm}$  de la escala.
32. **El** ●● Se permite que las líneas telefónicas y eléctricas cuelguen entre postes, para que la tensión no sea excesiva cuando algo golpee un cable o se pose en él. a) ¿Las líneas podrían ser perfectamente horizontales? ¿Por qué? b) Suponga que un cable se estira hasta quedar casi perfectamente horizontal entre dos postes separados  $30 \text{ m}$ . Si un pájaro de  $0.25 \text{ kg}$  se posa en el punto medio del cable y éste baja  $1.0 \text{ cm}$ , ¿qué tensión hay en el cable?
33. ●● En la figura 8.34, ¿qué fuerza  $F_m$  genera el músculo deltoides para sostener el brazo extendido, si la masa del brazo es de  $3.0 \text{ kg}$ ? ( $F_j$  es la fuerza de la articulación sobre el hueso del brazo, el húmero.)



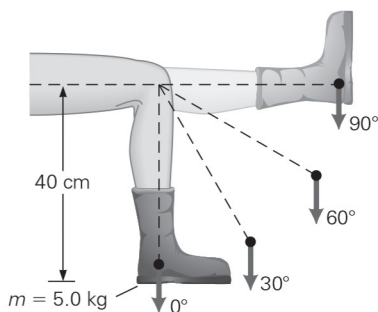
▲ **FIGURA 8.34** Brazo en equilibrio estático. Véase el ejercicio 33.

34. ●● En la figura 8.4b, determine la fuerza que ejerce el bíceps, suponiendo que la mano está sosteniendo una pelota con una masa de  $5.00 \text{ kg}$ . Suponga que la masa del antebrazo es de  $8.50 \text{ kg}$  con su centro de masa localizado a  $20.0 \text{ cm}$  de la articulación del codo (el punto negro en la figura). Suponga también que el centro de masa de la pelota en la mano se localiza a  $30.0 \text{ cm}$  del codo. (La inserción del músculo está a  $4.00 \text{ cm}$  del codo, ejemplo 8.2.)
35. ●● Una bola de bolos (con masa de  $7.00 \text{ kg}$  y radio de  $17.0 \text{ cm}$ ) se avienta tan rápido que derrapa sin rodar por la pista (al menos por un momento). Suponga que la bola derrapa hacia la derecha y que el coeficiente de fricción de deslizamiento entre la bola y la superficie del carril es  $0.400$ . a) ¿Cuál será la dirección del momento de fuerza ejercido por la fricción sobre la bola alrededor del centro de masa de ésta? b) Determine la magnitud de este momento de fuerza (de nuevo alrededor del centro de masa de la bola).
36. ●● Una variación de la tracción Russell (ver figura 8.35) sostiene la pantorrilla enyesada. Suponga que la pierna y el yeso tienen una masa combinada de  $15.0 \text{ kg}$  y que  $m_1$  es  $4.50 \text{ kg}$ . a) ¿Qué fuerza de reacción ejercen los músculos de la pierna contra la tracción? b) ¿Qué valor debe tener  $m_2$  para mantener horizontal la pierna?



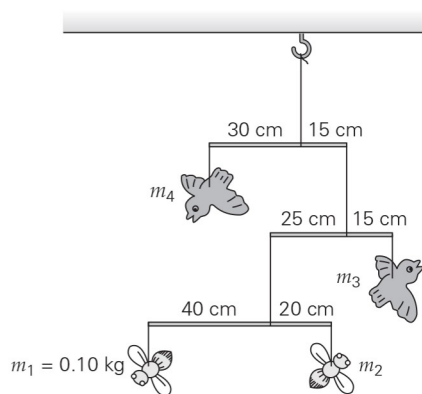
▲ FIGURA 8.35 Tracción estática Véase el ejercicio 36.

37. ●● Al realizar su terapia física para una rodilla lesionada, una persona levanta una bota de 5.0 kg como se ilustra en la ▼ figura 8.36. Calcule el momento de fuerza que ejerce la bota para cada posición mostrada.



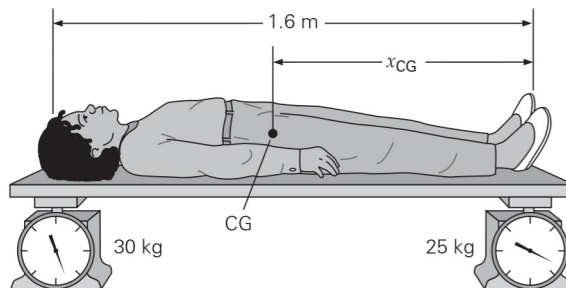
▲ FIGURA 8.36 Momento de fuerza en una terapia física Véase el ejercicio 37.

38. ●● Un artista quiere construir el móvil de pájaros y abejas que se muestra en la ▼ figura 8.37. Si la masa de la abeja de la izquierda es de 0.10 kg y cada hilo vertical tiene una longitud de 30 cm, ¿qué masa tendrán la otra abeja y los pájaros? (Ignore las masas de las barras y las cuerdas.)



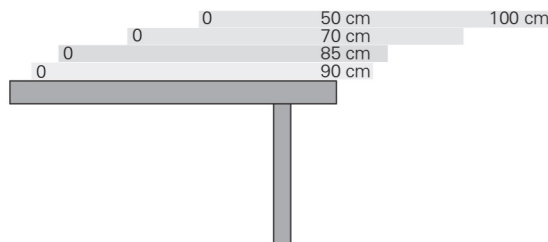
▲ FIGURA 8.37 Pájaros y abejas Véase el ejercicio 38.

39. El ●● La ubicación del centro de gravedad de una persona en relación con su altura se determina utilizando el modelo de la ► figura 8.38. Las básculas se ajustaron inicialmente a cero con la tabla sola. a) ¿Usted esperaría que la ubicación del centro de masa estuviera 1) a la mitad del camino entre las básculas, 2) hacia la báscula situada debajo de la cabeza de la persona o 3) hacia la báscula situada debajo de los pies de la persona? ¿Por qué? b) Localice el centro de gravedad de la persona en relación con la dimensión horizontal.



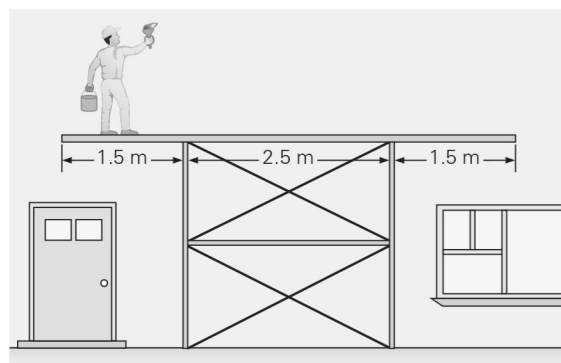
▲ FIGURA 8.38 Localización del centro de gravedad Véase el ejercicio 39.

40. ●● a) ¿Cuántos libros uniformes idénticos de 25.0 cm de ancho pueden apilarse en una superficie horizontal sin que el montón se desplome, si cada libro sucesivo se desplaza 3.00 cm a lo ancho, en relación con el libro inmediato inferior? b) Si los libros tienen 5.00 cm de espesor, ¿a qué altura sobre la superficie horizontal estará el centro de masa del montón?
41. ●● Si cuatro reglas de un metro cada una se apilan en una mesa con 10, 15, 30 y 50 cm, respectivamente, proyectándose más allá del borde de la mesa, como se muestra en la ▼ figura 8.39, ¿la regla de la parte superior permanecerá sobre la mesa?

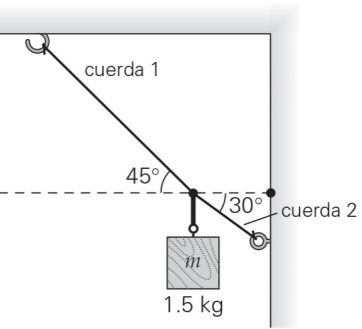


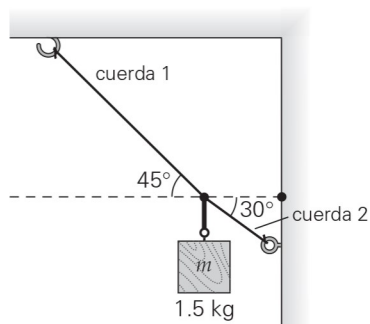
▲ FIGURA 8.39 ¿Se caerán? Véase el ejercicio 41.

42. ●● Un cubo sólido y uniforme de 10.0 kg, de 0.500 m por lado, descansa en una superficie horizontal. ¿Qué trabajo mínimo se requiere para colocarlo en una posición de equilibrio inestable?
43. ●● Parado en una tabla larga que descansa sobre un andamio, un hombre de 70 kg pinta un muro, como se observa en la ▼ figura 8.40. Si la masa de la tabla es de 15 kg, ¿qué tan cerca de un extremo puede pararse el pintor sin que la tabla se incline?

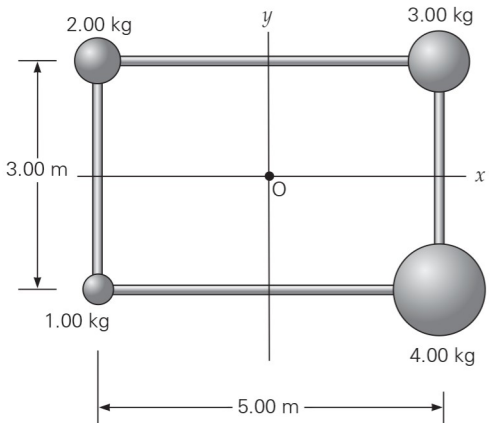


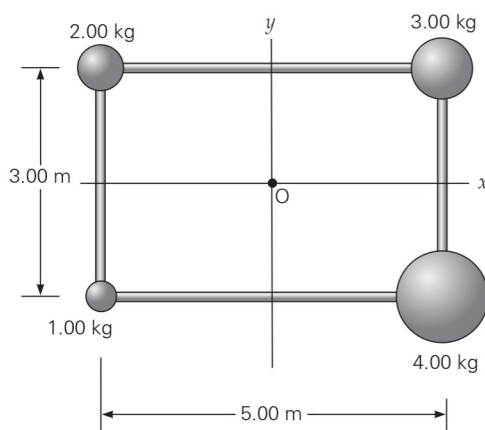
▲ FIGURA 8.40 ¡No tan lejos! Véanse los ejercicios 43 y 46.

44. ●● Una masa está suspendida por dos cuerdas, como se ilustra en la  figura 8.41. ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?



◀ FIGURA 8.41 Una gran tensión Véanse los ejercicios 44 y 45.

45. ●● Si la cuerda sostenida de la pared vertical en la figura 8.41 estuviera en posición horizontal (en vez de formar un ángulo de  $30^\circ$ ), ¿cuáles serían las tensiones en las cuerdas?
46. ●●● Suponga que la tabla de la figura 8.40 pende de cuerdas verticales sujetas a cada extremo, en vez de descansar sobre un andamio. Si el pintor se para a 1.5 m de un extremo de la tabla, ¿qué tensión habrá en cada cuerda? (Busque datos adicionales en el ejercicio 43.)
47. El ●●● En un acto circense, una tabla uniforme (con longitud de 3.00 m y masa de 35.0 kg) está suspendida de una cuerda por un extremo, mientras que el otro extremo descansa sobre un pilar de concreto. Cuando un payaso (con masa de 75.0 kg) se sube a la tabla en su punto medio, ésta se inclina de manera que el extremo de la cuerda queda a  $30^\circ$  con respecto a la horizontal y la cuerda permanece vertical. a) ¿En qué situación será mayor la tensión de la cuerda? 1) la tabla sin el payaso encima, 2) la tabla con el payaso encima o 3) no es posible determinarlo a partir de los datos. b) Calcule la fuerza ejercida por la cuerda en ambas situaciones.
48. El ●●● Las fuerzas que actúan sobre Einstein y la bicicleta (figura 2 de la sección A fondo en la p. 271) son el peso total de Einstein y la bicicleta ( $mg$ ) en el centro de gravedad del sistema, la fuerza normal ( $N$ ) ejercida por el pavimento y la fuerza de fricción estática ( $f_s$ ) que actúa sobre los neumáticos debido al pavimento. a) Para que Einstein mantenga el equilibrio, ¿la tangente del ángulo de inclinación  $\theta$  ( $\tan \theta$ ) debería ser 1) mayor que, 2) igual a o 3) menor que  $f_s/N$ ? b) El ángulo  $\theta$  de la figura es de unos  $11^\circ$ . Calcule el coeficiente mínimo de fricción estática ( $\mu_s$ ) entre las ruedas y el pavimento? c) Si el radio del círculo es de 6.5 m, ¿qué rapidez máxima tendría la bicicleta? [Sugerencia: el momento de fuerza neto en torno al centro de gravedad debe ser cero para que haya equilibrio rotacional.]
52. OM El momento de inercia en torno a un eje paralelo al eje que pasa por el centro de masa depende de a) la masa del cuerpo rígido, b) la distancia entre los ejes, c) el momento de inercia en torno al eje que pasa por el centro de masa o d) todas las opciones anteriores.
53. PC a) ¿El momento de inercia de un cuerpo rígido depende en algún sentido del centro de masa del cuerpo? Explique. b) ¿El momento de inercia de un cuerpo podría tener un valor negativo? Si su respuesta es afirmativa, explique el significado.
54. PC ¿Por qué el momento de inercia de un cuerpo rígido tiene diferentes valores para diferentes ejes de rotación? ¿Qué significa esto físicamente?
55. PC Cuando se imparte rápidamente un momento de fuerza (giro) a un huevo duro que está sobre una mesa, el huevo se levanta y gira sobre un extremo como un trompo. Un huevo crudo no lo hace. ¿A qué se debe la diferencia?
56. PC ¿Por qué una toalla de papel se desprende mejor de un rollo si se le da un tirón, que si se tira de ella suavemente? ¿La cantidad de papel en el rollo influye en los resultados?
57. PC Los equilibristas están en riesgo continuo de caer (equilibrio inestable). Por lo general usan una pértiga o vara larga mientras caminan por la cuerda floja, como se observa en la imagen de inicio del capítulo. ¿Cuál es la finalidad de la pértiga? (Cuando camina por una vía de tren o por una tabla angosta, quizás usted extienda sus brazos por la misma razón.)
58. ● Un momento de fuerza neto de  $6.4 \text{ m} \cdot \text{N}$  actúa sobre una polea fija de 0.15 kg, en forma de disco sólido, con radio de 0.075 m. Calcule la aceleración angular de la polea.
59. ● ¿Qué momento de fuerza neto se requiere para impartir una aceleración angular de  $20 \text{ rad/s}^2$  a una esfera sólida uniforme de 0.20 m de radio y 20 kg?
60. ● Para el sistema de masa de la  figura 8.42, calcule el momento de inercia en torno a) al eje  $x$ , b) al eje  $y$  y c) un eje que pasa por el origen y es perpendicular a la página (eje  $z$ ). Desprecie las masas de las varillas que conectan.



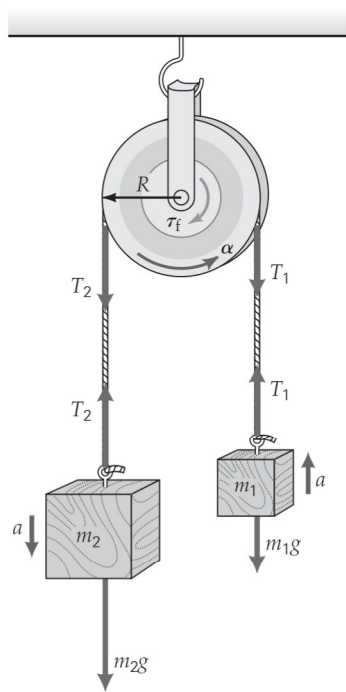
▲ FIGURA 8.42 Momentos de inercia en torno a diferentes ejes Véase el ejercicio 60.

### 8.3 Dinámica rotacional

49. OM El momento de inercia de un cuerpo rígido a) depende del eje de rotación, b) no puede ser cero, c) depende de la distribución de masa o d) todo lo anterior.
50. OM ¿Qué de lo siguiente describe mejor la cantidad física llamada momento de fuerza? a) Análogo rotacional de la fuerza, b) energía debida a la rotación, c) tasa de cambio con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento lineal o d) fuerza tangente a un círculo.
51. OM En general, el momento de inercia es mayor cuando a) más masa está más lejos del eje de rotación, b) más masa está más cerca del eje de rotación, c) en realidad esto no importa.

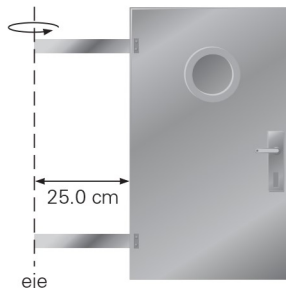


61. ● Una regla ligera de un metro se carga con masas de 2.0 y 4.0 kg en las posiciones de 30 y 75 cm, respectivamente. a) Calcule el momento de inercia en torno a un eje que pasa por la posición de 0 cm. b) Determine el momento de inercia en torno a un eje que pasa por el centro de masa del sistema. c) Use el teorema de ejes paralelos para calcular el momento de inercia en torno a un eje que pasa por la posición de 0 cm y compare el resultado con el del inciso b.
62. ●● Una rueda de la fortuna de 2000 kg acelera desde el reposo hasta una rapidez angular de 2.0 rad/s en 12 s. Considerando la rueda como un disco circular de 30 m de radio, calcule el momento de fuerza neto sobre ella.
63. ●● Una esfera uniforme de 15 cm de radio y de 15 kg gira a 3.0 rad/s en torno a un eje tangente a su superficie. Entonces, un momento de fuerza constante de  $10 \text{ m} \cdot \text{N}$  aumenta la rapidez de rotación a 7.5 rad/s. ¿Qué ángulo gira la esfera mientras está acelerando?
64. El ●● Dos objetos de diferente masa están unidos por una varilla ligera. a) ¿El momento de inercia en torno al centro de masa es el mínimo o el máximo? ¿Por qué? b) Si las dos masas son de 3.0 y 5.0 kg, y la longitud de la varilla es de 2.0 m, calcule los momentos de inercia del sistema en torno a un eje perpendicular a la varilla, que pasa por el centro de la varilla y por el centro de masa.
65. ●● Dos masas penden de una polea como se muestra en la [figura 8.43](#) (otra vez la máquina de Atwood; véase el capítulo 4, ejercicio 68). La polea tiene una masa de 0.20 kg, un radio de 0.15 m y un momento de fuerza constante de  $0.35 \text{ m} \cdot \text{N}$  debido a la fricción que hay entre ella y su eje al girar. ¿Qué magnitud tiene la aceleración de las masas suspendidas si  $m_1 = 0.40 \text{ kg}$  y  $m_2 = 0.80 \text{ kg}$ ? (Desprecie la masa de la cuerda.)



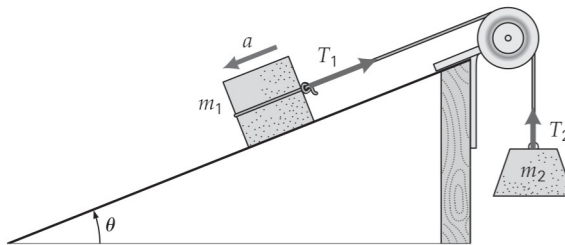
◀ FIGURA 8.43 Otra vez la máquina de Atwood  
Véase el ejercicio 65.

66. ●● La puerta de un submarino se diseña de manera que su placa rectangular gire sobre dos ejes rectangulares, como se muestra en la [figura 8.44](#). Cada eje tiene una masa de 50.0 kg y una longitud de 25.0 cm. La puerta tiene una masa de 200 kg y mide 50 cm por 1.00 m. Calcule el momento de inercia de este sistema puerta-ventanilla en torno a la línea de bisagras (que se representa con una línea vertical punteada en la figura).



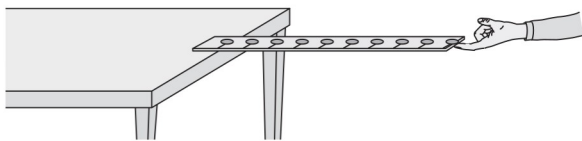
◀ FIGURA 8.44 Puerta de submarino (no está a escala)  
Véase el ejercicio 66.

67. ●● Para encender su podadora de césped, Julie tira de una cuerda enrollada en una polea, la cual tiene un momento de inercia en torno a su eje central de  $I = 0.550 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y un radio de 5.00 cm. Hay un momento de fuerza equivalente debido a la fricción de  $\tau_f = 0.430 \text{ m} \cdot \text{N}$ , que dificulta el tirón de Julie. Para acelerar la polea a  $\alpha = 4.55 \text{ rad/s}^2$ , a) ¿qué momento de fuerza necesita aplicar Julie a la polea? b) ¿Cuánta tensión debe ejercer la cuerda?
68. ●● Para el sistema de la [figura 8.45](#),  $m_1 = 8.0 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3.0 \text{ kg}$ ,  $\theta = 30^\circ$  y el radio y la masa de la polea son 0.10 m y 0.10 kg, respectivamente. a) ¿Qué aceleración tienen las masas? (Desprecie la fricción y la masa de la cuerda.) b) Si la polea tiene un momento de fuerza de fricción constante de  $0.050 \text{ m} \cdot \text{N}$  cuando el sistema está en movimiento ¿qué aceleración tiene las masas? [Sugerencia: aísle las fuerzas. Las tensiones en las cuerdas son distintas. ¿Por qué?]



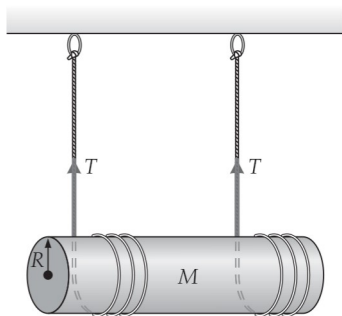
▲ FIGURA 8.45 Plano inclinado y polea Véase el ejercicio 68.

69. ●● Una regla de un metro que pivotea en torno a un eje horizontal que pasa por la posición de 0 cm se sostiene en posición horizontal y luego se suelta. a) ¿Qué aceleración tangencial tiene la posición de 100 cm? ¿Le sorprende este resultado? b) ¿Qué posición tiene una aceleración tangencial igual a la aceleración debida a la gravedad?
70. ●● Se colocan moneditas a cada 10 cm sobre una regla de un metro. Un extremo de la regla se apoya en una mesa y el otro se sostiene con el dedo, de manera que la regla esté horizontal [figura 8.46](#). Si se quita el dedo, ¿qué le sucederá a las monedas?



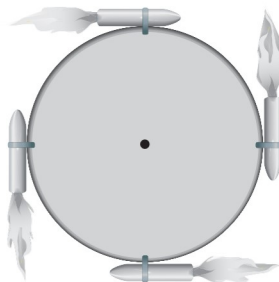
▲ FIGURA 8.46 ¿Dinero rezagado? Véase el ejercicio 70.

71. ●●● Un cilindro uniforme de 2.0 kg y 0.15 m de radio pende de dos cuerdas enrolladas en él (▼ figura 8.47). Al bajar el cilindro, las cuerdas se desarrollan. ¿Qué aceleración tiene el centro de masa del cilindro? (Desprecie la masa de las cuerdas.)



◀ FIGURA 8.47  
Desenrollado con  
gravedad Véase el  
ejercicio 71.

72. ●●● Una sonda espacial planetaria tiene forma cilíndrica. Para protegerla del calor en un lado (de los rayos solares), los operadores en la Tierra la ponen en “forma de asador”, es decir, hacen que gire sobre su largo eje. Para lograr esto, colocan cuatro pequeños cohetes montados tangencialmente como se observa en la ▼ figura 8.48 (la sonda se ilustra con el frente hacia usted). El objetivo es hacer que la sonda dé un giro completo cada 30 s, partiendo de rotación cero. Los operadores quieren lograr esto encendiendo los cuatro cohetes durante cierto tiempo. Cada cohete ejerce una propulsión de 50.0 N. Suponga que la sonda es un cilindro sólido uniforme con un radio de 2.50 m y una masa de 1000 kg; ignore la masa del motor de los cohetes. Determine el tiempo que los cohetes deben estar encendidos.



▲ FIGURA 8.48 Sonda espacial en “forma de asador”  
Véase el ejercicio 72.

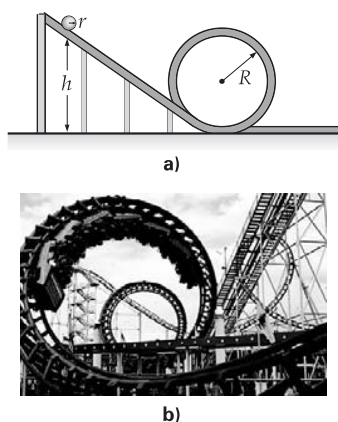
73. El ●●● Una esfera de radio  $R$  y masa  $M$  baja rodando por una pendiente de ángulo  $\theta$ . a) Para que la esfera ruede sin resbalar, ¿la tangente del ángulo máximo de la pendiente ( $\tan \theta$ ) debe ser igual a 1)  $3 \mu_s/2$ , 2)  $5 \mu_s/2$ , 3)  $7 \mu_s/2$  o 4)  $9 \mu_s/2$ ? ( $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática.) b) Si la esfera es de madera, al igual que la superficie, ¿qué ángulo máximo puede tener la pendiente? [Sugerencia: véase la tabla 4.1.]

## 8.4 Trabajo rotacional y energía cinética

74. OM Dado que  $W = \tau\theta$ , la unidad de trabajo rotacional es a) watt, b)  $\text{N} \cdot \text{m}$ , c)  $\text{kg} \cdot \text{rads}/\text{s}^2$ , d)  $\text{N} \cdot \text{rad}$ .
75. OM Una bola de bolos rueda sin resbalar por una superficie horizontal. La bola tiene a) energía cinética rotacional, b) energía cinética traslacional, c) energía cinética tanto rotacional como traslacional o d) ni energía cinética rotacional ni traslacional.
76. OM Un cilindro que rueda sobre una superficie horizontal tiene a) energía cinética de rotación, b) energía cinética de traslación, c) energía cinética de rotación y de traslación.
77. PC ¿Es posible aumentar la energía cinética rotacional de una rueda sin alterar su energía cinética traslacional? Explique.
78. PC Para aumentar la eficiencia con que sus vehículos utilizan el combustible, los fabricantes de automóviles quieren reducir al máximo la energía cinética rotacional y aumentar al máximo la energía cinética traslacional cuando un coche avanza. Si usted tuviera que diseñar ruedas de cierto diámetro, ¿cómo las diseñaría?
79. PC ¿Qué se requiere para producir un cambio en la energía cinética rotacional?
80. ● Un momento de fuerza retardante constante de  $12 \text{ m} \cdot \text{N}$  detiene una rueda rodante de 0.80 m de diámetro en una distancia de 15 m. ¿Cuánto trabajo efectúa el momento de fuerza?
81. ● Una persona abre una puerta aplicando una fuerza de 15 N perpendicular a ella, a 0.90 m de las bisagras. La puerta se abre completamente (a  $120^\circ$ ) en 2.0 s. a) ¿Cuánto trabajo se efectuó? b) ¿Qué potencia promedio se generó?
82. ● Un momento de fuerza constante de  $10 \text{ m} \cdot \text{N}$  se aplica a un disco uniforme de 10 kg y 0.20 m de radio. Partiendo del reposo, ¿qué rapidez angular tiene el disco en torno a un eje que pasa por su centro, después de efectuar dos revoluciones?
83. ● Una polea de 2.5 kg y 0.15 m de radio pivotea en torno a un radio que pasa por su centro. ¿Qué momento de fuerza constante se requiere para que la polea alcance una rapidez angular de 25 rad/s, después de efectuar 3.0 revoluciones, si parte del reposo?
84. El ● En la figura 8.23, una masa  $m$  desciende una distancia vertical desde el reposo. (Desprecie la fricción y la masa de la cuerda.) a) Por la conservación de la energía mecánica, ¿la rapidez lineal de la masa en descenso será 1) mayor, 2) igual o 3) menor que  $\sqrt{2gh}$ ? ¿Por qué? b) Si  $m = 1.0 \text{ kg}$ ,  $M = 0.30 \text{ kg}$  y  $R = 0.15 \text{ m}$ , ¿qué rapidez lineal tiene la masa después de haber descendido una distancia vertical de 2.0 m desde el reposo?
85. ●● Una esfera con radio de 15 cm rueda sobre una superficie horizontal con rapidez angular constante de 10 rad/s. ¿Hasta qué altura en un plano inclinado de  $30^\circ$  subirá rodando la esfera antes de detenerse? (Desprecie las pérdidas por fricción.)
86. ●● Estime la razón de la energía cinética de traslación de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, con respecto a la energía cinética rotacional que realiza en torno a su eje N-S.



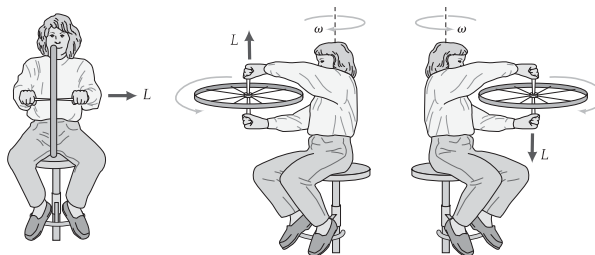
87. ●● Usted desea acelerar un pequeño carrusel desde el reposo hasta la rapidez de rotación de un tercio de una revolución por segundo empujándolo tangencialmente. Suponga que el carrusel es un disco con una masa de 250 kg y un radio de 1.50 m. Ignorando la fricción, ¿qué tan fuerte debe empujar tangencialmente para lograr esto en 5.00 s? (Utilice métodos de energía y suponga que usted empuja de manera constante.)
88. ●● Una varilla delgada de 1.0 m de largo apoyada en un extremo cae (gira) desde un posición horizontal, partiendo del reposo y sin fricción. ¿Qué rapidez angular tiene cuando queda vertical? [Sugerencia: considere el centro de masa y use la conservación de la energía mecánica.]
89. ●● Una esfera uniforme y un cilindro uniforme con la misma masa y radio ruedan con la misma velocidad juntos por una superficie horizontal sin deslizarse. Si la esfera y el cilindro se acercan a un plano inclinado y suben por él rodando sin deslizarse, ¿alcanzarán la misma altura cuando se detengan? Si no, ¿qué diferencia porcentual habrá entre sus alturas?
90. ●● Un aro parte del reposo a una altura de 1.2 m sobre la base de un plano inclinado y baja rodando bajo la influencia de la gravedad. ¿Qué rapidez lineal tiene el centro de masa del aro, justo en el momento en que el aro llega al pie de la pendiente y comienza a rodar por una superficie horizontal? (Desprecie la fricción.)
91. ●● Un volante industrial con momento de inercia de  $4.25 \times 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  gira con una rapidez de 7500 rpm. a) ¿Cuánto trabajo se requiere para detenerlo? b) Si ese trabajo se efectúa uniformemente en 1.5 min, ¿qué tanta potencia se gastará?
92. ●● Un arco cilíndrico, un cilindro y una esfera con el mismo radio y masa se sueltan simultáneamente desde la cima de un plano inclinado. Utilice la conservación de la energía mecánica para demostrar que la esfera siempre llega primero a la base con la rapidez más alta, y el aro siempre llega último con la rapidez más baja.
93. ●● Para los siguientes objetos, todos los cuales ruedan sin resbalar, determine la energía cinética rotacional en torno al centro de masa, como porcentaje de la energía cinética total: a) una esfera sólida, b) un casco esférico delgado y c) un casco cilíndrico delgado.
94. ●● En una secadora de ropa, el tambor cilíndrico (con radio de 50.0 cm y masa de 35.0 kg) gira una vez por segundo. a) Determine su energía cinética rotacional en torno a su eje central. b) Si partió del reposo y alcanzó esa rapidez en 2.50 s, determine el momento de fuerza neto promedio sobre el tambor de la secadora.
95. ●● Una esfera de acero baja rodando por una pendiente y entra en un rizo de radio  $R$  (► figura 8.49a). a) ¿Qué rapidez mínima debe tener la parte más alta del rizo para mantenerse en la pista? b) ¿A qué altura vertical ( $h$ ) en la pendiente, en términos del radio del rizo, debe soltarse la esfera para que tenga esa rapidez mínima necesaria en la parte superior del rizo? (Desprecie las pérdidas por fricción.) c) La figura 8.49a muestra el rizo de una montaña rusa. ¿Qué sentirán los pasajeros si el carrito tiene la rapidez mínima en la parte superior del rizo, y si tiene una rapidez mayor? [Sugerencia: si la rapidez es menor que la mínima, las correas en la cintura y hombros evitarán que los pasajeros se salgan.]



◀ FIGURA 8.49 Rizar el rizo y rapidez rotacional Véase el ejercicio 95.

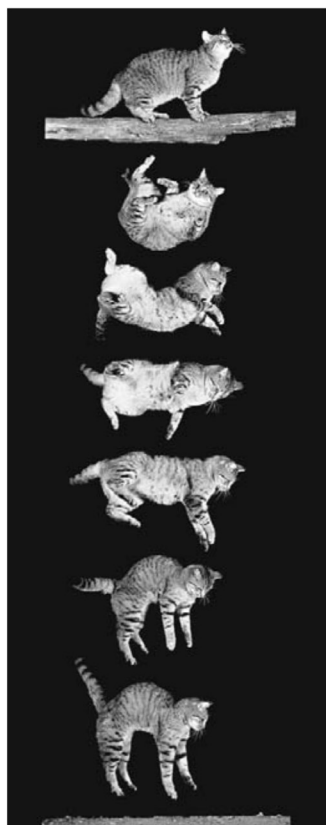
### 8.5 Cantidad de movimiento angular

96. OM Las unidades de cantidad de movimiento angular son a)  $\text{N} \cdot \text{m}$ , b)  $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ , c)  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ , d)  $\text{J} \cdot \text{m}$ .
97. OM La rapidez orbital de la Tierra es la mayor a) el 21 de marzo, b) el 21 de junio, c) el 21 de septiembre, d) el 21 de diciembre.
98. OM La cantidad de movimiento angular puede incrementarse mediante a) la disminución del momento de inercia, b) la disminución de la velocidad angular, c) el incremento del producto de la cantidad de movimiento angular y el momento de inercia, d) ninguna de las opciones anteriores.
99. PC Un niño se para en el borde de un pequeño carrusel de jardín (de los que se empujan manualmente) que gira. Luego comienza a caminar hacia el centro del carrusel, lo cual origina una situación peligrosa. ¿Por qué?
100. PC La liberación de grandes cantidades de dióxido de carbono podría elevar la temperatura promedio de la Tierra por el llamado efecto invernadero, y hacer que se derritan los casquetes polares. Si ocurriera esto y el nivel del mar ascendiera sustancialmente, ¿qué efecto tendría ello sobre la rotación terrestre y la longitud del día?
101. PC En la demostración de salón de clases que se ilustra en la ► figura 8.50, una persona en un banquito giratorio sostiene una rueda de bicicleta giratoria con mangos unidos a la rueda. Cuando la rueda se sostiene horizontalmente, la persona gira en un sentido (horario visto desde arriba). Cuando la rueda se voltea, la persona gira en la dirección opuesta. Explique esto. [Sugerencia: considere vectores de cantidad de movimiento angular.]



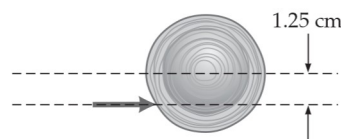
▲ FIGURA 8.50 Rotación más rápida Véase el ejercicio 101.

102. **PC** Los gatos suelen caer parados, incluso si se les coloca boca arriba y luego se les deja caer (▼ figura 8.51). Mientras el gato cae, no hay momento de fuerza externo y su centro de masa cae como una partícula. ¿Cómo pueden los gatos darse vuelta mientras caen?



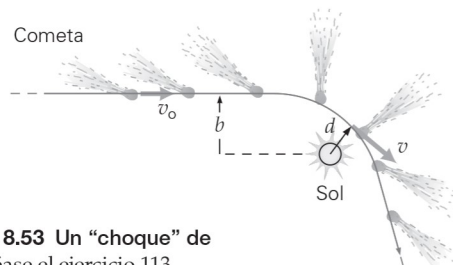
◀ FIGURA 8.51 Doble rotación Véase el ejercicio 102.

103. **PC** Dos patinadores sobre hielo (con pesos iguales) avanzan uno hacia el otro, con igual rapidez en trayectorias paralelas. Al pasar uno junto del otro, unen sus brazos. a) ¿Cuál es la velocidad de su centro de masa después de que unen los brazos? b) ¿Qué sucede con sus energías cinéticas lineales iniciales?
104. ● ¿Qué cantidad de movimiento angular tiene una partícula de 2.0 g que se mueve en dirección antihoraria (vista desde arriba), con una rapidez angular de  $5\pi$  rad/s en un círculo horizontal de 15 cm de radio? (Dé la magnitud y dirección.)
105. ● Un disco giratorio de 10 kg y 0.25 m de radio tiene una cantidad de movimiento angular de  $0.45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ . ¿Qué rapidez angular tiene?
106. ●● Calcule la razón de las magnitudes de las cantidades de movimiento angulares orbital y rotacional de la Tierra. ¿Estas cantidades de movimiento tienen la misma dirección?
107. ●● El periodo de rotación de la Luna es igual a su periodo de revolución: 27.3 días (siderales). ¿Qué cantidad de movimiento angular tienen cada rotación y revolución? (Por ser iguales los periodos, sólo vemos un lado de la Luna desde la Tierra.)
108. **El** ●● En los embragues y las transmisiones de los automóviles se usan discos circulares. Cuando un disco giratorio se acopla con uno estacionario por fricción, la energía del disco giratorio se puede transferir al estacionario. a) ¿La rapidez angular de los discos acoplados es 1) mayor que, 2) menor que o 3) igual a la rapidez angular del disco giratorio original? ¿Por qué? b) Si un disco que gira a 800 rpm se acopla a uno estacionario cuyo momento de inercia es del triple, ¿qué rapidez angular tendrá la combinación?
109. ●● Un hombre sube a su pequeño hijo a un carrusel en rotación. En esencia, el carrusel es un disco con una masa de 250 kg y un radio de 2.50 m que inicialmente completa una revolución cada 5.00 segundos. Suponga que el niño tiene una masa de 15.0 kg y que el papá lo coloca (sin que se deslice) cerca de la orilla del carrusel. Determine la rapidez angular final del sistema niño-carrusel.
110. ●● Un patinador tiene un momento de inercia de  $100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  con los brazos estirados, y de  $75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  con los brazos pegados al pecho. Si comienza a girar con una rapidez angular de 2.0 rps (revoluciones por segundo) con los brazos estirados, ¿qué rapidez angular tendrá cuando los encoja?
111. ●● Una patinadora sobre hielo que gira con los brazos extendidos tiene una rapidez angular de 4.0 rad/s. Cuando encoge los brazos, reduce su momento de inercia en un 7.5%. a) Calcule la rapidez angular resultante. b) ¿En qué factor cambia la energía cinética de la patinadora? (Desprecie los efectos de fricción.) c) ¿De dónde proviene la energía cinética adicional?
112. ●● Una bola de billar en reposo es golpeada (como se indica con la flecha gruesa en la ▼ figura 8.52) con un taco que ejerce una fuerza promedio de 5.50 N durante 0.050 s. El taco hace contacto con la superficie de la bola, de manera que el brazo de palanca mide la mitad del radio de la pelota, como se muestra. Si la bola tiene una masa de 200 g y un radio de 2.50 cm, determine la rapidez angular de la bola inmediatamente después del golpe.



▶ FIGURA 8.52 Golpe bajo Véase el ejercicio 112.

113. ●●● Un cometa se acerca al Sol como se ilustra en la ▼ figura 8.53 y la atracción gravitacional del Sol lo desvía. Este suceso se considera un choque, y  $b$  es el llamado *parámetro de impacto*. Calcule la distancia de máxima aproximación ( $d$ ) en términos del parámetro de impacto y las velocidades ( $v_0$  lejos del Sol y  $v$  en la máxima aproximación). Suponga que el radio del Sol es insignificante en comparación con  $d$ . (Como muestra la figura, la cola de un cometa siempre “apunta” en dirección opuesta al Sol.)



▶ FIGURA 8.53 Un “choque” de cometa Véase el ejercicio 113.

114. ●●● Al reparar su bicicleta, un estudiante la pone de cabeza de manera que la rueda frontal gira  $2.00 \text{ rev/s}$ . Suponga que la rueda tiene una masa de  $3.25 \text{ kg}$  y que toda la masa está localizada en la montura, que tiene un radio de  $41.0 \text{ cm}$ . Para frenar la rueda, el estudiante coloca su mano sobre el neumático, ejerciendo entonces una fuerza tangencial de fricción sobre la rueda, que tarda  $3.50 \text{ s}$  en llegar al reposo. Utilice el cambio en la cantidad de movimiento angular para determinar la fuerza que el estudiante ejerce sobre la rueda. Suponga que la fuerza de fricción del eje es insignificante.
115. El ●●● Un gatito está parado en el borde de una bandeja giratoria (tornamesa). Suponga que la bandeja tiene cojinetes sin fricción y está inicialmente en reposo. *a)* Si el gatito comienza a caminar por la orilla de la bandeja, ésta 1) permanecerá estacionaria, 2) girará en la dirección opuesta a la dirección en que el gatito camina o 3) girará en la dirección en que camina el gatito. Explique. *b)* La masa del gatito es de  $0.50 \text{ kg}$ ; la bandeja tiene una masa de  $1.5 \text{ kg}$  y un radio de  $0.30 \text{ m}$ . Si el gatito camina con una rapidez de  $0.25 \text{ m/s}$  relativo al suelo, ¿qué rapidez angular tendrá la bandeja? *c)* Cuando el gatito haya dado una vuelta completa a la bandeja, ¿estará arriba del mismo punto en el suelo que al principio? Si no es así, ¿dónde está en relación con ese punto? (Especule acerca de qué sucedería si todos los habitantes de la Tierra de repente comenzaran a correr hacia el este. ¿Qué efecto podría tener esto sobre la duración del día?)

### Ejercicios adicionales

116. En una exposición de “arte moderno”, un carrete de cable industrial vacío y multicolor está suspendido de dos cables delgados como se observa en la [figura 8.54](#). El carrete tiene una masa de  $50.0 \text{ kg}$ , con un diámetro exterior de  $75.0 \text{ cm}$  y un diámetro del eje interior de  $18.0 \text{ cm}$ . Uno de los cables (# 1) está atado tangencialmente al eje y forma un ángulo de  $10^\circ$  con la vertical. El otro cable (#2) está atado tangencialmente a la orilla externa y forma un ángulo desconocido,  $\theta$ , con la vertical. Determine la tensión sobre cada cable y el ángulo  $\theta$ .

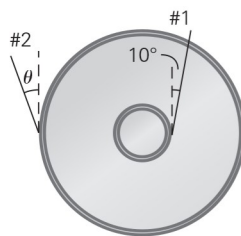


FIGURA 8.54 Arte moderno  
Véase el ejercicio 116.

117. Las pistas de bolos modernas tienen un sistema de retorno automático de las bolas. La bola es alzada a una altura de  $2.00 \text{ m}$  al final de la pista y, partiendo del reposo, rueda hacia abajo por una rampa. Luego continúa rodando horizontalmente y, al final, sube rodando por una rampa colocada en el otro extremo que está a  $0.500 \text{ m}$  del piso. Suponiendo que la masa de la bola de bolos es de  $7.00 \text{ kg}$  y que su radio mide  $16.0 \text{ cm}$ , *a)* determine la tasa de rotación de la bola durante su trayecto horizontal en medio de la pista, *b)* su rapidez lineal durante ese trayecto horizontal y *c)* la tasa de rotación y la rapidez lineal finales.
118. Un patinador sobre hielo con una masa de  $80.0 \text{ kg}$  y un momento de inercia (alrededor de su eje vertical central) de  $3.00 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  atrapa una pelota de béisbol con su brazo extendido. La atrapada se realiza a una distancia de  $1.00 \text{ m}$  del eje central. La pelota tiene una masa de  $300 \text{ g}$  y viaja a  $20.0 \text{ m/s}$  antes de que la atrapen. *a)* ¿Qué rapidez lineal tiene el sistema (patinador + pelota) después de atrapar la pelota? *b)* ¿Cuál es la rapidez angular del sistema (patinador + pelota) después de atraparla? *c)* ¿Qué porcentaje de la energía cinética inicial se pierde durante la atrapada? Ignore la fricción con el hielo.
119. Un resorte (con constante de resorte de  $500 \text{ N/m}$ ) es estirado  $10.0 \text{ cm}$  tirando de él sobre una cuerda que pasa por una polea (con un momento de inercia alrededor de su eje de  $0.550 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  y un radio de  $5.40 \text{ cm}$ ). La cuerda está unida a una masa (de  $1.50 \text{ kg}$ ) en su otro extremo. La masa colgante se libera desde el reposo y se eleva. Determine la rapidez de la masa cuando el resorte está en su posición relajada (sin estirar). Ignore la fricción.



Los siguientes problemas de física Physlet pueden utilizarse con este capítulo.

10.7, 10.9, 10.10, 10.11, 10.12, 10.13, 10.14, 11.1, 11.2, 11.3, 11.4, 11.5, 11.6, 11.7, 11.8, 11.9, 11.10, 13.2, 13.3, 13.6, 13.7, 13.8, 13.13



9.1	Sólidos y módulos de elasticidad	298
9.2	Fluidos: presión y el principio de Pascal	302
9.3	Flotabilidad y el principio de Arquímedes	313
9.4	Dinámica de fluidos y ecuación de Bernoulli	319
*9.5	Tensión superficial, viscosidad y ley de Poiseuille	324

## HECHOS DE FÍSICA

- La fosa Mariana, ubicada en el Océano Pacífico, es el punto de mayor profundidad en la Tierra. Alcanza los 11 km (6.8 mi) por debajo del nivel del mar. A esta profundidad, el agua del océano ejerce una presión de 108 MPa (15 900 lb/in<sup>2</sup>), o más de 1000 atmósferas de presión.
- El dirigible alemán *Hindenburg* tenía un volumen de gas hidrógeno de 20 000 m<sup>3</sup> (7 062 000 ft<sup>3</sup>). Se desplomó y se incendió en 1937 en Lakehurst, NJ. (El hidrógeno es altamente inflamable.) La nave se diseñó originalmente para utilizar helio, que no es inflamable. Pero la mayoría del helio se producía en Estados Unidos, y por esa época se decretó una ley que prohibía la venta de helio a la Alemania nazi.
- Aunque el principio de flotabilidad se atribuye a Arquímedes, es cuestionable si esto se le ocurrió en su tina de baño mientras intentaba encontrar una manera de comprobar si la corona del rey era de oro puro y no contenía plata, como cuenta la historia. De acuerdo con una narración romana, la solución se le ocurrió cuando se metió en una tina de baño y el agua se desbordó. Se supone que cantidades de oro puro y plata iguales en peso a la corona del rey se pusieron por separado, en recipientes llenos de agua, y la plata provocó que se derramara una mayor cantidad de agua. Al hacer la prueba con la corona, se desbordó mayor cantidad de agua que la que desalojó el oro puro, lo que implicaba que la corona contenía plata. ¿Una corona de oro puro? El oro puro es suave, maleable (puede cortarse en hojas delgadas) y dúctil (puede alargarse para formar hilos finos).



En la imagen se muestran montañas sólidas y un fluido invisible de aire que hace posible el vuelo sin motor. Caminamos en la superficie sólida de la Tierra y a diario usamos objetos sólidos de todo tipo, desde tijeras hasta computadoras. No obstante, estamos rodeados por fluidos (líquidos y gases), de los cuales dependemos. Sin el agua que bebemos, no sobreviviríamos más de unos cuantos días; sin el oxígeno del aire que respiramos, no viviríamos más de unos pocos minutos. De hecho, ni nosotros mismos somos tan sólidos como creemos. Por mucho, la sustancia más abundante en nuestro cuerpo es el agua, y es en el entorno acuoso de nuestras células donde ocurren todos los procesos químicos de los que depende la vida.

De acuerdo con distinciones físicas generales, por lo general la materia se divide en tres fases: sólida, líquida y gaseosa. Un *sólido* tiene forma y volumen definidos. Un *líquido* tiene un volumen más o menos definido; pero asume la forma del recipiente que lo contiene. Un *gas* adopta la forma y el volumen de su recipiente. Los sólidos y líquidos también se conocen como *materia condensada*. Usaremos un esquema de clasificación distinto y consideraremos la materia en términos de sólidos y fluidos. Llamamos colectivamente fluidos a los gases y líquidos. Un **fluido** es una sustancia que puede fluir; los líquidos y los gases fluyen, pero los sólidos no.

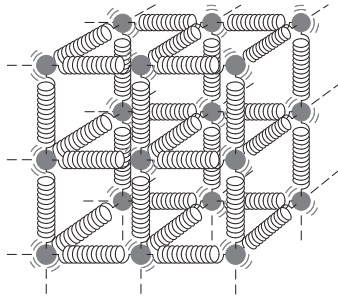
Una descripción sencilla de los sólidos es que se componen de partículas llamadas átomos, los cuales se mantienen unidos rígidamente por fuerzas interatómicas. En el capítulo 8 usamos el concepto de cuerpo rígido ideal para describir el movimiento rotacional. Los cuerpos sólidos reales no son absolutamente rígidos, porque las fuerzas externas pueden deformarlos elásticamente. Cuando pensamos en la elasticidad, por lo regular se nos vienen a la mente bandas de caucho o resortes que recuperan sus dimensiones originales incluso después de sufrir grandes deformaciones. En realidad, todos los materiales, hasta el acero más duro, son elásticos en algún grado. Sin embargo, como veremos, tal deformación tiene un *límite de elasticidad*.

Los fluidos, en cambio, tienen poca o ninguna respuesta elástica a las fuerzas. Una fuerza simplemente hace que un fluido no confinado fluya. En este capítulo



daremos especial atención al comportamiento de los fluidos, para aclarar interrogantes, por ejemplo, cómo funcionan los elevadores hidráulicos, por qué flotan los icebergs y los trasatlánticos, y qué significa la leyenda “10W-30” en una lata de aceite para motor. También descubriremos por qué la persona de la imagen no puede flotar como un globo lleno de helio, ni volar como un colibrí, pero con la ayuda de un trozo de plástico con la forma adecuada, es capaz de elevarse como una águila.

Debido a su fluidez, los líquidos y los gases tienen muchas propiedades en común, y resulta conveniente estudiarlos en conjuntos. También hay diferencias importantes. Por ejemplo, los líquidos no son muy compresibles, en tanto que los gases se comprimen con facilidad.



▲ **FIGURA 9.1** Un sólido elástico  
La naturaleza elástica de las fuerzas interatómicas se representa de forma simplista como resortes que, al igual que tales fuerzas, se oponen a la deformación.

## 9.1 Sólidos y módulos de elasticidad

**OBJETIVOS:** a) Distinguir entre esfuerzo y esfuerzo de deformación y b) usar módulos de elasticidad para calcular cambios dimensionales.

Como expusimos, todos los materiales sólidos son elásticos en mayor o menor grado; es decir, un cuerpo que se deforma levemente por la aplicación de una fuerza regresa a sus dimensiones o forma original cuando deja de aplicarse la fuerza. En muchos materiales quizá la deformación no sea perceptible, pero existe.

Sería más fácil entender por qué los materiales son elásticos, si pensamos en términos del sencillo modelo de un sólido que se muestra en la [figura 9.1](#). Imaginamos que los átomos de la sustancia sólida se mantienen unidos mediante resortes. La elasticidad de los resortes representa la naturaleza elástica de las fuerzas interatómicas. Los resortes se oponen a una deformación permanente, al igual que las fuerzas entre los átomos. Las propiedades elásticas de los sólidos suelen describirse en términos de esfuerzo y esfuerzo de deformación. El **esfuerzo** es una medida de la fuerza que causa una deformación. La **deformación** es una medida relativa de qué tanto cambia la forma por un esfuerzo. Cuantitativamente, *el esfuerzo es la fuerza aplicada por unidad de área transversal*:

$$\text{esfuerzo} = \frac{F}{A} \quad (9.1)$$

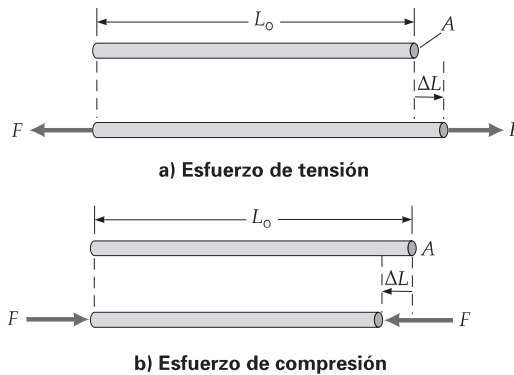
Unidad SI de esfuerzo: newton sobre metro cuadrado (N/m<sup>2</sup>)

Aquí,  $F$  es la magnitud de la fuerza aplicada normal (perpendicular) al área transversal. La ecuación 9.1 indica que las unidades SI de esfuerzo son newtons sobre metro cuadrado (N/m<sup>2</sup>).

Como ilustra la [figura 9.2](#), una fuerza aplicada a los extremos de una varilla produce un *esfuerzo de tensión* (una tensión que alarga,  $\Delta L > 0$ ) o un *esfuerzo de compresión* (una tensión que acorta,  $\Delta L < 0$ ), dependiendo de la dirección de la fuerza. En ambos casos, la *deformación* es la razón del cambio de longitud ( $\Delta L = L - L_0$ ) entre la longitud original ( $L_0$ ) sin tomar en cuenta el signo, de manera que usamos el valor absoluto,  $|\Delta L|$ :

$$\text{deformación} = \frac{|\text{cambio de longitud}|}{\text{longitud original}} = \frac{|\Delta L|}{L_0} = \frac{|L - L_0|}{L_0} \quad (9.2)$$

La deformación es una cantidad adimensional positiva



► **FIGURA 9.2** Esfuerzos de tensión y de compresión Los esfuerzos de tensión y de compresión se deben a fuerzas que se aplican normalmente a la superficie de los extremos de los cuerpos. *a)* Una tensión, o esfuerzo de tensión, suele incrementar la longitud de un objeto. *b)* Un esfuerzo de compresión tiende a acortar la longitud.  $\Delta L = L - L_0$  puede ser positivo, como en *a*; o negativo, como en *b*. En la ecuación 9.2 no se requiere el signo, de manera que usamos el valor absoluto  $|\Delta L|$ .

Así, la deformación es el *cambio fraccionario* de longitud. Por ejemplo, si la deformación es de 0.05, la longitud del material habrá cambiado 5% respecto a su longitud original.

Por lo tanto, la deformación resultante depende del esfuerzo aplicado. Si el esfuerzo es relativamente pequeño, la proporción es directa (o lineal); esto es, deformación  $\propto$  esfuerzo. La constante de proporcionalidad, que depende de la naturaleza del material, se denomina **módulo de elasticidad**. Así,

$$\text{esfuerzo} = \text{módulo de elasticidad} \times \text{deformación}$$

o bien,


$$\text{módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}} \quad (9.3)$$

Unidad SI del módulo de elasticidad: newton sobre metro cuadrado ( $\text{N}/\text{m}^2$ )

El módulo de elasticidad es el esfuerzo dividido entre la deformación, y tiene las mismas unidades que el esfuerzo. (¿Por qué?)

Hay tres tipos generales de módulos de elasticidad asociados a esfuerzos que producen cambios de longitud, forma o volumen. Se les denomina *módulo de Young*, *módulo de corte* y *módulo de volumen*, respectivamente.

### Cambio de longitud: módulo de Young

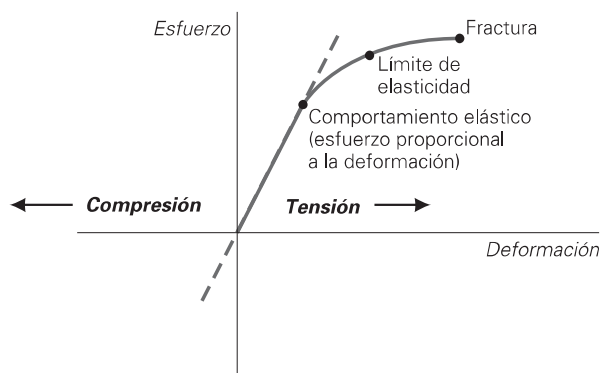
La  figura 9.3 es una gráfica de esfuerzo de tensión contra deformación para una varilla metálica común. La curva es una línea recta hasta un punto llamado *límite proporcional*. Más allá de este punto, la deformación aumenta más rápidamente hasta llegar a otro punto crítico llamado **límite de elasticidad**. Si la tensión se elimina en este punto, el material recuperará su longitud original. Si se aumenta la tensión más allá del límite de elasticidad y luego se retira, el material se recuperará hasta cierto punto, aunque habrá cierta deformación permanente.

La parte de línea recta de la gráfica muestra una proporcionalidad directa entre esfuerzo y deformación. En 1678, el físico inglés Robert Hooke fue el primero en formalizar esta relación, que ahora se conoce como *ley de Hooke*. (Es la misma relación general que la dada para un resorte en la sección 5.2; véase la figura 5.5.) El módulo de elasticidad para una tensión o compresión se denomina **módulo de Young ( $Y$ )**.\*

$$\frac{F}{A} = Y \left( \frac{\Delta L}{L_0} \right) \quad \text{o} \quad Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} \quad (9.4)$$

esfuerzo    deformación

Unidad si del módulo de Young: newton sobre metro cuadrado ( $\text{N}/\text{m}^2$ )



◀ **FIGURA 9.3 Esfuerzo y deformación** Una gráfica de esfuerzo contra deformación para una varilla metálica común es una línea recta hasta el límite proporcional. Luego continúa la deformación elástica hasta que se alcance el límite de elasticidad. Más allá de eso, la varilla sufrirá una deformación permanente y en algún momento se romperá.

\*Thomas Young (1773-1829) fue el físico y médico inglés que también demostró la naturaleza ondulatoria de la luz. Véase el experimento de doble rendija de Young en la sección 24.1.

**TABLA 9.1** Módulos de elasticidad para diversos materiales (en N/m<sup>2</sup>)

Sustancia	Módulo de Young ( $Y$ )	Módulo de corte ( $S$ )	Módulo de volumen ( $B$ )
<b>Sólidos</b>			
Aluminio	$7.0 \times 10^{10}$	$2.5 \times 10^{10}$	$7.0 \times 10^{10}$
Hueso (de extrem.)	Tensión: $1.5 \times 10^{10}$ Compresión: $9.3 \times 10^9$	$1.2 \times 10^{10}$	
Latón	$9.0 \times 10^{10}$	$3.5 \times 10^{10}$	$7.5 \times 10^{10}$
Cobre	$11 \times 10^{10}$	$3.8 \times 10^{10}$	$12 \times 10^{10}$
Vidrio	$5.7 \times 10^{10}$	$2.4 \times 10^{10}$	$4.0 \times 10^{10}$
Hierro	$15 \times 10^{10}$	$6.0 \times 10^{10}$	$12 \times 10^{10}$
Nylon	$5.0 \times 10^8$	$8.0 \times 10^8$	
Acero	$20 \times 10^{10}$	$8.2 \times 10^{10}$	$15 \times 10^{10}$
<b>Líquidos</b>			
Alcohol etílico			$1.0 \times 10^9$
Glicerina			$4.5 \times 10^9$
Mercurio			$26 \times 10^9$
Agua			$2.2 \times 10^9$

Las unidades del módulo de Young son las del esfuerzo, newtons sobre metro cuadrado (N/m<sup>2</sup>), pues la deformación no tiene unidades. En la tabla 9.1 se dan algunos valores representativos del módulo de Young.

Para entender mejor la idea o el significado físico del módulo de Young, despejemos  $\Delta L$  de la ecuación 9.4:

$$\Delta L = \left( \frac{FL_o}{A} \right) \frac{1}{Y} \quad \text{o} \quad \Delta L \propto \frac{1}{Y}$$

Por lo tanto, cuanto mayor sea el módulo de Young de un material, menor será su cambio de longitud (si los demás parámetros permanecen iguales).

### Ejemplo 9.1 ■ Extensión del fémur: un esfuerzo considerable

El fémur (hueso del muslo) es el hueso más largo y fuerte del cuerpo. Si suponemos que un fémur típico es aproximadamente cilíndrico, con un radio de 2.0 cm, ¿cuánta fuerza se requerirá para extender el fémur de un paciente en 0.010 por ciento?

**Razonamiento.** Vemos que la ecuación 9.4 es la apropiada, pero, ¿dónde queda el aumento porcentual? Contestaremos esta pregunta si vemos que el término  $\Delta L/L_o$  es el incremento *fraccionario* de longitud. Por ejemplo, si tuviéramos un resorte de 10 cm de longitud ( $L_o$ ) y lo estiráramos 1.0 cm ( $\Delta L$ ), entonces  $\Delta L/L_o = 1.0 \text{ cm}/10 \text{ cm} = 0.10$ . Este cociente se puede convertir fácilmente en un porcentaje, y diríamos que la longitud del resorte aumentó 10%. Entonces, el incremento porcentual es tan sólo el valor del término  $\Delta L/L_o$  (multiplicado por 100 por ciento).

**Solución.** Hacemos una lista de los datos,

**Dado:**  $r = 2.0 \text{ cm} = 0.020 \text{ m}$  **Encuentre:**  $F$  (fuerza de tensión)

$$\Delta L/L_o = 0.010\% = 1.0 \times 10^{-4}$$

$$Y = 1.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2 \text{ (para hueso, de la tabla 9.1)}$$

La ecuación 9.4 nos da

$$\begin{aligned} F &= Y(\Delta L/L_o)A = Y(\Delta L/L_o)\pi r^2 \\ &= (1.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2)(1.0 \times 10^{-4})\pi(0.020 \text{ m})^2 = 1.9 \times 10^3 \text{ N} \end{aligned}$$

¿Qué tanta fuerza es esto? Una fuerza considerable (más de 400 lb). El fémur es un hueso muy fuerte.

**Ejercicio de refuerzo.** Una masa total de 16 kg se cuelga de un alambre de acero de 0.10 cm de diámetro. *a)* ¿Qué incremento porcentual de longitud tiene el alambre? *b)* La resistencia a la tensión de un material es el esfuerzo máximo que un material aguanta antes de romperse o fracturarse. Si la resistencia a la tensión del alambre usado en *a* es de  $4.9 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ , ¿cuánta masa podría colgarse sin que se rompa el alambre? (Las respuestas de todos los Ejercicios de refuerzo se dan al final del libro.)

La mayoría de los tipos de huesos consisten en fibras de colágeno que están firmemente unidas y se traslapan. El colágeno muestra alta resistencia a la tensión y las sales de calcio en aquél dan a los huesos mucha resistencia a la compresión. El colágeno también forma el cartílago, los tendones y la piel, los cuales tienen buena resistencia a la tensión.

### Cambio de forma: módulo de corte

Otra forma de deformar un cuerpo elástico es con un *esfuerzo cortante*. En este caso, la deformación se debe a la aplicación de una fuerza que es *tangencial* a la superficie (►figura 9.4a). Se produce un cambio de forma sin un cambio de volumen. La *deformación de corte* está dada por  $x/h$ , donde  $x$  es el desplazamiento relativo de las caras y  $h$  es la distancia entre ellas.

La deformación de corte a veces se define en términos del **ángulo de corte**  $\phi$ . Como se observa en la figura 9.4b,  $\tan \phi = x/h$ . Sin embargo, este ángulo suele ser muy pequeño, por lo que una buena aproximación es  $\tan \phi \approx \phi \approx x/h$ , donde  $\phi$  está en radianes.\* (Si  $\phi = 10^\circ$ , por ejemplo, la diferencia entre  $\phi$  y  $\tan \phi$  es de sólo el 1.0%.) El **módulo de corte** ( $S$ ) (también llamado *módulo de rigidez*) es entonces

$$S = \frac{F/A}{x/h} \approx \frac{F/A}{\phi} \quad (9.5)$$

Unidad SI de módulo de corte: newton sobre metro cuadrado ( $\text{N/m}^2$ )

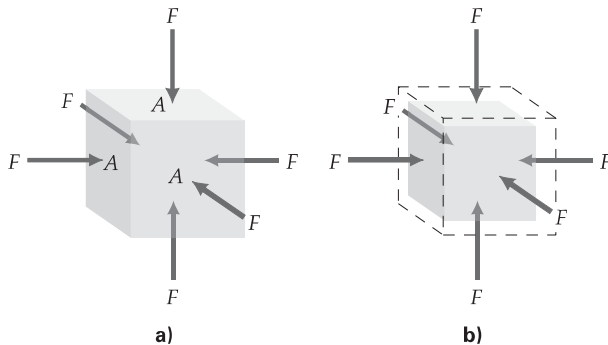
En la tabla 9.1 vemos que el módulo de corte suele ser menor que el módulo de Young. De hecho,  $S$  es aproximadamente  $Y/3$  para muchos materiales, lo que indica que hay una mayor respuesta a un esfuerzo cortante que a un esfuerzo de tensión. Observe también la relación inversa  $\phi \approx 1/S$ , similar a la que señalamos antes para el módulo de Young.

Un esfuerzo cortante podría ser del tipo torsional, que es resultado de la acción de torsión de un momento de fuerza. Por ejemplo, un esfuerzo cortante torsional podría cortar la cabeza de un tornillo que se esté apretando.

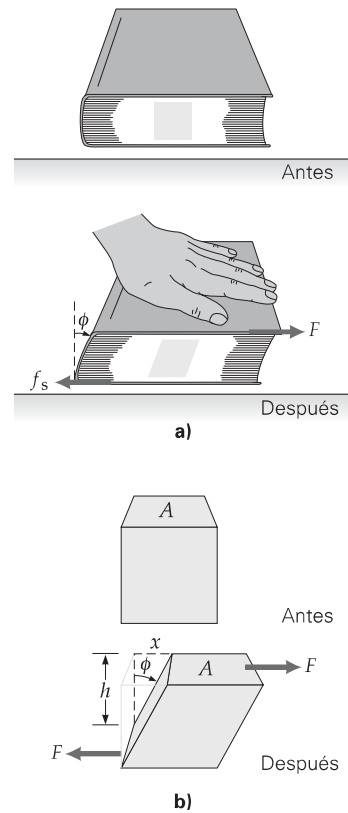
Los líquidos no tienen módulos de corte (ni módulos de Young); de ahí los huecos en la tabla 9.1. No es posible aplicar eficazmente un esfuerzo cortante a un líquido ni a un gas, porque los fluidos se deforman continuamente en respuesta. Suele decirse que *los fluidos no resisten un corte*.

### Cambio de volumen: módulo de volumen

Supongamos que una fuerza dirigida hacia adentro actúa sobre toda la superficie de un cuerpo (►figura 9.5). Semejante *esfuerzo de volumen* a menudo se aplica mediante presión transmitida por un fluido. Un esfuerzo de volumen comprime un material elástico; es decir, el material presenta un cambio de volumen, aunque no de forma general, en respuesta a un cambio de presión  $\Delta p$ . (La presión es fuerza por unidad de área, como veremos en la sección 9.2.) El cambio de presión es igual al esfuerzo de vo-



\*Véase la sección Aprender dibujando de la página 219.



▲ **FIGURA 9.4** Esfuerzo cortante y deformación *a)* Se produce un esfuerzo cortante cuando una fuerza se aplica tangencialmente a una superficie. *b)* La deformación se mide en términos del desplazamiento relativo de las caras del objeto, o del ángulo de corte  $\phi$ .

◀ **FIGURA 9.5** Esfuerzo y deformación de volumen *a)* Se aplica un esfuerzo de volumen cuando una fuerza normal actúa sobre toda una área superficial, como se muestra aquí con un cubo. Este tipo de esfuerzo ocurre más comúnmente en gases. *b)* La deformación resultante es un cambio



lumen, o bien,  $\Delta p = F/A$ . La *deformación de volumen* es la razón del cambio de volumen ( $\Delta V$ ) entre el volumen original ( $V_o$ ). Entonces, el **módulo de volumen ( $B$ )** es

$$B = \frac{F/A}{-\Delta V/V_o} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_o} \quad (9.6)$$

Unidad SI de módulo de volumen: newton sobre metro cuadrado ( $\text{N/m}^2$ )

Incluimos el signo menos para que  $B$  sea una cantidad positiva, ya que  $\Delta V = V - V_o$  es negativo cuando aumenta la presión externa (cuando  $\Delta p$  es positivo). Al igual que en las anteriores relaciones de módulos:  $\Delta V \propto 1/B$ .

En la tabla 9.1 se dan los módulos de volumen de sólidos y líquidos selectos. Los gases también tienen módulos de volumen, ya que pueden comprimirse. En el caso de los gases, es más común hablar del recíproco del módulo de volumen, llamado **compresibilidad ( $k$ )**:

$$k = \frac{1}{B} \quad (\text{compresibilidad de gases}) \quad (9.7)$$

Así, el cambio de volumen  $\Delta V$  es directamente proporcional a la compresibilidad  $k$ .

Los sólidos y los líquidos son relativamente incompresibles, por lo que sus valores de compresibilidad son pequeños. En cambio, los gases se comprimen fácilmente y sus valores de compresibilidad, que son altos, varían con la presión y la temperatura.

### Ejemplo 9.2 ■ Compresión de un líquido: esfuerzo de volumen y módulo de volumen

¿Qué cambio se requiere en la presión sobre un litro de agua para comprimirlo un 0.10 por ciento?

**Razonamiento.** Al igual que el cambio fraccionario de longitud,  $\Delta L/L_o$ , el cambio fraccionario de volumen está dado por  $-\Delta V/V_o$ , que puede expresarse como porcentaje. Así, obtenemos el cambio de presión con la ecuación 9.6. Una compresión implica  $\Delta V$  negativo.

**Solución.**

**Dado:**  $-\Delta V/V_o = 0.0010$  (o 0.10%)

**Encuentre:**  $\Delta p$

$V_o = 1.0 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$

$B_{\text{H}_2\text{O}} = 2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  (de la tabla 9.1)

Observe que  $-\Delta V/V_o$  es el cambio *fraccionario* de volumen. Dado que  $V_o = 1000 \text{ cm}^3$ , el cambio (la reducción) de volumen es

$$-\Delta V = 0.0010 V_o = 0.0010(1000 \text{ cm}^3) = 1.0 \text{ cm}^3$$

Sin embargo, no necesitamos el cambio de volumen. El cambio fraccionario, como se listó en los datos, se usa directamente en la ecuación 9.6 para calcular el aumento de presión:

$$\Delta p = B \left( \frac{-\Delta V}{V_o} \right) = (2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2)(0.0010) = 2.2 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

(Este incremento es unas 22 veces la presión atmosférica normal. No es muy compresible.)

**Ejercicio de refuerzo.** Si a medio litro de agua se aplica una presión adicional de  $1.0 \times 10^6 \text{ N/m}^2$  a la presión atmosférica, ¿qué cambio de volumen tendrá el agua?

## 9.2 Fluidos: presión y el principio de Pascal

**OBJETIVOS:** a) Explicar la relación profundidad-presión y b) plantear el principio de Pascal y describir su uso en aplicaciones prácticas.

Podemos aplicar una fuerza a un sólido en un punto de contacto, pero esto no funciona con los fluidos, pues éstos no resisten un corte. Con los fluidos, es preciso aplicar una fuerza sobre una área. Tal aplicación de fuerza se expresa en términos de **presión**: la *fuerza por unidad de área*:

$$p = \frac{F}{A} \quad (9.8a)$$

Unidad SI de presión: newton sobre metro cuadrado ( $\text{N/m}^2$ ) o pascal (Pa)

En esta ecuación, se entiende que la fuerza actúa de forma normal (perpendicular) a la superficie.  $F$  podría ser el componente perpendicular de una fuerza que actúa inclinada respecto a la superficie (►figura 9.6).

Como muestra la figura 9.6, en el caso más general deberíamos escribir:

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{F \cos \theta}{A} \quad (9.8b)$$

La presión es una cantidad escalar (sólo tiene magnitud) aunque la fuerza que la produce sea un vector.

Las unidades SI de presión son newtons sobre metro cuadrado ( $\text{N}/\text{m}^2$ ) o **pascal (Pa)** en honor del científico y filósofo francés Blaise Pascal (1623-1662), quien estudió los fluidos y la presión. Por definición,\*

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}/\text{m}^2$$

En el sistema inglés, una unidad común de presión es la libra por pulgada cuadrada ( $\text{lb}/\text{in}^2$  o psi). En aplicaciones especiales se utilizan otras unidades, que presentaremos más adelante. Antes de continuar, veamos un ejemplo “sólido” de la relación entre fuerza y presión.

### Ejemplo conceptual 9.3 ■ Fuerza y presión: una siesta en una cama de clavos

Suponga que usted se prepara para dormir la siesta y tiene la opción para elegir entre acostarse de espaldas en *a*) una cama de clavos, *b*) un piso de madera dura o *c*) un sofá. ¿Cuál escogería por comodidad y *por qué*?

**Razonamiento y respuesta.** La opción cómoda es obvia: el sofá. Sin embargo, la pregunta conceptual aquí es *por qué*.

Examinemos primero la posibilidad de acostarse en un lecho de clavos, un truco antiguo que se originó en la India y que solía presentarse en las ferias y otros espectáculos (véase la figura 9.27). En realidad no hay truco alguno, sólo física; a saber, fuerza y presión. Es la fuerza por unidad de área, la presión ( $p = F/A$ ), lo que determina si un clavo perforará la piel o no. La fuerza depende del peso de la persona que se acuesta en los clavos. El área depende del área *eficaz* de contacto entre los clavos y la piel (sin considerar la ropa de la persona).

Si sólo hubiera un clavo, éste no soportaría el peso de la persona y con tal área pequeña la presión sería muy grande, y en una situación así el clavo perforaría la piel. En cambio, cuando se usa un lecho de clavos, la misma fuerza (peso) se distribuye entre cientos de clavos, así que el área de contacto eficaz es relativamente grande, y la presión se reduce a un nivel en el que los clavos no perforan la piel.

Cuando nos acostamos en un piso de madera, el área en contacto con nuestro cuerpo es considerable y la presión se reduce, pero probablemente no nos sentiremos cómodos. Partes del cuerpo, como el cuello y la parte baja de la espalda, *no* están en contacto con la superficie, como lo estarían en un sofá blando, donde la presión es aún menor: Cuanto más baja sea la presión, mayor será la comodidad (la misma fuerza sobre una área más extensa). Por lo tanto, *c* es la respuesta.

**Ejercicio de refuerzo.** Mencione dos consideraciones importantes al construir una cama de clavos para acostarse en ella.

Hagamos ahora un breve repaso de la densidad, que es una consideración importante en el estudio de fluidos. En el capítulo 1 dijimos que la densidad ( $\rho$ ) de una sustancia se define como masa sobre *unidad* de volumen (ecuación 1.1):

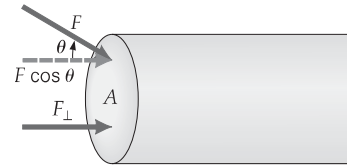
$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Unidad SI de densidad: kilogramo sobre metro cúbico ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )  
(unidad cgs común: gramo sobre centímetro cúbico,  $\text{g}/\text{cm}^3$ )

En la tabla 9.2 se da la densidad de algunas sustancias comunes.

\*Note que la unidad de presión es equivalente a la energía por volumen,  $\text{N}/\text{m}^2 = \text{N} \cdot \text{m}/\text{m}^3 = \text{J}/\text{m}^3$ , una densidad de energía.



$$p = \frac{F_{\perp}}{A} = \frac{F \cos \theta}{A}$$

▲ **FIGURA 9.6 Presión** La presión suele escribirse como  $p = F/A$ , y se sobreentiende que  $F$  es la fuerza o componente de fuerza normal a la superficie. En general, entonces,  $p = (F \cos \theta)/A$ .

A FONDO 9.1 LA OSTEOPOROSIS Y LA DENSIDAD MINERAL ÓSEA (DMO)

El hueso es un tejido vivo y en crecimiento. Nuestro cuerpo continuamente está absorbiendo los antiguos huesos (reabsorción) y fabricando nuevo tejido óseo. Durante los primeros años de vida, el crecimiento de los huesos es mayor que la pérdida. Este proceso continúa hasta que se alcanza el máximo de la masa ósea cuando se es un adulto joven. Después, el crecimiento de los huesos adquiere un ritmo más lento como resultado de la pérdida de masa ósea. Con la edad, los huesos, naturalmente, se vuelven menos densos y más débiles. La osteoporosis (que significa “huesos porosos”) ocurre cuando los huesos se deterioran hasta el punto en el que se fracturan con facilidad (figura 1).

La osteoporosis y la escasa masa ósea asociada con ella afectan a unos 24 millones de estadounidenses, la mayoría de los cuales son mujeres. La osteoporosis da por resultado un mayor riesgo de sufrir fracturas, particularmente en la cadera y la columna vertebral. Muchas mujeres toman complementos de calcio con la finalidad de prevenir esta condición.

Para entender cómo se mide la densidad ósea, primero veamos la distinción entre *hueso* y *tejido óseo*. El hueso es un material sólido compuesto de una proteína llamada matriz ósea, la mayor

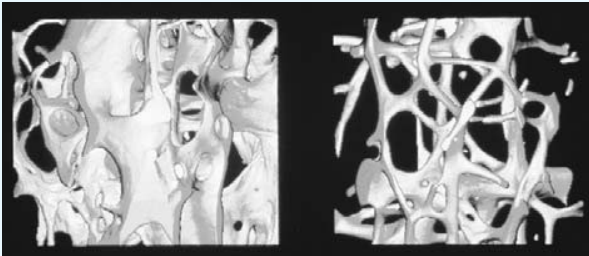
parte de la cual se ha calcificado. El tejido óseo incluye los espacios para la médula dentro de la matriz. (La médula es el tejido suave, adiposo y vascular en el interior de las cavidades óseas y es un sitio fundamental para la producción de células sanguíneas.) El volumen de la médula varía según el tipo de hueso.

Si el volumen de un hueso intacto se mide (por ejemplo, mediante el desplazamiento de agua), entonces, es posible calcular la *densidad del tejido óseo* —comúnmente en gramos por centímetro cúbico—, después de que el hueso se pesa para determinar su masa. Si se quema un hueso, se pesan las cenizas que quedan y se dividen entre el volumen del hueso total (tejido óseo), se obtiene la *densidad mineral del tejido óseo*, que comúnmente se conoce como **densidad mineral ósea (DMO)**.

Para medir la DMO de los huesos *en vivo*, se mide la transmisión de ciertos tipos de radiación a través del hueso, y el resultado se relaciona con la cantidad de mineral óseo presente. Además, se mide un área “proyectada” del hueso. Utilizando tales mediciones, se calcula una DMO proyectada o zonal en unidades de  $\text{mg}/\text{cm}^2$ . La figura 2 ilustra la magnitud del efecto de la pérdida de densidad ósea con la edad.

El diagnóstico de la osteoporosis se basa primordialmente en la medición de la DMO. La masa de un hueso, que se mide con una prueba de DMO (también conocida como *prueba de densitometría ósea*), por lo general se correlaciona con la fortaleza del hueso. Es posible predecir el riesgo de fracturas, de la misma forma como las mediciones de la presión sanguínea ayudan a predecir los riesgos de sufrir un infarto cerebral. La prueba de densidad ósea se recomienda a todas las mujeres de 65 años en adelante y a mujeres de menor edad con un alto riesgo de padecer osteoporosis. Esto también se aplica a los hombres. Con frecuencia se piensa que la osteoporosis es una enfermedad propia de las mujeres, pero el 20% de los casos de osteoporosis se presentan en hombres. Una prueba de DMO no predice con certeza la posibilidad de sufrir una fractura, sino que tan sólo predice el grado de riesgo.

Entonces, ¿cómo se mide la DMO? Aquí es donde la física entra en acción. Se emplean varios instrumentos, que se clasifican en *dispositivos centrales* y *dispositivos periféricos*. Los dispositivos centrales se utilizan principalmente para medir la densidad ósea de la cadera y la columna vertebral. Los dispositivos periféricos son

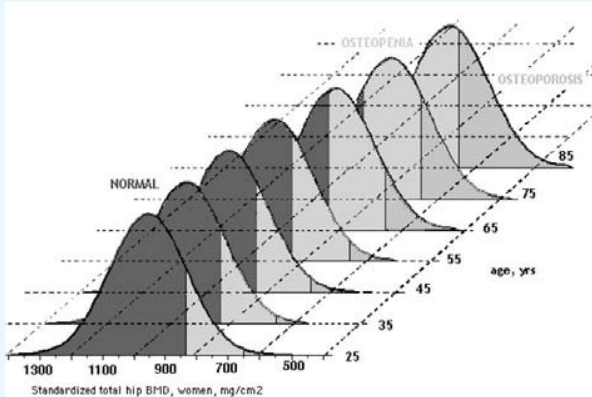


**FIGURA 1 Pérdida de masa ósea** Una micrografía de rayos X que muestra la estructura ósea de una vértebra de una persona de 50 años (izquierda) y una de 70 años (derecha). La osteoporosis, una condición caracterizada por el debilitamiento de los huesos provocado por la pérdida de masa ósea, es evidente en el caso de la vértebra de la derecha.

**TABLA 9.2** Densidad de algunas sustancias comunes (en  $\text{kg}/\text{m}^3$ )

Sólidos	Densidad ( $\rho$ )	Líquidos	Densidad ( $\rho$ )	Gases*	Densidad ( $\rho$ )
Aluminio	$2.7 \times 10^3$	Alcohol etílico	$0.79 \times 10^3$	Aire	1.29
Latón	$8.7 \times 10^3$	Alcohol metílico	$0.82 \times 10^3$	Helio	0.18
Cobre	$8.9 \times 10^3$	Sangre entera	$1.05 \times 10^3$	Hidrógeno	0.090
Vidrio	$2.6 \times 10^3$	Plasma sanguíneo	$1.03 \times 10^3$	Oxígeno	1.43
Oro	$19.3 \times 10^3$	Gasolina	$0.68 \times 10^3$	Vapor ( $100^\circ\text{C}$ )	0.63
Hielo	$0.92 \times 10^3$	Queroseno	$0.82 \times 10^3$		
Hierro (y acero)	$7.8 \times 10^3$ (valor general)	Mercurio	$13.6 \times 10^3$		
Plomo	$11.4 \times 10^3$	Agua de mar ( $4^\circ\text{C}$ )	$1.03 \times 10^3$		
Plata	$10.5 \times 10^3$	Agua dulce ( $4^\circ\text{C}$ )	$1.00 \times 10^3$		
Madera, roble	$0.81 \times 10^3$				

\*A  $0^\circ\text{C}$  y 1 atm, a menos que se especifique otra cosa.



**FIGURA 2 Pérdida de densidad ósea con la edad** Una ilustración de cómo se incrementa, con la edad, la pérdida normal de densidad ósea en el hueso de la cadera de una mujer (escala de la derecha). La osteopenia se refiere a la calcificación o densidad ósea decreciente. Una persona con osteopenia está en riesgo de desarrollar osteoporosis, una condición que provoca que los huesos se vuelvan quebradizos y proclives a fracturarse.

más pequeños; se trata de máquinas portátiles que se emplean para medir la densidad ósea en lugares tales como los talones o los dedos.

El dispositivo central de uso más difundido se basa en la *absorciometría de energía dual de rayos X* (DXA), que utiliza imágenes de rayos X para medir la densidad ósea. (Véase la sección 20.4 para una explicación de los rayos X.) El escáner DXA produce dos haces de rayos X de diferentes niveles de energía. La cantidad de rayos X que pasan a través de un hueso se mide para cada haz; estas cantidades varían de acuerdo con la densidad del hueso. La densidad ósea calculada se basa en la diferencia entre los dos haces. El procedimiento no es invasivo, tarda entre 10 y 20 minutos, y la

exposición a los rayos X por lo general es de una décima parte de la que implica una radiografía del tórax (figura 3).

Un dispositivo periférico común utiliza *ultrasonido cuantitativo* (QUS, por las siglas de *quantitative ultrasound*). En vez de rayos X, la proyección de la densidad ósea se realiza mediante ondas sonoras de alta frecuencia (ultrasonido). Las mediciones de QUS generalmente se realizan en el talón. La prueba toma apenas uno o dos minutos, y los dispositivos para realizarla ahora se venden en algunas farmacias. Su objetivo es indicar si una persona está “en riesgo”, y si necesita someterse a una prueba DXA.



**FIGURA 3 Prueba de osteoporosis mediante escáner** Una especialista realiza un análisis de los huesos mediante rayos X en una paciente mayor, para determinar si padece osteoporosis. Las imágenes de rayos X se despliegan en el monitor. Las imágenes podrían confirmar la presencia de osteoporosis. Además, tales pruebas de densitometría ósea sirven para diagnosticar raquitismo, una enfermedad infantil caracterizada por el reblandecimiento de los huesos.

El agua tiene una densidad de  $1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  ( $1.00 \text{ g/cm}^3$ ), por la definición original de kilogramo (capítulo 1). El mercurio tiene una densidad de  $13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  ( $13.6 \text{ g/cm}^3$ ). Por lo tanto, el mercurio es 13.6 veces más denso que el agua. La gasolina, en cambio, es menos densa que el agua. (Véase la tabla 9.2.) (Nota: no confunda el símbolo de densidad,  $\rho$  [letra griega rho], con el de presión,  $p$ .)

**Nota:**  $p \neq \rho$

Decimos que la densidad es una medida de qué tan compacta es la materia de una sustancia: cuanto más alta sea la densidad, más materia o masa habrá en un volumen dado. Note que la densidad cuantifica la cantidad de masa por unidad de volumen. Para una consideración importante acerca de la densidad, véase la sección A fondo 9.1 sobre la osteoporosis y la densidad mineral ósea (DMO).

## Presión y profundidad

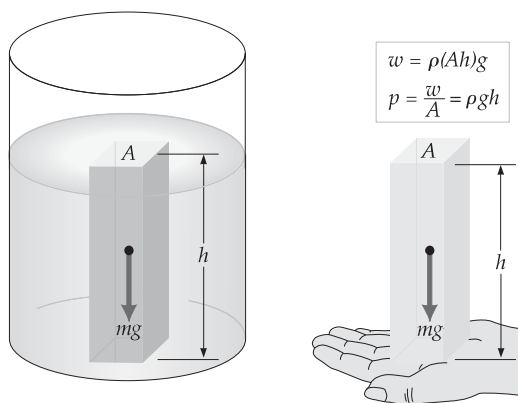
Si el lector ha buceado, sabe bien que la presión aumenta con la profundidad, y ha sentido el aumento de presión en los tímpanos. Sentimos un efecto opuesto cuando viajamos en un avión o subimos una montaña en automóvil. Al aumentar la altitud, quizá sintamos que los oídos quieren “reventarse”, por la *reducción* en la presión externa del aire.

La forma en que la presión en un fluido varía con la profundidad se demuestra considerando un recipiente de líquido en reposo. Imaginemos que aislamos una co-



## ► FIGURA 9.7 Presión y profundidad

La presión adicional a una profundidad  $h$  en un líquido se debe al peso del líquido que está arriba:  $p = \rho gh$ , donde  $\rho$  es la densidad del líquido (que suponemos constante). Esto se ilustra para una columna rectangular imaginaria de líquido.



columna rectangular de agua, como se muestra en la [figura 9.7](#). Entonces, la fuerza sobre el fondo del recipiente bajo la columna (o sobre la mano) es igual al peso del líquido que constituye la columna:  $F = w = mg$ . Puesto que la densidad es  $\rho = m/V$ , la masa de la columna es igual a la densidad multiplicada por el volumen; es decir,  $m = \rho V$ . (Suponemos que el líquido es incompresible, así que  $\rho$  es constante.)

El volumen de la columna aislada de líquido es igual a la altura de la columna multiplicada por el área de su base, o bien,  $V = hA$ . Por lo tanto, escribimos

$$F = w = mg = \rho Vg = \rho ghA$$

Como  $p = F/A$ , la presión a una profundidad  $h$ , debida al peso de la columna, es

$$p = \rho gh \quad (9.9)$$

Éste es un resultado general para líquidos incompresibles. La presión es la misma en todos los puntos de un plano horizontal a una profundidad  $h$  (si  $\rho$  y  $g$  son constantes). Observe que la ecuación 9.9 es independiente del área de la base de la columna rectangular: podríamos tomar toda la columna cilíndrica del líquido en el recipiente de la figura 9.7 y obtendríamos el mismo resultado.

Al deducir la ecuación 9.9 no tomamos en cuenta la aplicación de una presión a la superficie abierta del líquido. Este factor se suma a la presión a una profundidad  $h$  para dar una presión *total* de

$$p = p_o + \rho gh \quad \begin{array}{l} \text{(líquido incompresible} \\ \text{de densidad constante)} \end{array} \quad (9.10)$$

donde  $p_o$  es la presión aplicada a la superficie del líquido (es decir, la presión en  $h = 0$ ). En el caso de un recipiente abierto,  $p_o = p_a$  (la presión atmosférica), es decir, el peso (fuerza) por unidad de área de los gases atmosféricos que están arriba de la superficie del líquido. La presión atmosférica media en el nivel del mar se utiliza también como unidad, llamada **atmósfera (atm)**:

$$1 \text{ atm} = 101.325 \text{ kPa} = 1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \approx 14.7 \text{ lb/in}^2$$

Más adelante describiremos cómo se mide la presión atmosférica.

## Ejemplo 9.4 ■ Buzo: presión y fuerza

a) ¿Cuál es la presión total sobre la espalda de un buzo en un lago a una profundidad de 8.00 m? b) Determine la fuerza aplicada a la espalda del buzo únicamente por el agua, tomando la superficie de la espalda como un rectángulo de  $60.0 \times 50.0$  cm.

**Razonamiento.** a) Ésta es una aplicación directa de la ecuación 9.10, en la cual  $p_o$  se toma como la presión atmosférica  $p_a$ . b) Si conocemos el área y la presión debida al agua, calculamos la fuerza por la definición de presión,  $p = F/A$ .

**Solución.**

**Dado:**  $h = 8.00 \text{ m}$

$$A = 60.0 \text{ cm} \times 50.0 \text{ cm}$$

$$= 0.600 \text{ m} \times 0.500 \text{ m} = 0.300 \text{ m}^2$$

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ (de la tabla 9.2)}$$

$$p_a = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

**Encuentre:** a)  $p$  (presión total)

b)  $F$  (fuerza debida al agua)



Ilustración 14.1 Presión en un líquido

Relación presión-profundidad

a) La presión total es la suma de la presión debida al agua y a la presión atmosférica ( $p_a$ ). Por la ecuación 9.10, esto es

$$\begin{aligned} p &= p_a + \rho gh \\ &= (1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2) + (1.00 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2)(8.00 \text{ m}) \\ &= (1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2) + (0.784 \times 10^5 \text{ N/m}^2) = 1.79 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \text{ (o Pa)} \\ &\quad \text{(expresada en atmósferas)} \approx 1.8 \text{ atm} \end{aligned}$$

También ésta es la presión en los tímpanos del buzo.

b) La presión  $p_{\text{H}_2\text{O}}$  debida sólo al agua es la porción  $\rho gh$  de la ecuación anterior, así que  $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0.784 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ .

Entonces,  $p_{\text{H}_2\text{O}} = F/A$ , y

$$\begin{aligned} F &= p_{\text{H}_2\text{O}} A = (0.784 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(0.300 \text{ m}^2) \\ &= 2.35 \times 10^4 \text{ N (o } 5.29 \times 10^3 \text{ lb ¡unas 2.6 toneladas!)} \end{aligned}$$

**Ejercicio de refuerzo.** La respuesta al inciso b de este ejemplo quizás haga dudar al lector. ¿Cómo puede el buzo aguantar semejante fuerza? Para entender mejor las fuerzas que el cuerpo puede resistir, calcule la fuerza que actúa sobre la espalda del buzo en la superficie del agua (debida únicamente a la presión atmosférica). ¿Cómo supone que el cuerpo pueda soportar tales fuerzas o presiones?

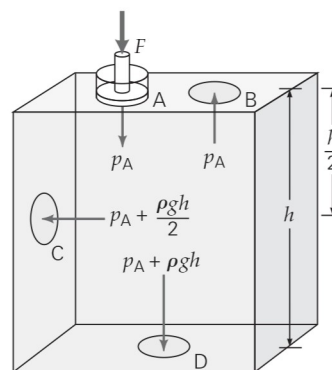
## Principio de Pascal

Cuando se incrementa la presión (digamos, la del aire) sobre toda la superficie abierta de un líquido incompresible en reposo, la presión en cualquier punto del líquido o en las superficies limitrofes aumenta en la misma cantidad. El efecto es el mismo si se aplica presión con un pistón a cualquier superficie de un fluido encerrado (figura 9.8). Pascal estudió la transmisión de la presión en fluidos, y el efecto que se observa se denomina **principio de Pascal**:

La presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin pérdida a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente.

En el caso de un líquido incompresible, el cambio de presión se transmite de forma prácticamente instantánea. En el caso de un gas, un cambio de presión por lo general va acompañado de un cambio de volumen o de temperatura (o de ambos); pero, una vez que se ha reestablecido el equilibrio, es válido el principio de Pascal.

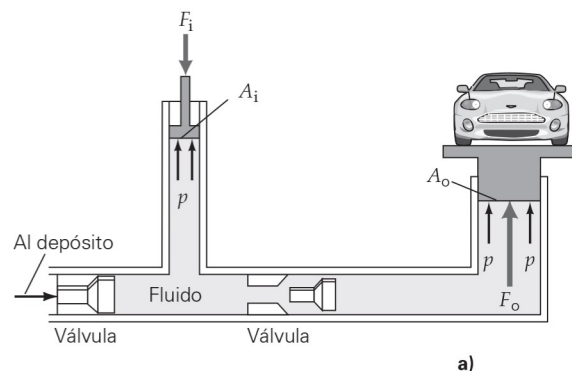
Entre las aplicaciones prácticas más comunes del principio de Pascal están los sistemas de frenos hidráulicos de los automóviles. Al pisar el pedal del freno, se transmite una fuerza a través de delgados tubos llenos de líquido hasta los cilindros de frenado de las ruedas. Asimismo, se usan elevadores y gatos hidráulicos para levantar automóviles y otros objetos pesados (figura 9.9).



▲ FIGURA 9.8 Principio de Pascal

La presión aplicada en el punto A se transmite completamente a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente. También hay presión debida al peso del fluido que está arriba de un punto dado a diferentes profundidades (por ejemplo,  $\rho gh/2$  en C y  $\rho gh$  en D).

▼ FIGURA 9.9 Elevador y amortiguador hidráulicos a) Dado que las presiones de entrada y de salida son iguales (principio de Pascal), una fuerza pequeña de entrada origina una fuerza grande de salida, en proporción al cociente de las áreas de los pistones. b) Vista expuesta simplificada de un tipo de amortiguador. (Véase la descripción en el ejercicio de refuerzo 9.5.)



$$F_o = \left( \frac{A_o}{A_i} \right) F_i$$

