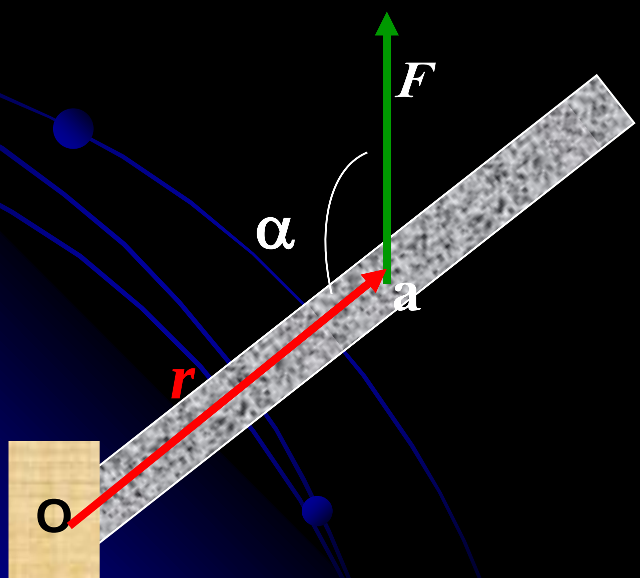
Dinámica del cuerpo rígido

- TORQUE
- MOMENTOS DE INERCIA
- MOMENTUM ANGULAR
- LEY DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA
- LEY DE CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR
- MOVIMIENTOS DE ROTACION Y TRASLACION

TORQUE DE UNA FUERZA

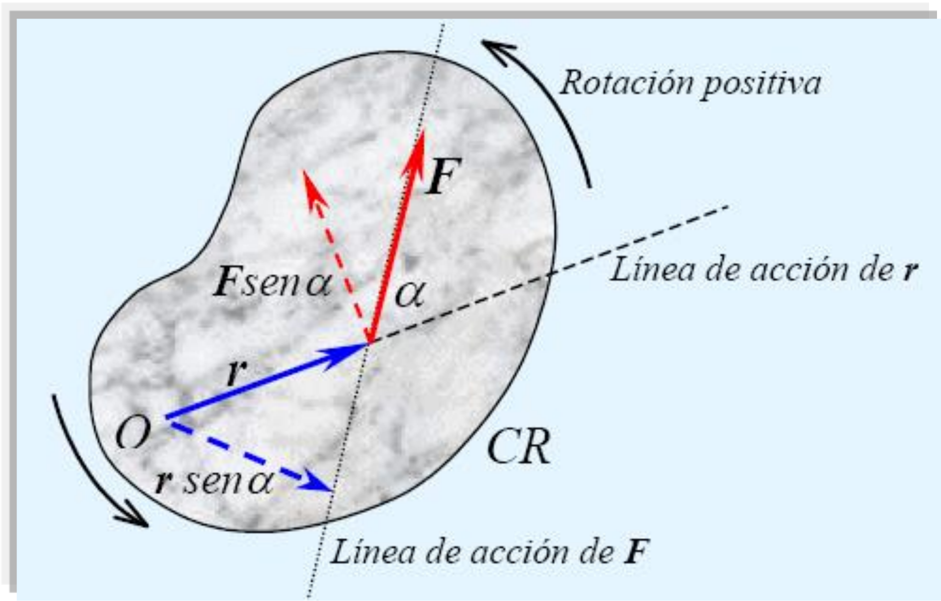
Se **F** una fuerza que actúa sobre algún punto del cuerpo rígido, en una posición r respecto a cualquier origen *O*. Al aplicar dicha fuerza sobre el cuerpo rígido este tiende realizar un movimiento de rotación en torno a algún eje.

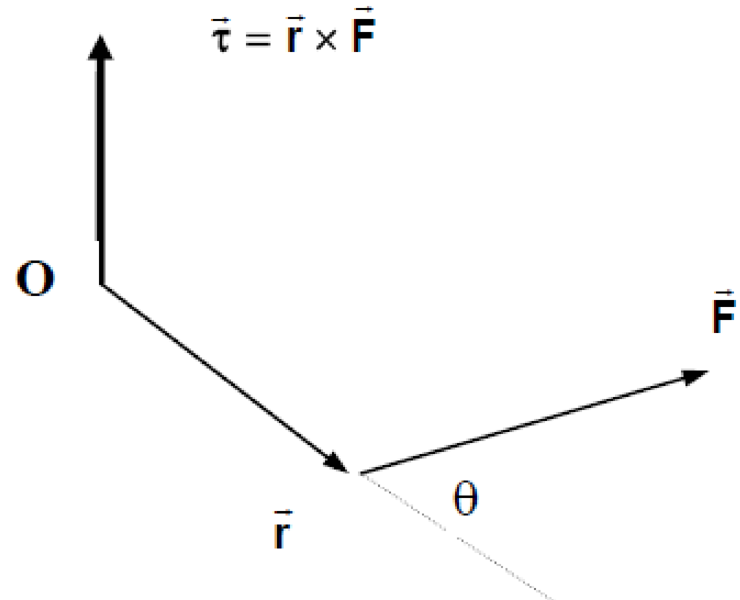
La propiedad de la fuerza para lograr este efecto se mide con la magnitud física llamada TORQUE (τ) que no es más que el producto vectorial entre el vector de posición de la fuerza y la fuerza aplicada.



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r(F sen\alpha)$$





De acuerdo a la definición de producto cruz en álgebra de vectores sabemos que:

1.- el módulo del vector resultante se determina como el producto entre los módulos de los vectores participantes y el seno del ángulo que forman dichos vectores **(r. F. sen θ)** .

2.- el sentido lo da la regla del tirabuzon o de la mano derecha.

3.- si se tienen las componentes del vector, se puede obtener el vector torque sencillamente haciendo el determinante.

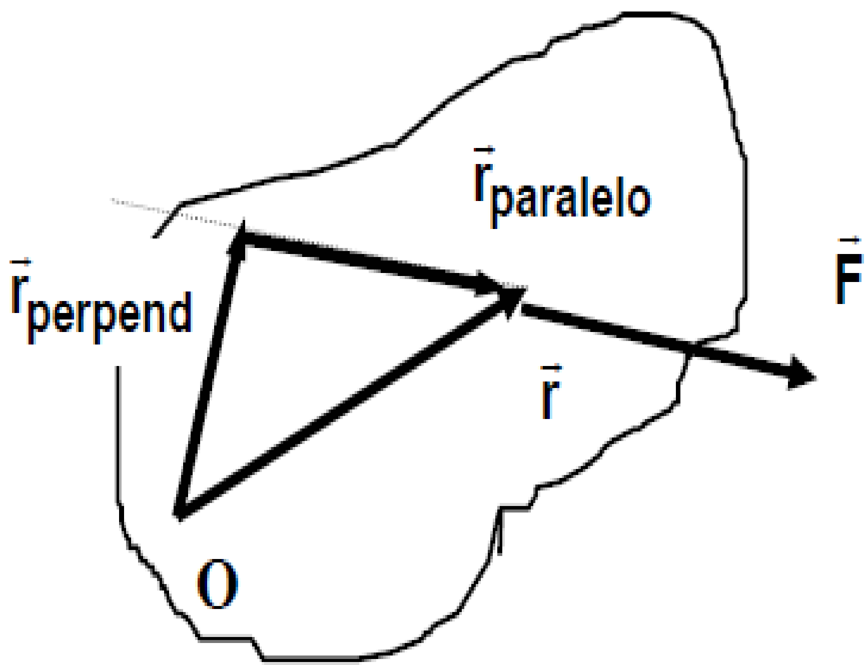
En algunas ocasiones **conviene descomponer el vector** $\vec{r}$ en un vector paralelo y en otro perpendicular al vector fuerza de modo que:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{perpend}} + \vec{r} \times \vec{F}_{\text{paralelo}}$$

donde sólo el producto cruz de la fuerza paralela se hace cero ya que se trata de dos vectores colineales, luego el seno es cero.

Luego el resultado es:

$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}_{\text{perpendicular}}$$



Nuestro interés es estudiar la rotación de un cuerpo rígido, en especial el movimiento de rotación en el cual el cuerpo rígido rota respecto de un eje fijo.

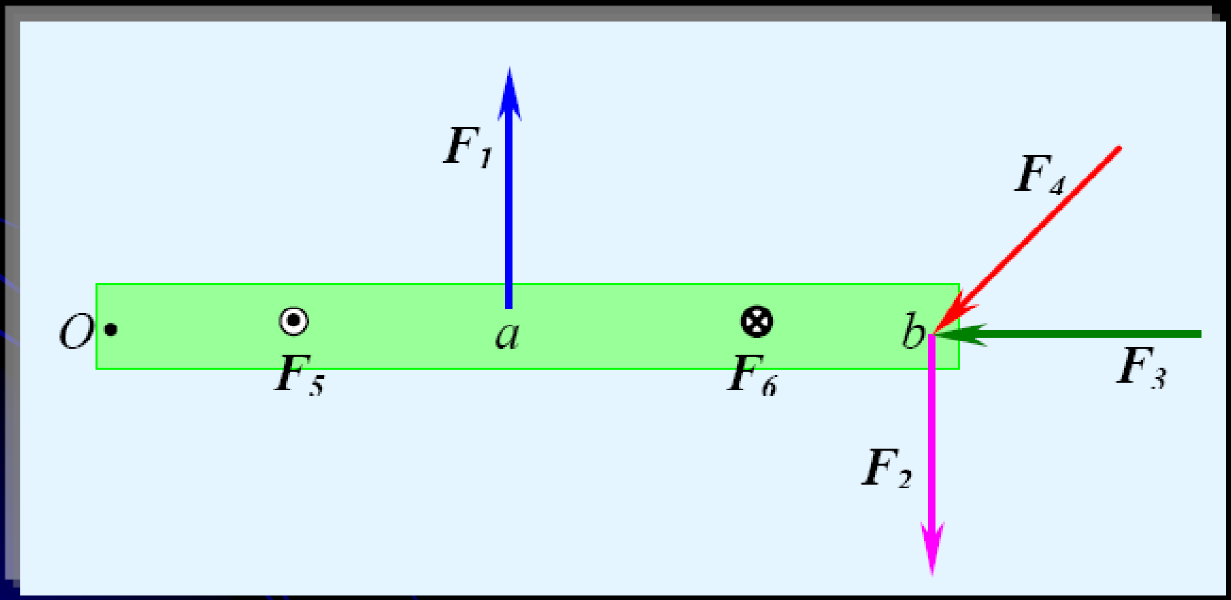
Al aplicar un torque a ese cuerpo, sólo la componente paralela al eje produce cambios en el movimiento de rotación. Las otras componentes, si es que existen, son anuladas por momentos ejercidos por el mismo eje sobre el cuerpo. Entonces el torque neto tendrá una sola componente, ya sea en el eje x, en el eje y ó en el eje z, dependiendo en que plano actúen las fuerzas.

Además, para el caso en que la fuerza **F** se aplique sobre una partícula de vector posición *r* respecto de un punto fijo 0, el torque es de la misma forma dada anteriormente, es decir:

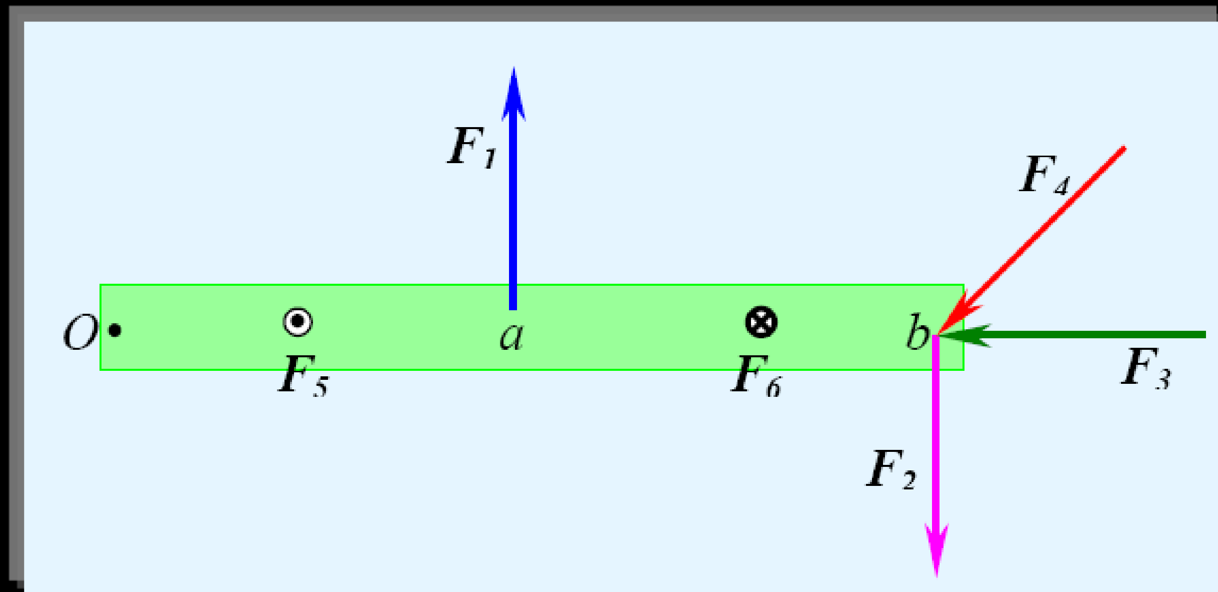
$$\vec{\tau}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

Analicemos el efecto que produce una fuerza **F** que actúa sobre la barra:

Si la fuerza se aplica de modo que su línea de acción no pasa por O, el efecto que se produce es el de una rotación del cuerpo alrededor de O.
La experiencia cotidiana, nos indica que la rotación que produce **F** será tanto más efectiva mientras más lejos del punto O se aplique la fuerza y mientras más cercano a 90º
sea el ángulo θ que forman los vectores posición y fuerza.



$$\tau = r(F\,sen\,\alpha)$$



F_1 **produce una rotación en sentido antihorario.**

F_2 **produce una rotación en sentido horario.**

F_3 **NO produce una rotación.** α **= 180° entonces** ***F sen*** α ***=0***

F_4 **produce una rotación en sentido antihorario, con menor rapidez que la Producida por** F_2

F_5 **y** F_6 **NO producen rotación ya que el ángulo** α**=90° entonces** ***F sen*** α ***=0***

$F\ sen\ \alpha$ **es la componente de** F **perpendicular a** ***r*****, SOLO ESTA COMPONENTE REALIZA TORQUE.**

Calcular el torque producido por una fuerza F= (*3i – 2j + 4k*) N que se aplica a un objeto en la posición r = (*6i + 3j*) m

$$\vec{\tau}_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{\tau} = \hat{i}\left(yF_z - zF_y\right) - \hat{j}\left(xF_z - zF_x\right) + \hat{k}\left(xF_y - yF_x\right)$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

=

$\hat{i}$ [redacted]

[redacted] $y \quad z$

$F_y \quad F_z$

=

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 6 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

=

$$\vec{\tau} = 12\hat{i} - 24\hat{j} - 21\hat{k} \; Nm$$

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO

Para que un cuerpo rígido este en equilibrio estático se deben cumplir dos requisitos simultáneamente, llamados *condiciones de equilibrio.* La primera condición de equilibrio es la Primera Ley de Newton, que garantiza el equilibrio de traslación. La segunda condición de equilibrio, corresponde al equilibrio de rotación, se enuncia de la siguiente forma: “la suma vectorial de todos los torques externos que actúan sobre un cuerpo rígido alrededor de cualquier origen es cero”. Esto se traduce en las siguientes dos ecuaciones, consideradas como las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

- *1ª condición de equilibrio:*

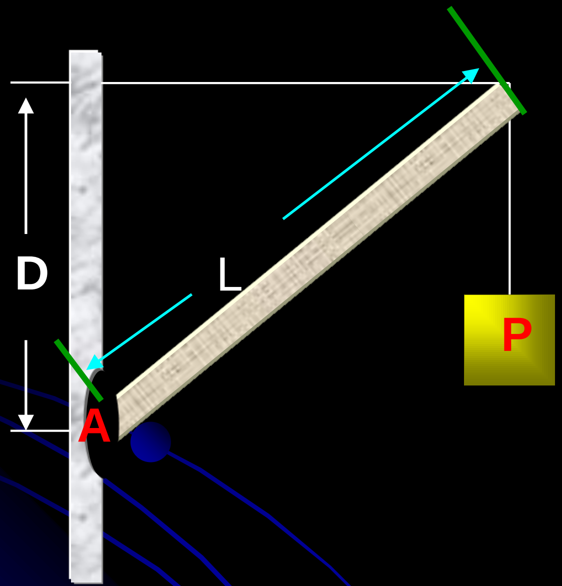
$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = 0$$

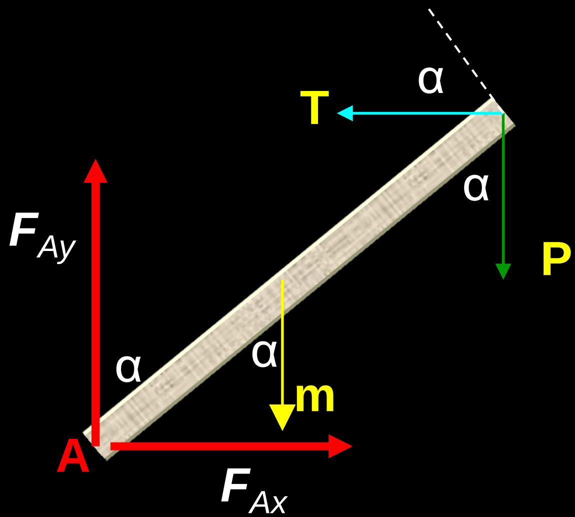
2ª condición de equilibrio:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \cdots + \vec{\tau}_n = 0$$

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum \tau = 0$$

Ejemplo **: una barra uniforme de longitud L y peso m está articulada en una pared. Un alambre fijo en la pared a una distancia d sobre la articulación sujeta a la barra por el otro extremo. El alambre permanece horizontal cuando se cuelga un cuerpo de peso p en el extremo libre de la barra.** ***Calcular la tensión del alambre y la fuerza de reacción en la articulación de la barra.***



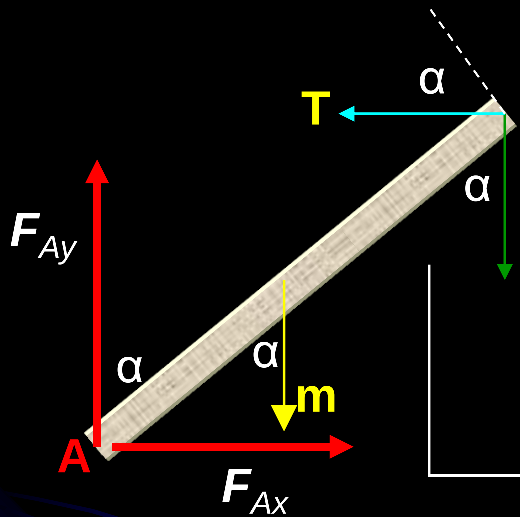


Se elige como eje de rotación la articulación de la barra en la pared, en el punto A, se identifican las fuerzas que actúan sobre la barra, se dibuja el Diagrama de cuerpo libre de la barra y se aplican las condiciones de equilibrio.

1ª condición de equilibrio:

$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \;\; y \;\; \sum F_y = 0$$

eje x: $F_{Ax} - T = 0$ (1)
eje y: $F_{Ay} - P - m = 0$ (2)



2ª condición de equilibrio:

$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \tau_T + \tau_p + \tau_P = 0$$

$$T \cos\alpha \; L - msen\alpha \left(\tfrac{L}{2}\right) - Psen\alpha(L) = 0 \qquad (3)$$

$$\cos\alpha = \frac{D}{L}, \quad sen\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - D^2}}{L}$$

que se reemplazan en (3), luego se despeja *T:*

$$T \cos\alpha L = msen\alpha\left(\tfrac{L}{2}\right) + Psen\alpha L$$

$$T = \frac{m\frac{\sqrt{L^2-D^2}}{L}\left(\frac{L}{2}\right) + P\frac{\sqrt{L^2-D^2}}{L}L}{\frac{D}{L}}$$

$$T = \frac{\left(P + \frac{m}{2}\right)\sqrt{L^2 - D^2}}{d}, \quad \text{donde } \mathrm{d} = \tfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{L}}$$

Ahora se calculan F_{Ax} y F_{Ay} de las ecuaciones (1) y (2).

$$F_{Ax} = T = \frac{\left(P + \frac{m}{2}\right)\sqrt{L^2 - D^2}}{d}$$

$$\boldsymbol{F_{Ay} = P + m}$$

Cuerpo rígido:

Es un cuerpo cuyas partes (partículas que lo forman) tienen posiciones relativas fijas entre sí y cuando este se somete a fuerzas externas, las posiciones relativas de cada una de sus componentes NO varía, es decir es no deformable.

Centro de masa:

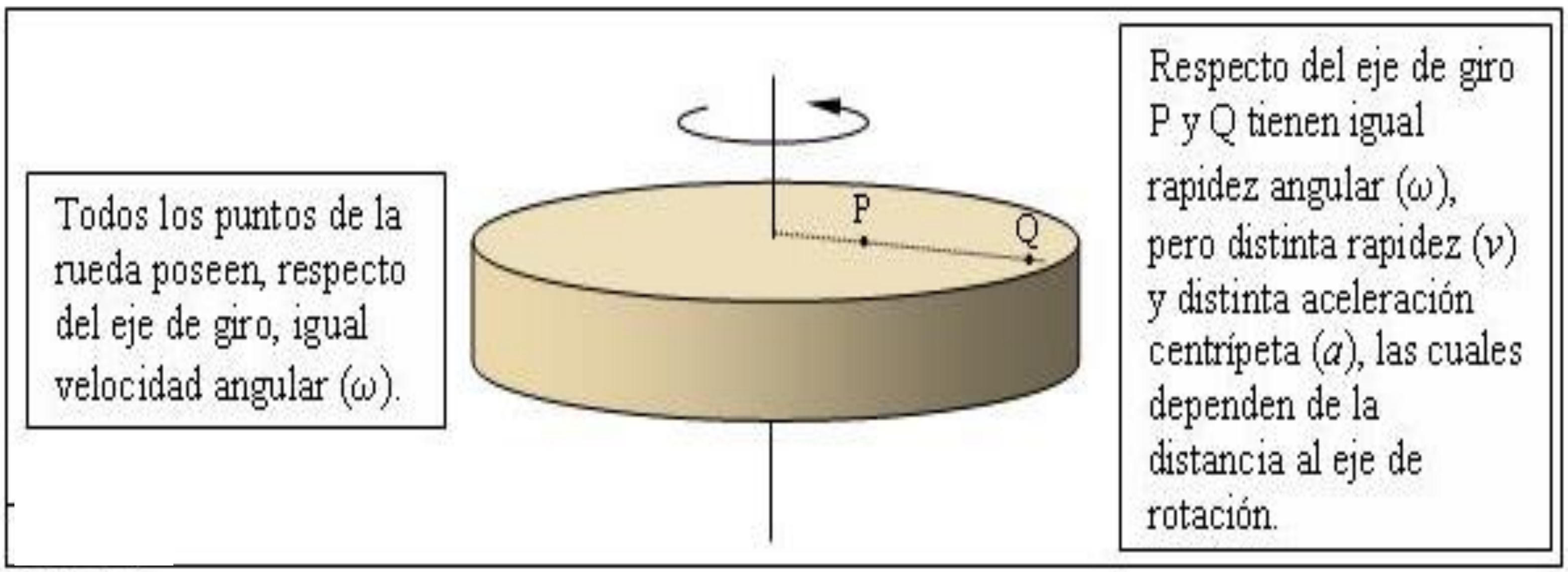
Es la posición GEOMÉTRICA de un cuerpo rígido donde se puede considerar concentrada toda la masa, corresponde a la posición promedio de todas las partículas de masa que forman el cuerpo rígido. El centro de masa de cualquier objeto simétrico homogéneo, se ubica sobre un eje de simetría.

Centro de gravedad:

Es la posición donde se puede considerar actuando la fuerza de gravedad neta, es el punto ubicado en la posición promedio donde se concentra el peso total del cuerpo.
Para un objeto simétrico homogéneo el centro de gravedad se encuentra en el centro geométrico, pero no para un objeto irregular.

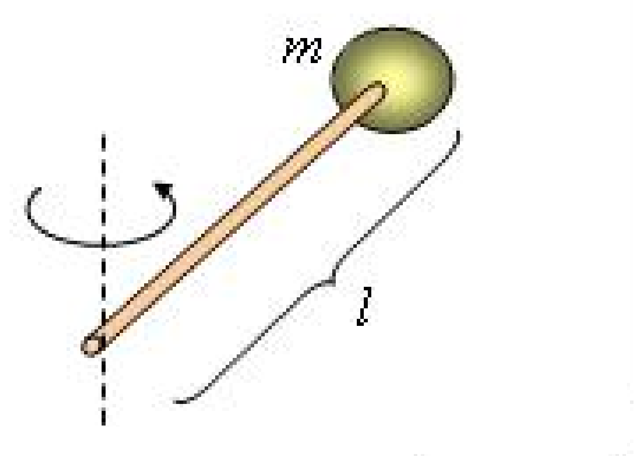
Para casi todos los cuerpos que se encuentran cerca de la superficie terrestre, el centro de masa ES EQUIVALENTE al centro de gravedad.

Cuando un disco sólido, por ejemplo una rueda, gira en relación a un eje, hablaremos de *rotación*. Debes notar que en estos casos cada punto del disco posee un movimiento circunferencial en relación al eje de giro. Mientras todos los puntos poseen la misma rapidez angular, solo poseen igual rapidez y aceleración los que se encuentran a igual distancia del eje de giro.



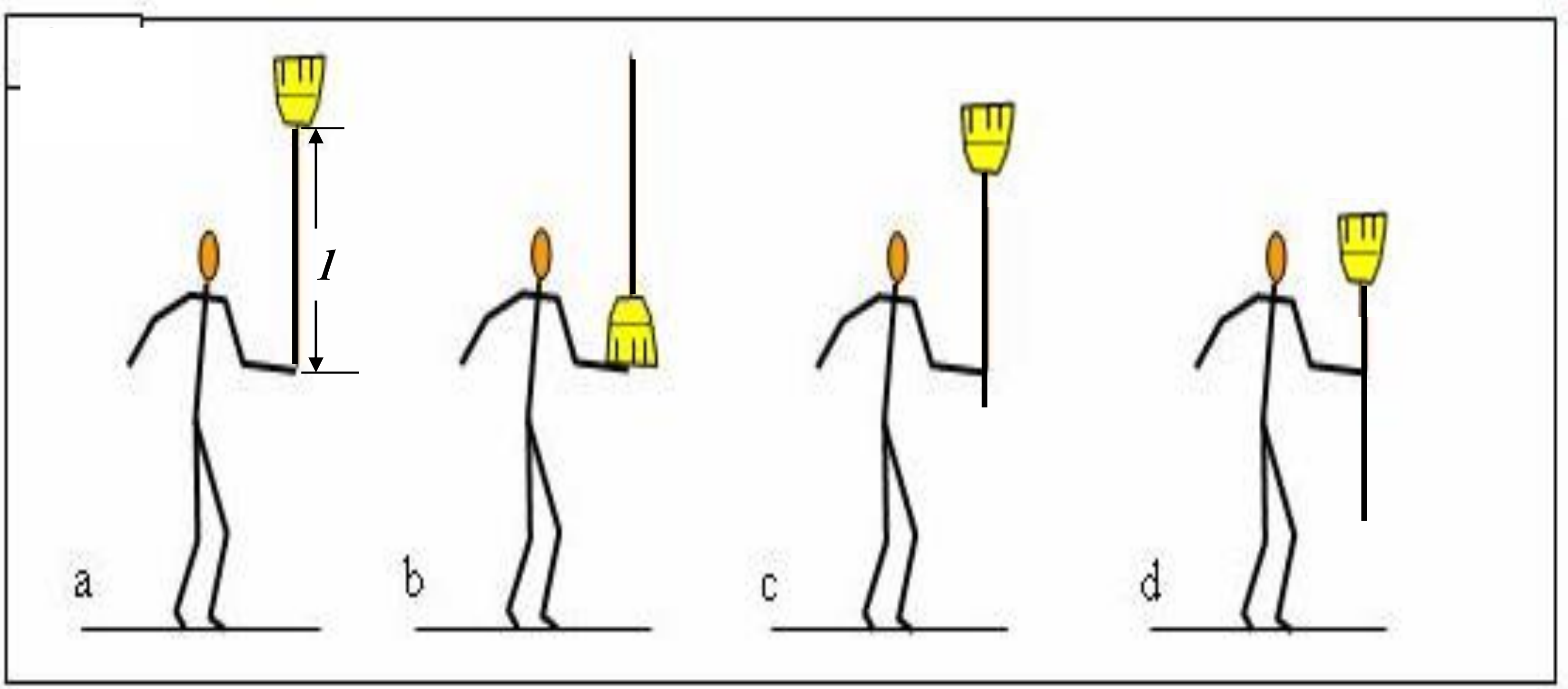
El concepto de masa expresa la dificultad que presenta un objeto para que una fuerza modifique su estado de movimiento. Mientras más masa posea un objeto, mayor fuerza debemos aplicar para que al trasladarlo alcance cierta rapidez, o bien para detenerlo o también para desviar su trayectoria. Para hacer girar un cuerpo alrededor de un cierto eje ocurre algo similar.

Para el caso simple de una masa m situada en el extremo de una varilla de largo l, el momento de inercia corresponde, por definición, a $I = ml^2$, si el eje de giro es el que se indica en la figura. Por razones de simplicidad suponemos despreciable la masa de la varilla.



Mientras más larga sea la varilla; es decir, a mayor *l*, mayor es su momento de inercia o, dicho de otro modo, mientras más alejada se encuentre la masa del eje de giro, mayor será el valor de *I*.

Esto tiene algunas aplicaciones, por ejemplo, una escoba con un dedo, como se ilustra en la figura. ¿En cuál de los siguientes casos resulta más difícil mantener una varilla en equilibrio?



Entre los casos *a* y *b*, es más fácil mantener el equilibrio de la escoba en el caso *a*.

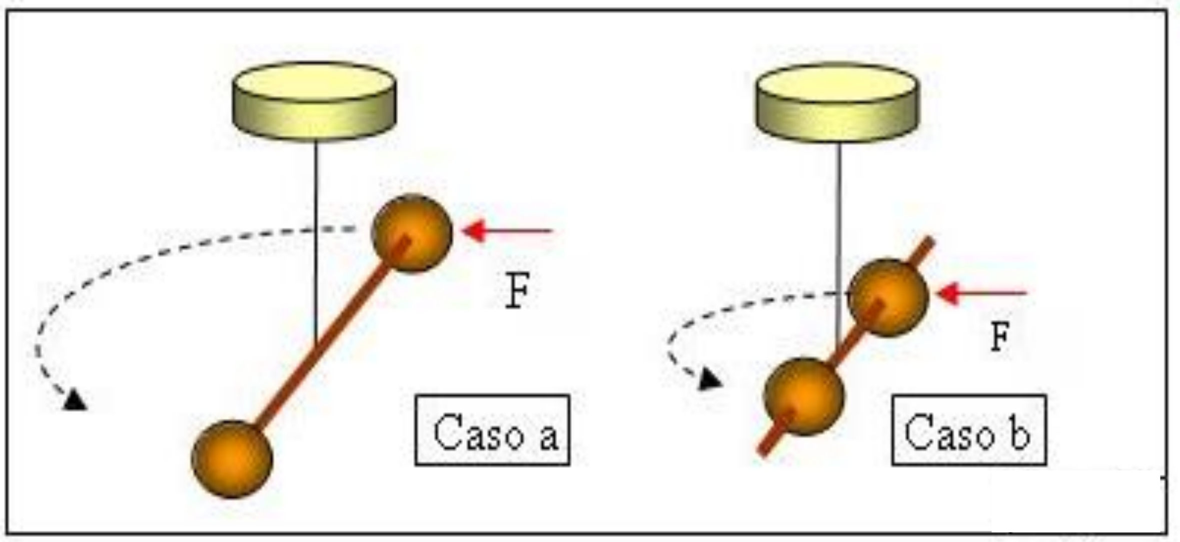
Entre los casos *c* y *d* es más fácil equilibrar la varilla más larga.

Esto ocurre porque en relación al eje de giro (la mano de la persona) el momento de inercia es mayor en *a* que en *b* y mayor en *c* que en *d*. Por otra parte, en *a* es más fácil que en *c*, pues hay más masa lejos del eje de giro.

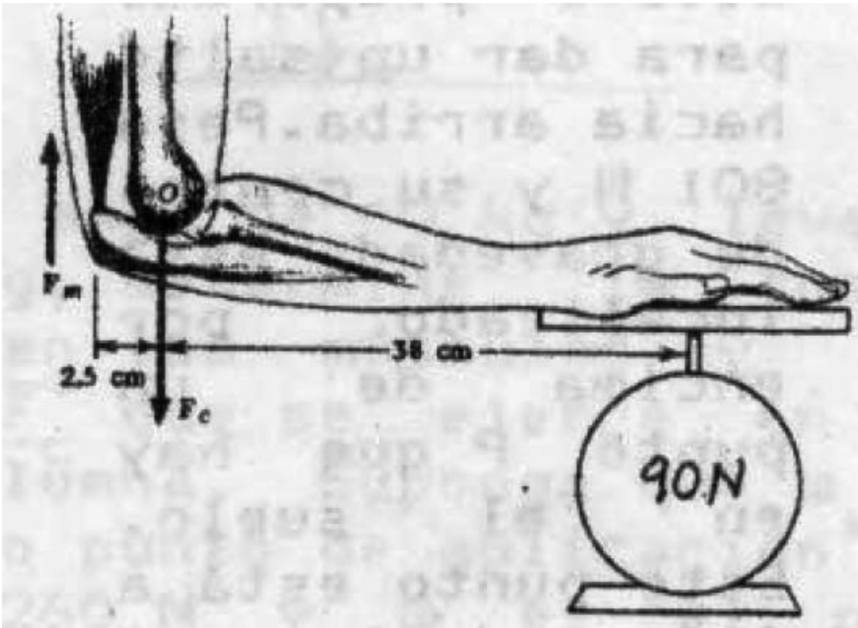
Otra situación en que un gran momento de inercia resulta de utilidad, es el caso del equilibrista en la cuerda floja (figura 10), quien sostiene entre sus manos una larga varilla.

Literalmente se está sujetando de ella, pues presenta un gran momento de inercia.

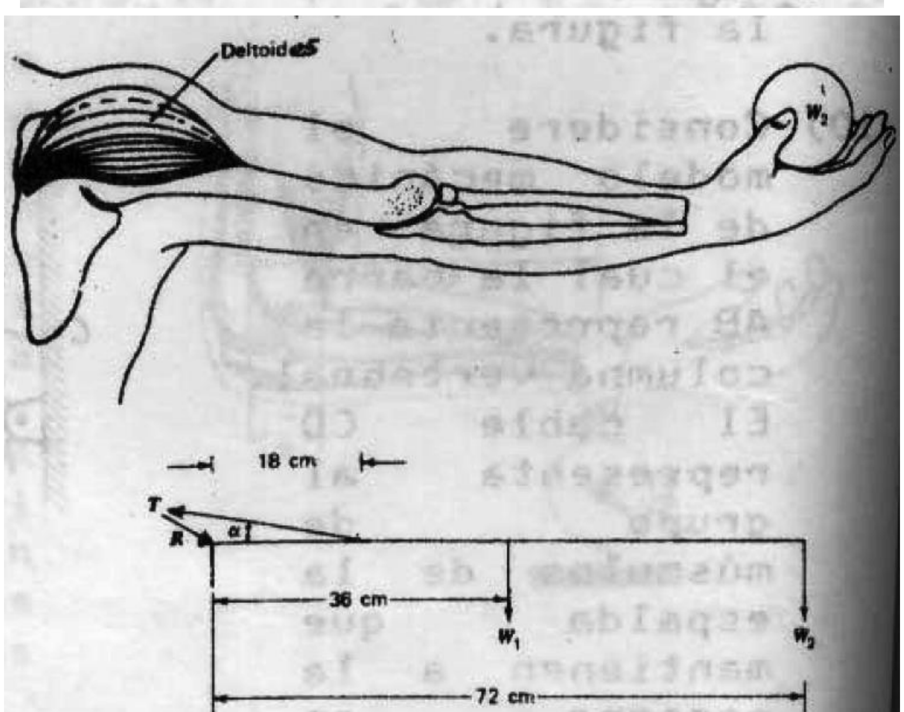
¿En cuál de los dos casos (*a* o *b*) el sistema posee un mayor momento de inercia?



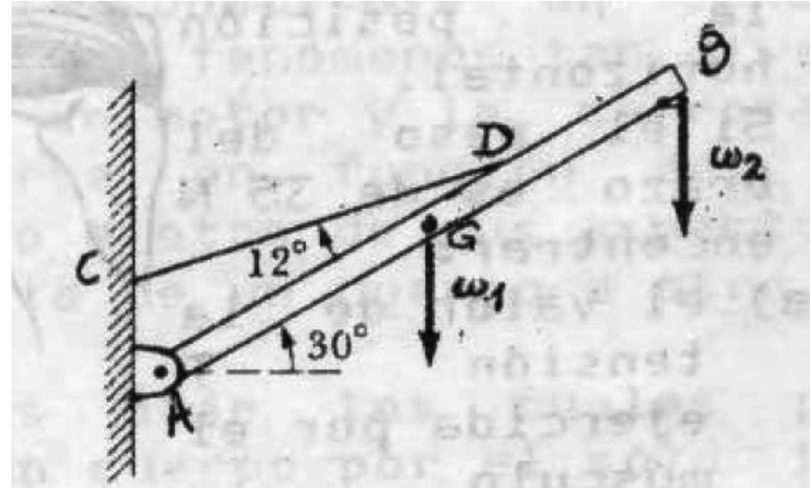
En ambos casos la masa del sistema es la misma, pero ella está distribuida de distinta manera. En el caso *a* la masa está más alejada del eje de giro y por tanto allí el momento de inercia es mayor. Al aplicar en ambos casos un torque que saque del reposo el sistema, constataremos que en el caso *b* el sistema opone menos dificultad para rotar.



F_m
O
2.5 cm
38 cm
F_c
90N

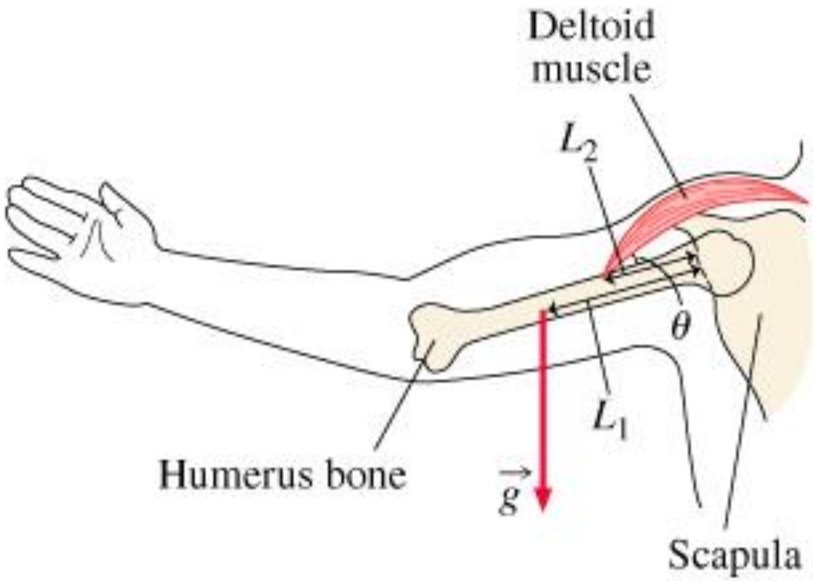


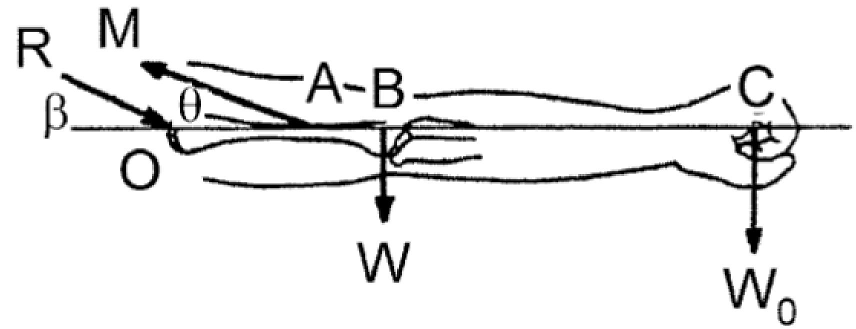
Deltoides
W_2
18 cm
T
R
α
36 cm
W_1
W_2
72 cm

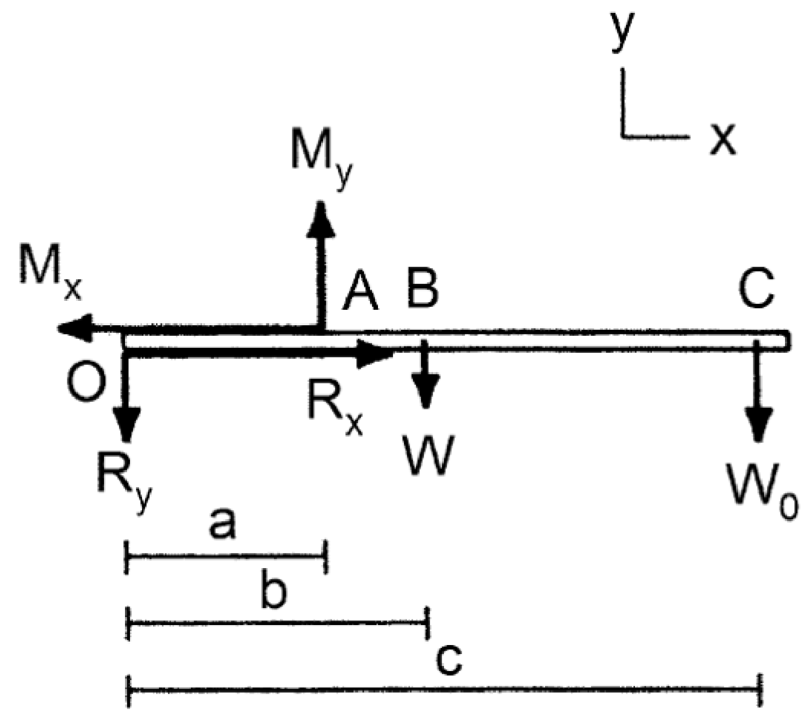


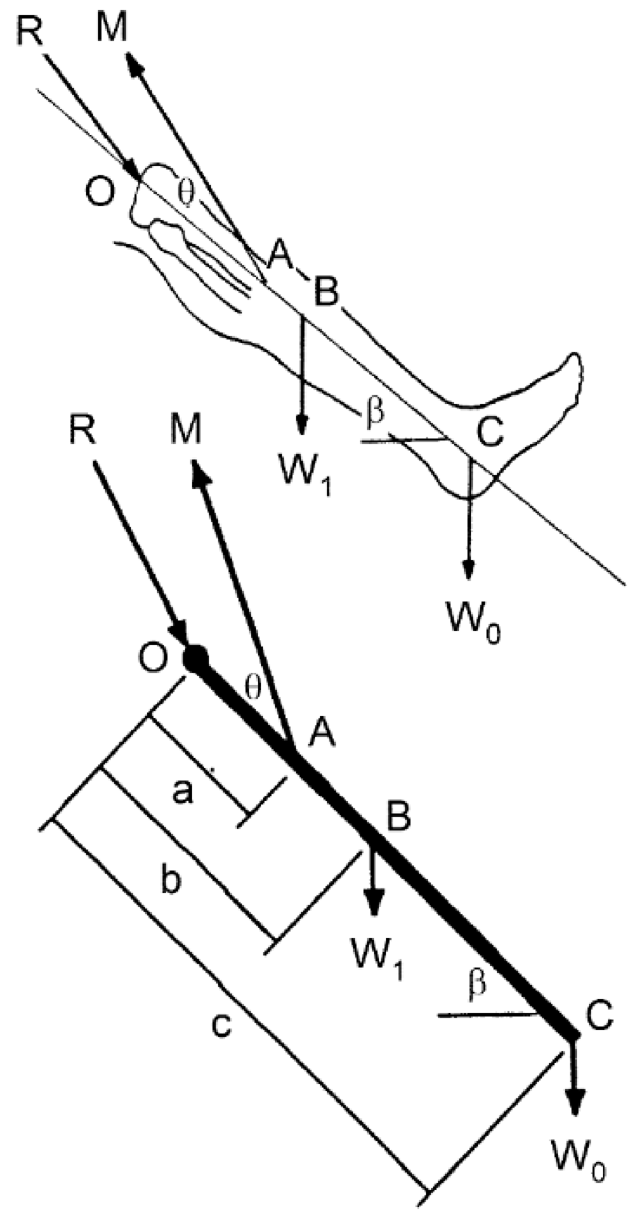
B
D
G
C
A
12°
30°
ω1
ω2

Músculo
Vertebra

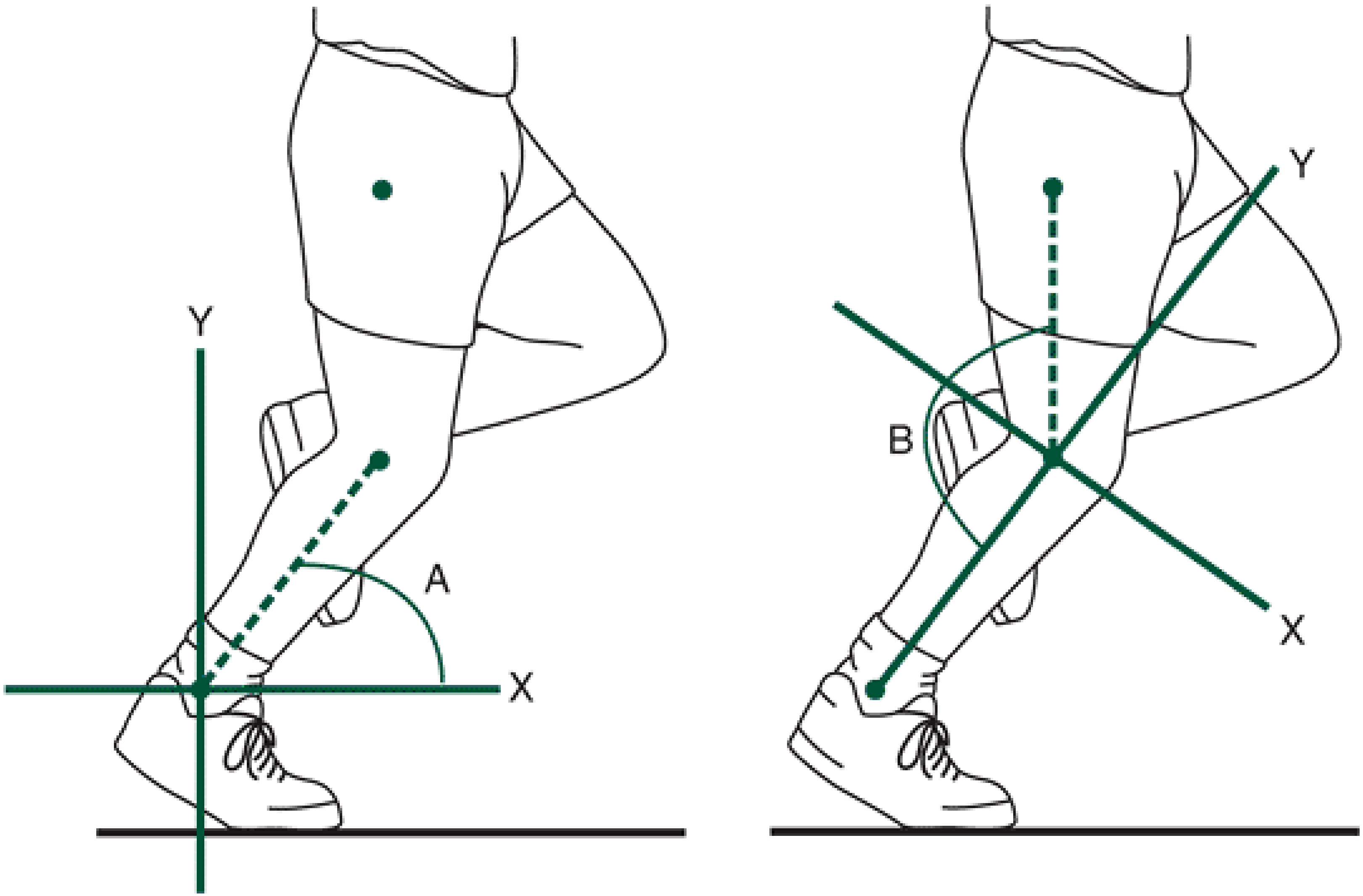

Deltoid muscle
L_2
θ
L_1
Humerus bone
$\vec{g}$
Scapula

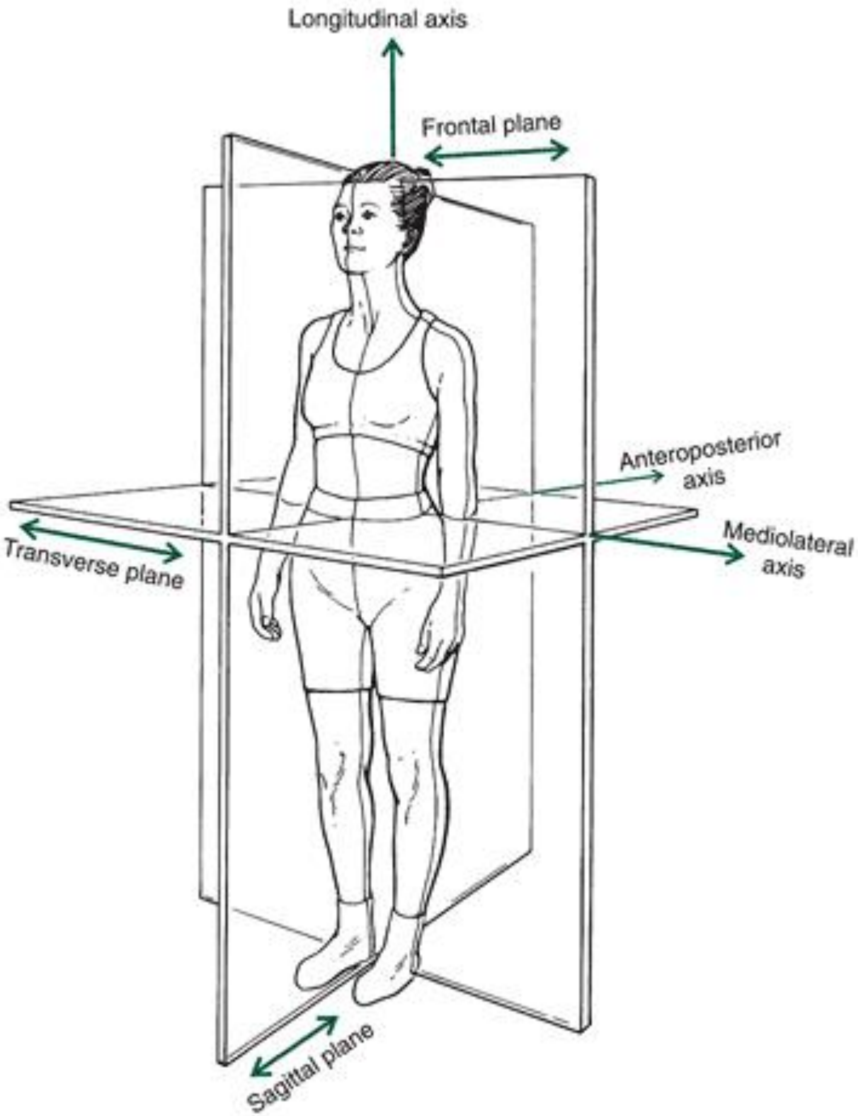

R
M
A
B
C
β
θ
O
W
W_0

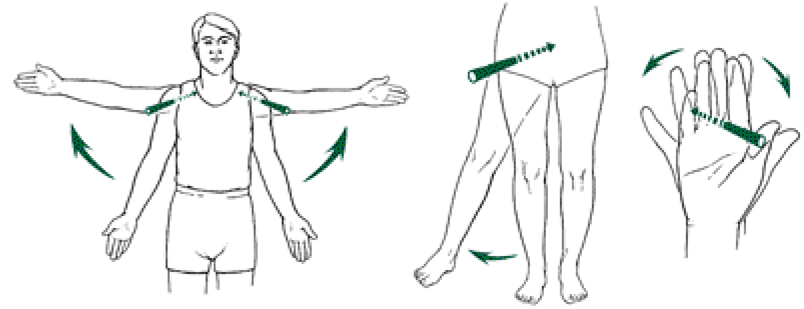

y
x
M_y
M_x
A
B
C
O
R_x
W
R_y
W_0
a
b
c



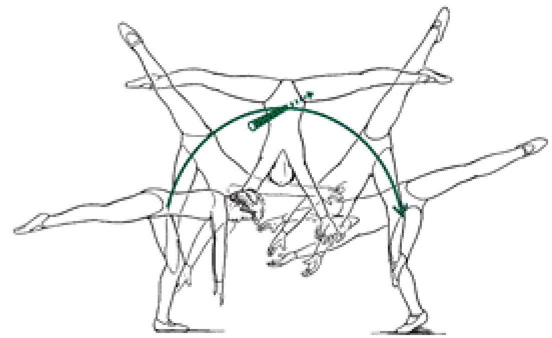
R
M
O
θ
A
B
C
β
W1
W0
R
M
O
θ
A
B
a
b
c
W1
β
C
W0


Y
X
A
Y
X
B

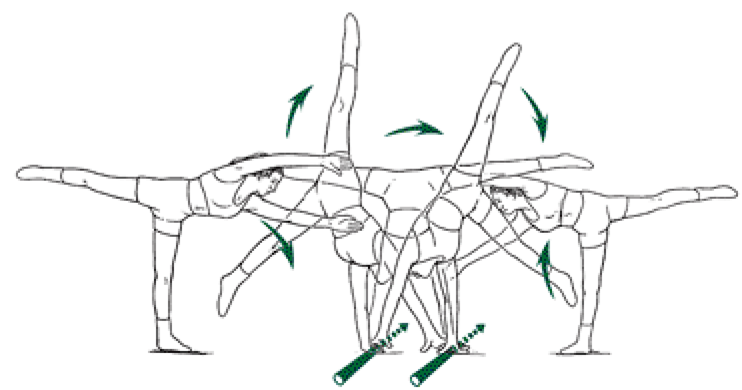




FRONTAL PLANE MOVEMENTS ABOUT JOINT AXES



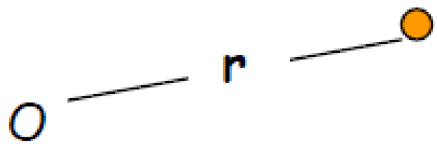
FRONTAL PLANE MOVEMENT ABOUT THE CENTER OF GRAVITY



FRONTAL PLANE MOVEMENT ABOUT EXTERNAL AXIS

Al término entre paréntesis se le ha designado con la letra **I** ; **se le llama momento de inercia o inercia rotacional del sistema de partículas** con respecto del eje de rotación considerado.

De este análisis podemos entonces decir que el momento de inercia de una partícula de masa m respecto de un punto O viene dado por : $I_o = m.\ r^2$



Considerando al cuerpo rígido formado por masas puntuales, lo que en la realidad no se presenta. Lo que se da realmente es una distribución continua de masa. y el de un sistema de partículas viene dado por:

$$I_{eje} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Para determinar el momento de inercia del rígido se hace el análisis con elementos infinitesimales de masa "**dm**' '. La expresión para el momento de inercia de un rígido respecto de un eje toma la forma:

$$I_{eje} = \int r^2 dm$$

Hay que hacer notar que el momento de inercia es una magnitud cuyo valor depende de la distribución de la masa respecto del eje considerado.

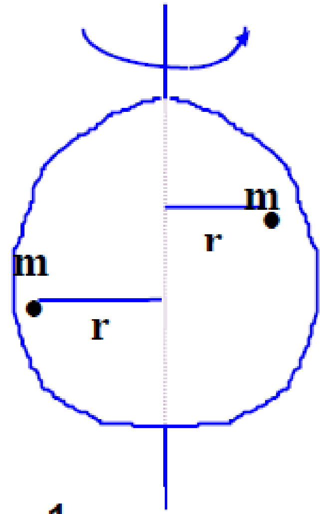
MOMENTO DE INERCIA O INERCIA ROTACIONAL

Para definir este concepto analicemos un cuerpo rígido el cual para un instante **" t "** está rotando alrededor de un eje con velocidad angular ω. Cada partícula que forma el cuerpo tiene una cierta energía cinética.

Tomemos una partícula de masa m situada a una distancia **"r"** del eje de rotación, la energía cinética de esta partícula es $\frac{1}{2}mv^2$ siendo **v** la rapidez lineal de la partícula. Recordando que **v** = ω**r** , entonces la energía cinética de la partícula es

$$\tfrac{1}{2}mr^2\omega^2$$

Como el cuerpo rígido puede considerarse formado por **n** partículas de masa $\mathbf{m_1, m_2, \ldots, m_n}$, las cuales están a una distancia $\mathbf{r_1, r_2, \ldots, r_n}$ del eje respectivamente, entonces la energía cinética total del rígido, considerado como un sistema de partículas es:

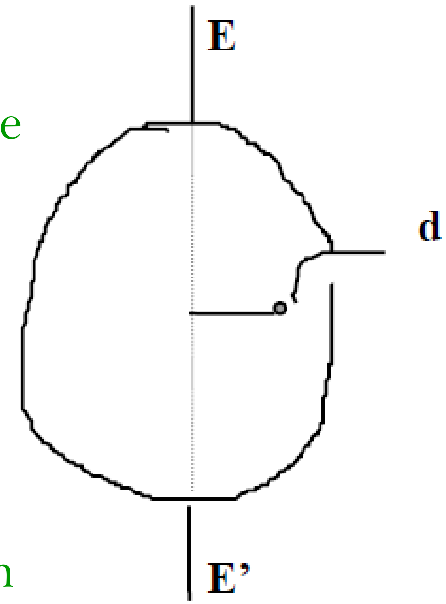


$$E_{kR} = \frac{1}{2}m_1 r_1 \omega^2 + \frac{1}{2}m_2 r_2 \omega^2 + \ldots + \frac{1}{2}m_n r_n \omega^2$$

Haciendo la sumatoria de los $\mathbf{m_i\ r_i}$ se tiene que la

Energía Cinética de rotación es $E_{kR} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)\omega^2$ **Ó** $E_{kR} = \frac{1}{2}I\omega^2$

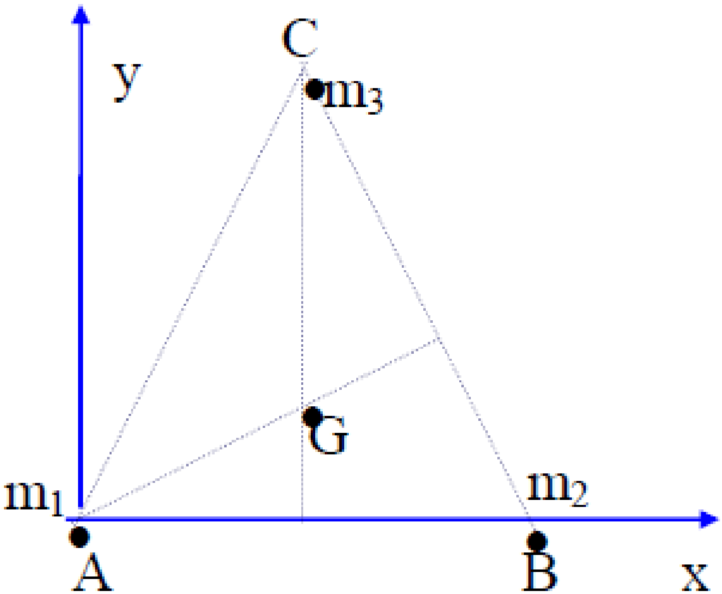
Como el momento de inercia **I** depende del eje respecto del cual rota el rígido, un mismo cuerpo puede tener infinitos momentos de inercia.



Volviendo a la **energía cinética de rotación** podemos decir que:

La expresión $E_{kR} = \frac{1}{2} I\omega^2$ no es una nueva forma de energía sino que es una forma conveniente de expresar la energía cinética de un cuerpo en rotación. Esta expresión es análoga a la expresión de la energía cinética de una partícula o cuerpo que sólo traslada, es decir: $E_{kR} = \frac{1}{2} mv^2$

Si se hace una comparación entre estas últimas dos expresiones, se observa que hay términos análogos; la rapidez angular ω es análoga a la rapidez lineal **v** y la inercia rotacional **I** es análoga a la masa del cuerpo o inercia de traslación.



La figura muestra tres partículas de masa $m1 = 2\ kg$, $m2 = 1{,}6\ kg$ y $m3 = 1\ kg$, ubicadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a=0,4 m. Calcular el momento de inercia del sistema de partículas respecto de un eje perpendicular al plano de la figura que pase por :

a) el punto A
b) el punto C
c) el punto B
d) el centroide del triángulo
e) compare los valores obtenidos en a),b) y c).

a) $I_A = m_2 a^2 + m_3 a^2 \; I_A = a^2 (m_2 + m_3)$

$I_A = 0.4^2 (1.6 + 1) \Rightarrow \qquad I_A = 0{,}416 (kg{\cdot}m^2)$

b) $I_c = m_1 a^2 + m_2 a^2 \quad I_c = a^2 (m_1 + m_2)$

$I_c = 0.4^2 (2 + 1{,}6) \Rightarrow \qquad I_c = 0{,}576 (kgm^2)$

c) $I_B = m_1 a^2 + m_3 a^2 \; I_B = a^2 (m_1 + m_3)$

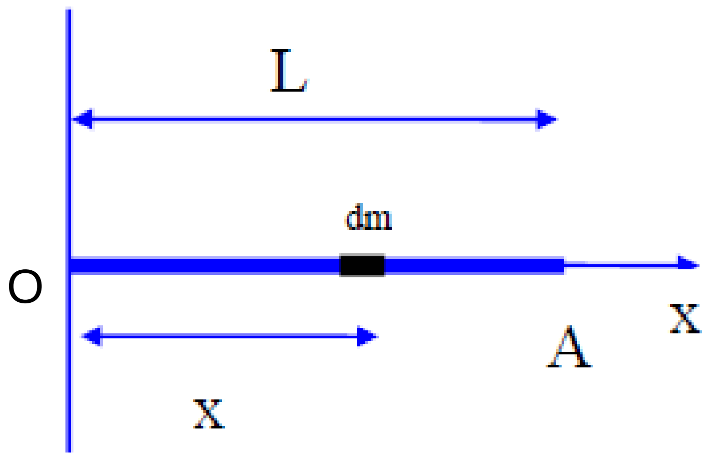
$I_B = 0{,}4^2 (2 + 1) \Rightarrow \qquad I_B = 0.48 (kgm^2)$

d) El centroide del triángulo se encuentra en el punto de intersección de las transversales de gravedad, luego

$$I_G = m_1 \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + m_2 \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + m_3 \left(\frac{2}{3}a\right)^2$$

$$I_G = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 (m_1 + m_2 + m_3) \Rightarrow \qquad I_G = 0.327 kgm^2$$

Calcule el momento de inercia de una varilla delgada homogénea, demasa M y largo L, de sección constante, respecto de un eje perpendicular a ella y que pase por uno de los extremos.



Sea *OA* la varilla de largo L, además sea **dm** un infinitesimal de masa que se encuentra a una distancia **x** del punto O.

El infinitesimal de masa *dm* se puede expresar, en general, como *dm*= ρ *dV* , donde ρ es la densidad del material.

Para la varilla delgada, se tiene que **dm** = **ρdxA(A sección).**

Luego en la expresión $I_o = \int r^2 dm$ se tiene

$$I_o = \int_o^L x^2 A\rho dx; \qquad I_o = \rho A \int_o^L x^2 dx$$

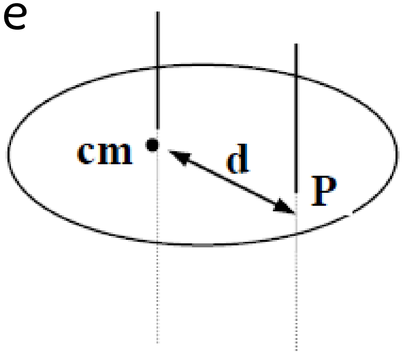
Desarrollando la integral: $I_o = \rho A \frac{L^3}{3}$ como $\rho AL = M_{VARILLA}$

Entonces el momnento de inercia es: $I_o = \frac{ML^2}{3}$

TEOREMA DE STEINER O DE LOS EJES PARALELOS

Este teorema proporciona una forma adecuada para determinar el momento de inercia de un rígido respecto de un eje, cuando se conoce el momento de inercia respecto a otro eje paralelo al primero y que pasa por el centro de masa.

La expresión analítica de este teorema es: $I_p = I_{CM} + Md^2$



I_p corresponde al momento de inercia respecto del eje que pasa por P y que es paralelo al eje que pasa por el centro de masa.

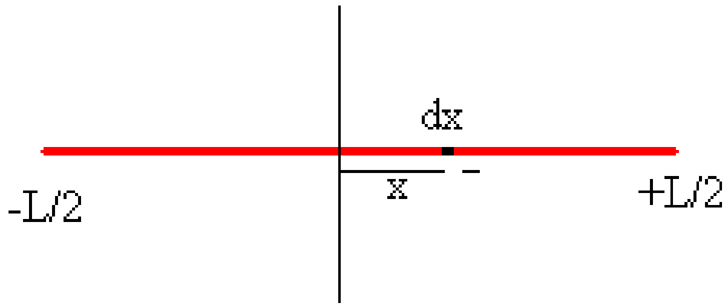
I_{CM} es el momento de inercia respecto de un eje paralelo al anterior

M es la masa total del sistema

d es la distancia entre los dos ejes paralelos.

Momento de inercia de una varilla

Vamos a calcular el momento de inercia de una varilla de masa *M* y longitud *L* respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por el centro de masas.



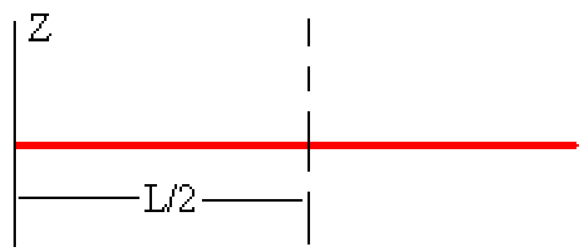
$$dm = \frac{M}{L}dx$$

La masa *dm* del elemento de longitud de la varilla comprendido entre *x* y *x*+*dx* es

El momento de inercia de la varilla es

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L} x^2 dx = \frac{1}{12} ML^2$$

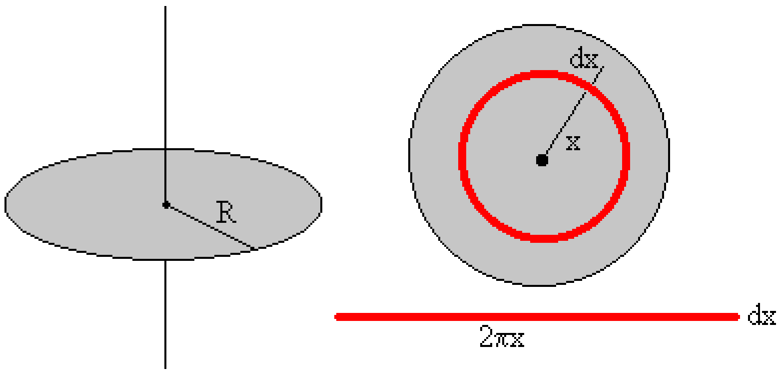
Aplicando el teorema de Steiner, podemos calcular el momento de inercia de la varilla respecto de un eje perpendicular a la misma que pasa por uno de sus extremos.



$$I = I_C + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

Momento de inercia de un disco

Vamos a calcular el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R* respecto de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.



Tomamos un elemento de masa que dista *x* del eje de rotación. El elemento es un anillo de radio *x* y de ancho *dx*. Si recortamos el anillo y lo extendemos, se convierte en un rectángulo de longitud 2p*x* y ancho *dx*, cuya masa es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2\pi x dx = \frac{2M}{R^2} x dx$$

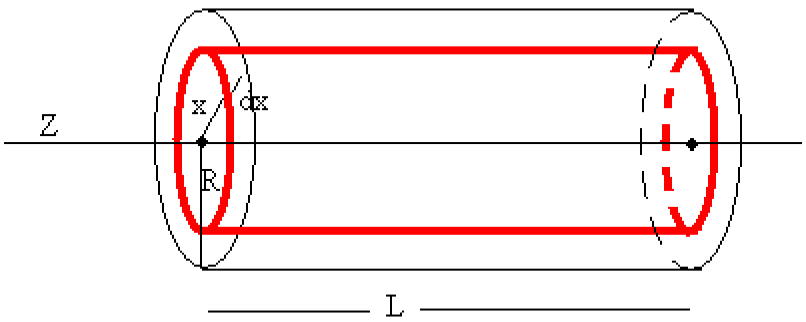
Entonces el momento de inercia del disco es

$$I_C = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2$$

Momento de inercia de un cilindro

Vamos a calcular el momento de inercia de un cilindro de masa *M* , longitud L y radio *R* respecto de un eje perpendicular al plano del disco y que pasa por su centro.

Tomamos un elemento de masa que dista *x* del eje de rotación. El elemento es una capa cilíndrica cuyo radio interior es *x*, exterior *x+dx*, y de longitud *L*, tal como se muestra en la figura. La masa *dm* que contiene esta capa es



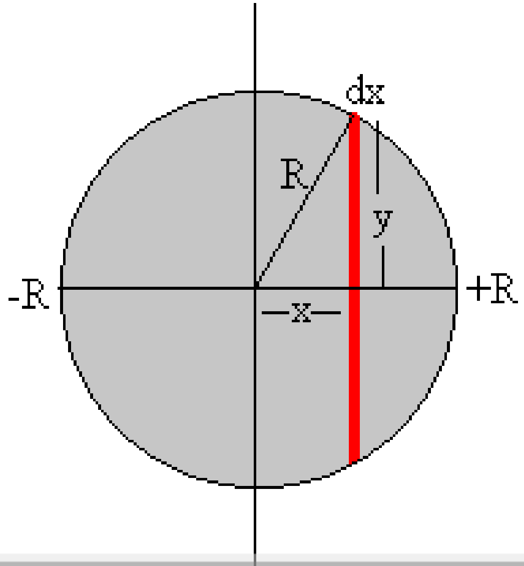
$$dm = \frac{M}{\pi R^2 L} 2\pi x dx \cdot L = \frac{2M}{R^2} x dx$$

El momento de inercia del cilindro es

$$I_C = \int x^2 dm = \int_0^R \frac{2M}{R^2} x^3 dx = \frac{1}{2} MR^2$$

Momento de inercia de un disco

Vamos a calcular el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R*, respecto de uno de sus diámetros.



Vamos a calcular el momento de inercia de un disco de masa *M* y radio *R*, respecto de uno de sus diámetros. Tomamos un elemento de masa que dista *x* del eje de rotación. El elemento es un rectángulo de longitud 2*y* de ancho *dx*. La masa de este rectángulo es

$$dm = \frac{M}{\pi R^2} 2y\,dx$$

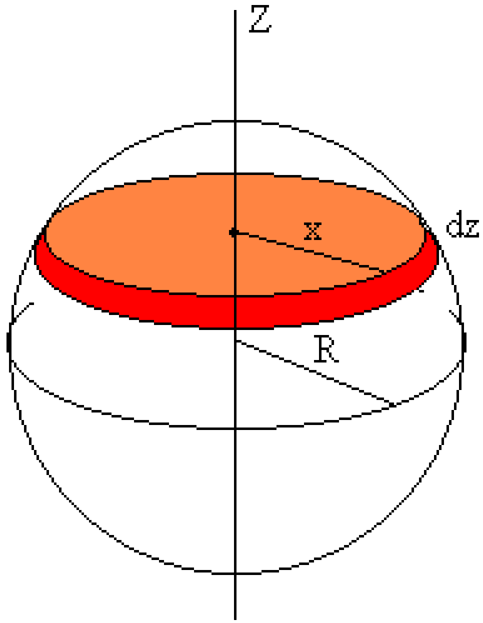
$$I_C = \int_{-R}^{R} \frac{M}{\pi R^2} 2x^2 y\,dx$$

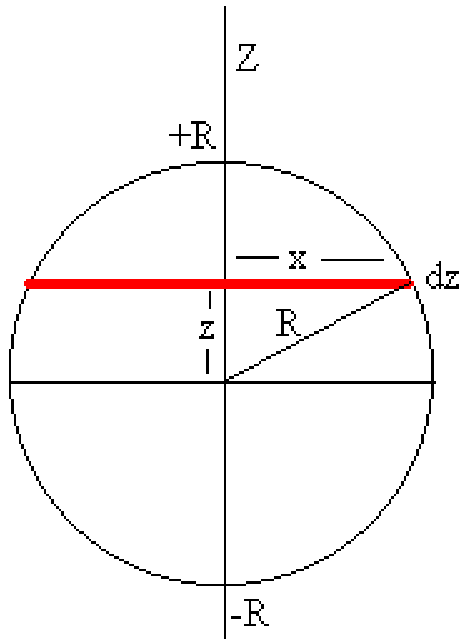
$$I_C = \frac{2M}{\pi R^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^4 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta \cdot d\theta = \frac{MR^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta \cdot d\theta =$$

$$\frac{MR^2}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{4} MR^2$$

Momento de inercia de una esfera

Vamos a calcular el momento de inercia de una esfera de masa *M* y radio R respecto de uno de sus diámetros





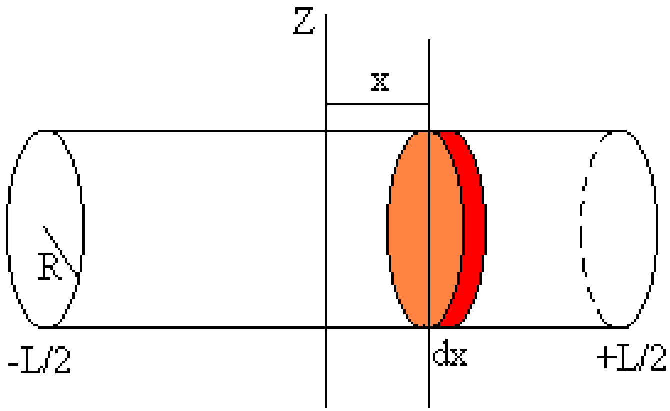
$$\frac{1}{2}x^2 dm$$

$$dm = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi x^2 dz = \frac{3M}{4R^3}x^2 dz$$

El momento de inercia de la esfera, es la suma de los momentos de inercia de todos los discos elementales.

$$I_C = \int \frac{1}{2}x^2 dm = \int_{-R}^{R} \frac{1}{2}x^2 \frac{3M}{4R^3}x^2 dz = \frac{3M}{8R^3}\int_{-R}^{R} x^4\, dz$$

Momento de inercia de un cilindro



Dividimos el cilindro en discos de radio *R* y espesor *dx*. El momento de inercia de cada uno de los discos respecto de uno de sus diámetros es

$$\frac{1}{4}R^2 dm = \frac{1}{4}R^2 \frac{M}{\pi R^2 L}\pi R^2 dx = \frac{M}{4L}R^2 dx$$

Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de este disco, respecto de un eje paralelo situado a una distancia *x*

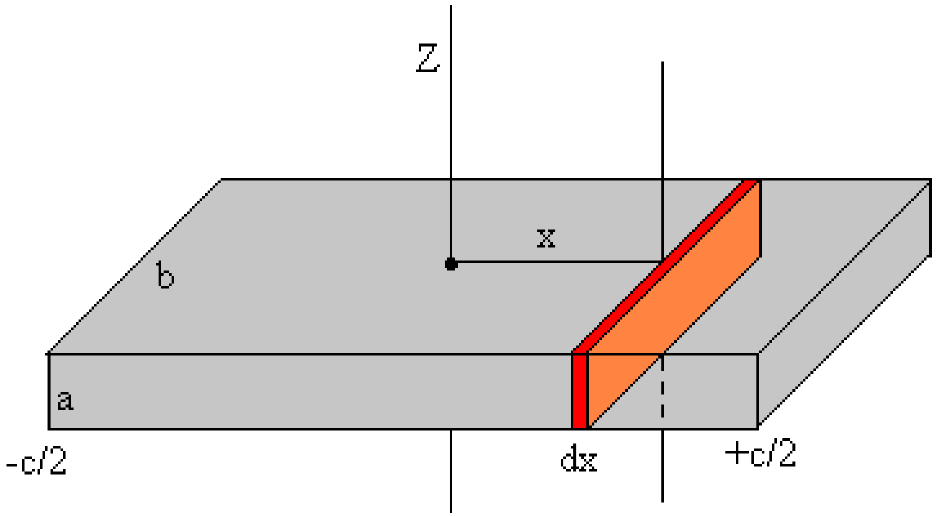
$$\frac{1}{4}R^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{\pi R^2 L}\pi R^2 dx = \left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{L}dx$$

El momento de inercia del cilindro es

$$I_C = \int_{-L/2}^{L/2}\left(\frac{1}{4}R^2 + x^2\right)\frac{M}{L}dx = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$

Momento de inercia de un paralepípedo

Vamos a calcular el momento de inercia de un paralepípedo de masa *M* y de lados *a*, *b* y *c* respecto de un eje perpendicular a una de sus caras



Dividimos el paralepípedo en placas rectangulares de lados *a* y *b* y de espesor *dx*.
El momento de inercia de cada una de las placas respecto de su eje de simetrí
es

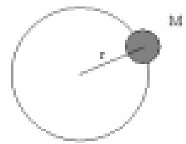
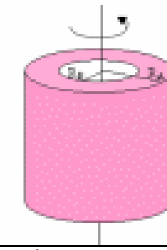
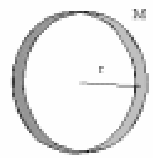
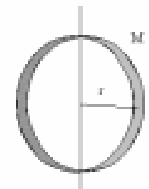
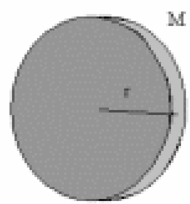
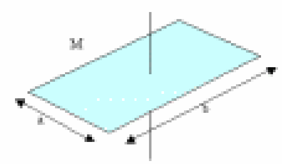
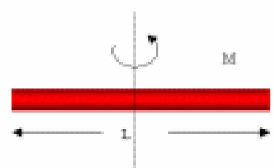
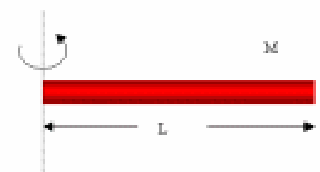
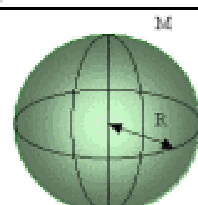
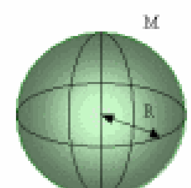
$$\frac{1}{12}b^2 dm$$

Aplicando el teorema de Steiner, calculamos el momento de inercia de esta placa respecto de un eje paralelo situado a una distancia *x* es

$$\frac{1}{12}b^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{abc}ab\cdot dx = \left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{c}dx$$

El momento de inercia del sólido en for

$$\int_{-c/2}^{c/2}\left(\frac{1}{12}b^2 + x^2\right)\frac{M}{c}dx = \frac{M}{12}(b^2 + c^2)$$

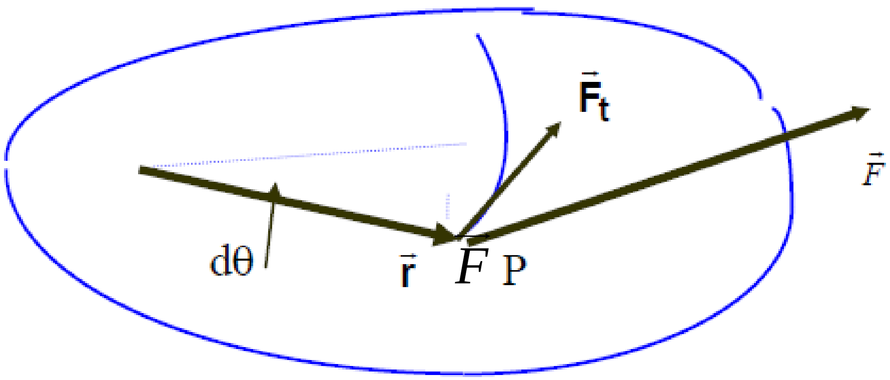
Masa puntual de masa M que gira en torno a un eje situado a una distancia r. $I = Mr^2$ 	Cilindro hueco de masa M y radios R_A y R_B. $I = \frac{1}{2}M(R_A^2 + R_B^2)$ 
Aro de masa M y radio r que gira en torno a su centro. $I = Mr^2$ 	Aro de masa M y radio r que gira en torno a un diámetro. $I = \frac{1}{2}Mr^2$ 
Disco de masa M y radio r que gira en torno a su centro. También sirve para un cilindro sólido que gira respecto a su eje central. $I = \frac{1}{2}Mr^2$ 	Placa rectangular de masa M y lados a y b, que gira en torno a su centro. $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ 
Varilla de masa M y longitud L que gira en torno a su centro. $I = \frac{1}{12}ML^2$ 	Varilla de masa M y longitud L que gira en torno a un extremo. $I = \frac{1}{3}ML^2$ 
Esfera hueca de masa M y radio R que gira en torno a su centro. $I = \frac{2}{3}MR^2$ 	Esfera maciza de masa M y radio R que gira en torno a su centro. $I = \frac{2}{5}MR^2$ 

PARAMETROS QUE CARACTERIZAN LOS MOVIMIENTOS

TRALACIONALES	ROTACIONALES
m	$\mathbf{I}$
$\mathbf{x}$	$\mathbf{A}$
$\mathbf{v}$	$\boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{a}$	$\overline{\boldsymbol{\omega}}$
$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	$\mathbf{L} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}$
$\mathbf{f} = m\mathbf{a}$	$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{f} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I} \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}$

EXPRESION PARA TRABAJO Y POTENCIA EN UNA ROTACION

Consideremos un cuerpo rígido que rota en torno de un eje fijo, debido a la aplicación de un torque producido por la fuerza $\vec{F}$, la cual es coplanar con el plano perpendicular al eje de rotación. El análisis se hará como ya hemos dicho para fuerzas que están en planos perpendiculares al eje de rotación.



Calcularemos un elemento de trabajo **dW** hecho por esta fuerza $\vec{F}$, cuando el punto P se desplaza describiendo un arco infinitesimal ds.

De acuerdo a la definición para un trabajo infinitesimal: $\mathbf{dW} = \mathbf{F_t} \cdot \mathbf{ds}$ siendo $\mathbf{F_t}$ la componente tangencial de la fuerza y $\mathbf{ds} = \mathbf{r d\theta}$. La expresión para dW es:

$$dW = F_t r d\theta \,, \quad \text{como} \quad \tau_o = F_t r$$

$$\text{entonces} \qquad dW = \tau_o d\theta$$

por lo tanto

$$\boxed{W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_o \, d\theta}$$

Si el torque τ es constante, entonces: $W = \tau_o \cdot \Delta\theta$

Esta expresión es análoga a la del trabajo realizado por una fuerza constante a lo largo de una recta $W = F \cdot \Delta s$.

La expresión para la potencia instantánea P es:

$$P = \frac{dW}{dt}; \quad P = \frac{\tau \, d\theta}{dt} \quad \text{ó} \quad P = \tau_o \omega$$

La expresión para la potencia instantánea P es:

$$P = \frac{dW}{dt}; \quad P = \frac{\tau \, d\theta}{dt} \quad \text{ó} \quad P = \tau_o \omega$$

Esta última expresión, es la equivalente rotacional de ***P*** = ***Fv*** para el movimiento de traslación a lo largo de una recta.
Si se hace el análisis de un cuerpo sobre el cual se aplican varias fuerzas que produzcan torques de dirección paralela al eje de rotación, el trabajo realizado por estos torques en una pequeña rotación $d\theta$ es:

$$dW = F_{1t} r_1 d\theta + r_2 d\theta + \ldots\ldots F_{nt} r_n d\theta$$

$$dW = (\tau_{01} + \tau_{02} + \ldots\ldots \tau_{0n}) d\theta \qquad dW = \tau_{o\,neto} d\theta \text{ , integrando}$$

$$\boxed{W_{neto} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{o\,neto} \cdot d\theta}$$

ECUACION FUNDAMENTAL DE LA DINAMICA DE ROTACION PURA

En el análisis del cuerpo rígido en rotación, se determinó que el trabajo dW realizado sobre él, depende del torque τ_{neto} aplicado. Este trabajo realizado sobre el cuerpo, produce una variación de la energía cinética, como no hay movimiento relativo entre las partículas que forman el rígido, no hay disipación de energía dentro de él; en consecuencia, la rapidez con que se realiza el trabajo es equivalente a la rapidez con que aumenta la energía cinética del cuerpo rígido, luego:

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \tau_o \omega}$$

además

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} I\omega^2)}{dt}}$$

El eje de rotación es fijo, entonces **I** constant $\tau_O\,\omega = I_O\,\omega\alpha \Rightarrow \tau_O = I_O\,\alpha$

Esta ecuación se puede escribir vectori $\vec{\tau}$ y $\vec{\alpha}$ te son vectores colineales de igual sentido e I_O es una magnitud escalar positiva, luego:

$$\vec{\tau}_O = I_O\,\vec{\alpha}$$

Esta ecuación es análoga a $\vec{F} = m\vec{a}$

corresponde a la ecuación fundamental de la mecánica clásica para rotación pura.

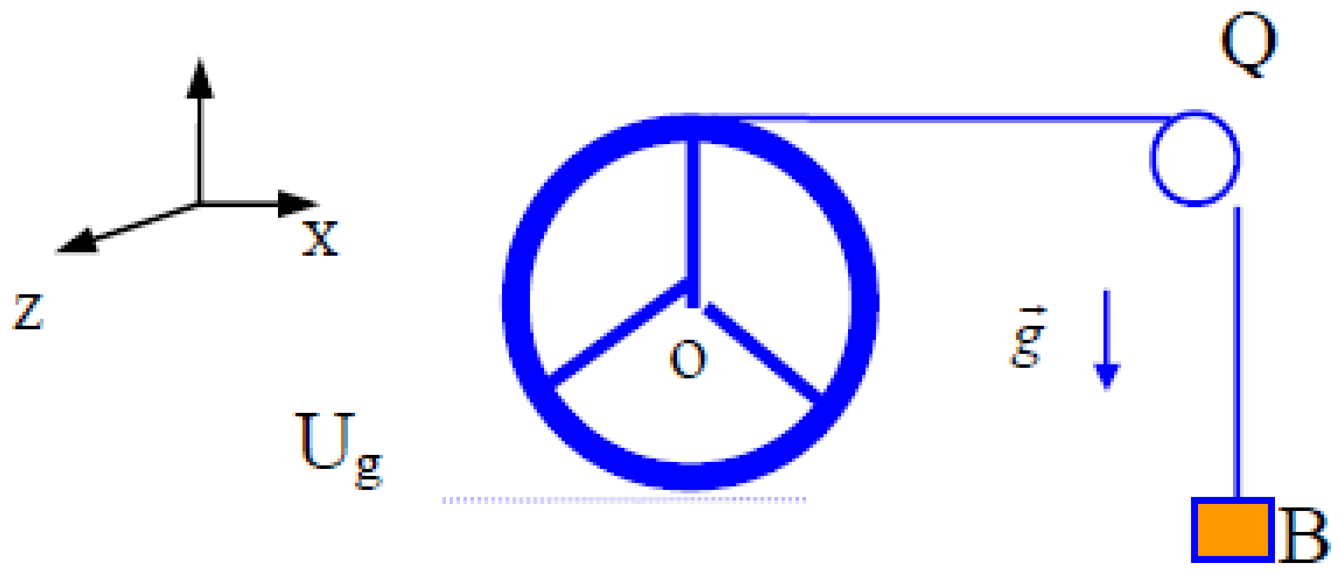
En una rotación pura la expresión del teorema del trabajo y la energía para un desplazamiento angular Δθ es:

$$\boxed{W_{NETOAB} = \frac{1}{2} I_O\,\omega_B{}^2 - \frac{1}{2} I_O\,\omega_A{}^2}$$

EJEMPLO

Un cuerpo rígido formado por un aro homogéneo de masa M=4 kg y tres barras delgadas homogéneas, cada una de masa m=2 kg y largo L=0.5m, el cual puede rotar respecto del eje fijo perpendicular al plano OXY que pasa por O.
En la periferia del aro está enrollada una cuerda de masa despreciable e inextensible y de un extremo cuelga el bloque B de masa m_B= 4kg. La cuerda pasa por la polea Q de masa despreciable.
En t=0 el sistema está en reposo en la posición que muestra la figura. Se suelta el sistema y el bloque comienza a descender. Calcule:

a) velocidad angular del rígido en t=2s.
b) torque neto respecto de O que actúa sobre el rígido en t=2s.
c) energía mecánica del sistema rígido bloque en t=2s.



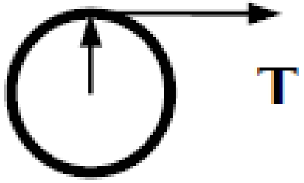
El bloque **B** y el cuerpo rígido forman un sistema, están unidos por una cuerda de masa despreciable e inextensible. El bloque traslada y el rígido rota respecto del eje fijo que pasa por O.
Las variables lineales del bloque serán las mismas que las que tienen los puntos de la periferia del cuerpo rígido

a) Se pide $\vec{\omega} = -\omega\hat{k}$ en t=2s , para responder esta pregunta será necesario conocer la aceleración angular del rígido o bien la aceleración tangencial con que baja el bloque.

Aplicaremos las expresiones dinámicas $\boxed{\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}}$ para el cuerpo rígido y $F = m \cdot a$ para el bloque y la relación cinemática $a_t = \alpha.R$

En el cuerpo rígido la fuerza que produce torque respecto de O es la tensión **T. (** La contribución de la fuerza peso de las barras al torque neto es cero, queda pendiente para que usted lo desarrolle), entonces

1) $R.T = I_o .\alpha$



En el bloque actúa la fuerza peso y la tensión T , entonces se tiene:

2) $mg - T = m\, a_B$ 3) $a_C = a_B = \alpha .R$

Necesitamos conocer el momento de inercia del rígido. Este está formado por un aro y tres varillas, luego el momento de inercia de este rígido se calculará mediante la expresión:

$$\mathbf{I_{O\text{rígido}} = 3I_{0\text{barra}} + I_{o\text{aro}}}$$

De las tablas de momentos de inercia se obtiene que el momento de inercia de una barra o varilla respecto del centro de masa es $\mathbf{ML^2/12}$ y el de un aro es $\mathbf{MR^2}$. Como las barras están rotando respecto de un extremo, deberemos aplicar el teorema de Steiner, luego para una barra se tiene

$$I_{0\,Barra} = \tfrac{1}{12} mL^2 + m\left(\tfrac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I_0 = \tfrac{1}{3} mL^2$$

$$I_{origido} = 3m\frac{L^2}{3} + MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_{o\,\text{rígido}} = 1{,}5\,Kg \cdot m^2$$

Conocido el momento de inercia y resolviendo el sistema formado por las ecuaciones 1), 2) y 3) se obtiene que el módulo de la aceleración angular es de 8 rad/s2

Como $\omega(t) = \omega_o + \alpha t$ y partió del reposo, entonces $\vec{\omega}(2) = -16\hat{k}\,rad/s$

b) La tensión produce un torque constante que lo calcularemos a partir de la ecuación

$\vec{\tau} = I \bullet \vec{\alpha}$ como $\vec{\alpha} = -8\hat{k} rad/s^2$

$\vec{\tau} = -1{,}5 \cdot 8\hat{k} \Rightarrow \vec{\tau} = -12\hat{k} \, rad/s^2$

c) Para este sistema, la energía mecánica permanece constante, luego se puede calcular en cualquier instante y el instante que presenta menor dificultad es en t=0, ya que el sistema está en reposo.

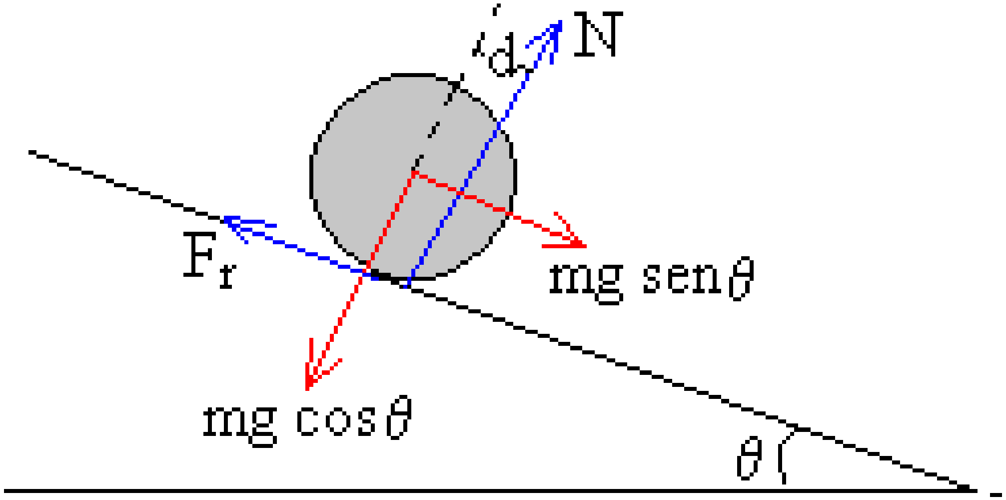
$$E(0) = E(2), \text{ con } \quad E(0) = E_k + E_{pg}$$

Luego, $E = E_{pg} = (3m + M)g \cdot 0{,}5$

RODADURA

La aceleración del centro de masa de un sistema sobre el cual actúa una fuerza resultante $\vec{F}_{neta} = m \cdot \vec{a}_{cm}$

Por otra parte, cuando un rígido rota respecto de un eje fijo su ecuación de movimiento es: $\boxed{\vec{\tau}_{neto} = I \cdot \vec{\alpha}}$



Si sobre un rígido actúan varias fuerzas, el sistema de fuerzas puede reducirse a los siguientes casos:

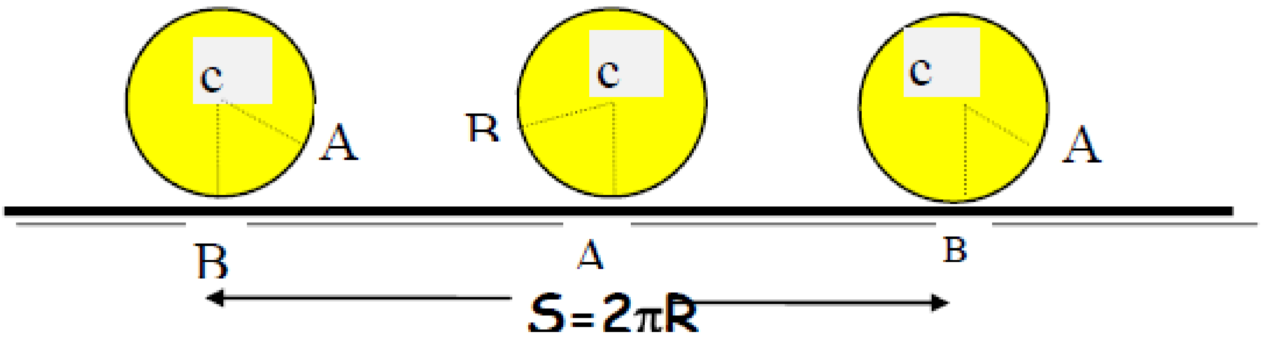
a) Una sola fuerza cuya línea de acción pasa por el centro de masa, en cuyo caso el cuerpo rígido sólo traslada.

b) Un par o cupla, es decir, dos fuerzas de línea de acción paralela, de igual módulo, igual dirección y sentido opuesto; en este caso el cuerpo rígido rota respecto de un eje que pasa por el centro de masa sin ser necesario de que exista ese eje en forma real.

c) Una fuerza única cuya línea de acción no pasa por el centro de masa, en este caso el cuerpo rígido rota y traslada simultáneamente.

Las ecuaciones del movimiento son:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \qquad \vec{\tau}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}$$



De los tres casos planteados, se analizará el tipo (c), que es una **rototraslación** para cuerpos que presentan una simetría esférica, es decir una **RODADURA**.

Existen algunos cuerpos rígidos como las esferas, cilindros, aros, discos, que pueden rodar o tienen movimiento de rodadura. Esto significa que a la vez que trasladan también rotan respecto de un eje.

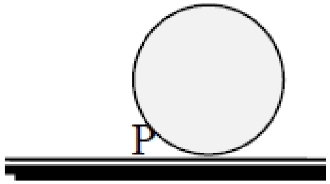
Es un movimiento combinado de rotación y traslación.

Analizaremos el caso sencillo de un cuerpo que **rueda sin deslizar** sobre una **superficie plana rugosa.**

Este tipo de movimiento impone una relación determinada entre las variables lineales y angulares de su desplazamiento, velocidad y aceleración. Estudiaremos el movimiento de un cilindro macizo y homogéneo de masa M y radio R.

El centro de masa del cilindro coincide con el centro de gravedad de él.
La distancia que se desplaza al centro de masa del cilindro en un intervalo de tiempo Δt es:

$$x_{CM} = R\theta \quad (1)$$



Esta es la primera condición cinemática del movimiento de rodadura. Si se deriva sucesivamente dos veces esta expresión respecto del tiempo, se encuentran las ecuaciones:

$$v_{CM} = R\omega \qquad (2)$$

$$a_{CM} = R \cdot \alpha \qquad (3)$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3), se deduce que las variables lineales y angulares respectivas, no son independientes entre sí.

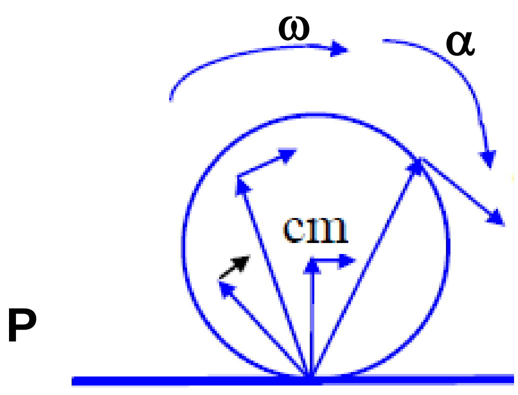
En este movimiento se cumple que la **velocidad del punto de contactoP es nula en todo instante.**

El movimiento de rodadura puede analizarse por dos métodos que son totalmente equivalentes:

a) Como una **rototraslación**, es decir, una traslación del cuerpo rígido y una rotación en torno de un eje que pasa por su centro de masa en forma simultánea.

b) Como una **sucesión de rotaciones puras** respecto de un eje, llamado eje instantáneo de rotación.

A través del movimiento del cilindro que rueda sin deslizar, mostraremos la equivalencia de ambos métodos, usando el concepto de energía cinética.



Como la velocidad del punto de contacto P es nula, podemos considerar que en cada instante **t** del movimiento, el cuerpo tiene una rotación pura en torno del eje instantáneo que pasa por el punto P.
Supongamos que w es la rapidez angular del cilindro respecto del eje instantáneo en un instante t, entonces la energía cinética total de él es:

$$E_{kR} = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

Siendo *Ip* el momento de inercia del cilindro respecto del eje instantáneo.
De acuerdo al teorema de Steiner: $I_p = I_{CM} + MR^2$

Luego: $$E_{kR} = \tfrac{1}{2}\left(I_{CM} + MR^2\right)\omega^2$$

$$E_{kR} = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} MR^2\omega^2 \qquad (4)$$

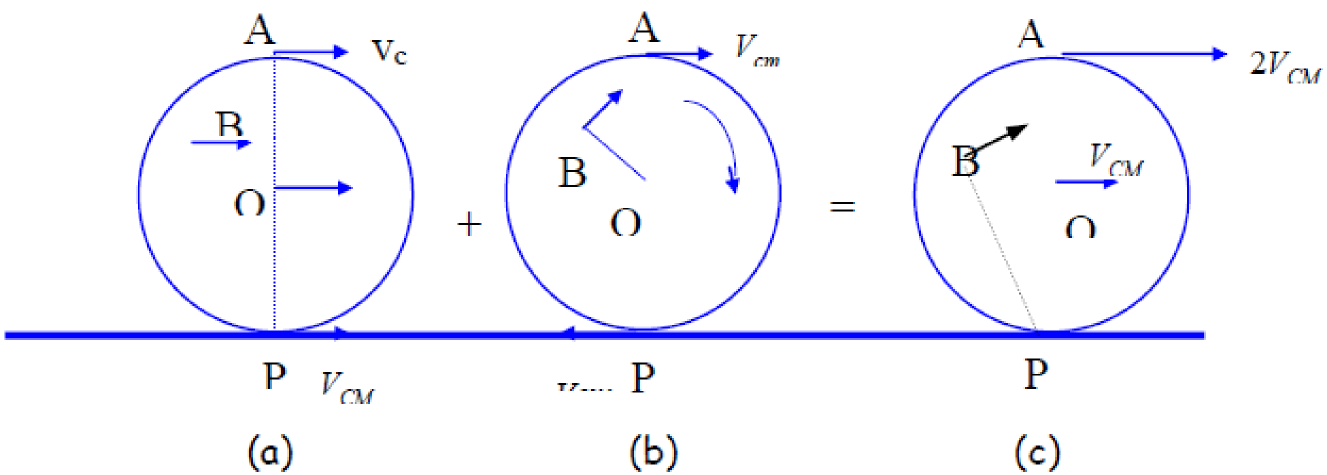
La ecuación (4) representa la energía cinética total del cilindro que rueda sin deslizar, expresado por los efectos combinados de la traslación del centro de masa y de una rotación alrededor del un eje que pasa por el centro de masa.

El término $\tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2$ representaría la energía cinética de rotación de un cilindro, si sólo estuviese rotando respecto de un eje que pasa por el centro de masa.

El término $\tfrac{1}{2} MR^2\omega^2$ representaría la energía cinética de traslación de un cilindro que solo trasladara con la velocidad del centro de masa (vcm= R w)

La velocidad angular respecto del eje instantáneo y respecto un eje que pasa por el centro de masa, en un instante t, es la misma.

Gráficamente, podemos ilustrar la equivalencia de una rototraslación a una rotación pura, a través del movimiento de un cilindro que rueda sin deslizar.



En la figura (a), se han dibujado las velocidades de los puntos A, B, O y P, suponiendo que el cilindro sólo traslada.

En la figura (b), se han dibujado las velocidades de los mismos puntos anteriores, suponiendo que el cilindro sólo rota en torno del centro de masa.

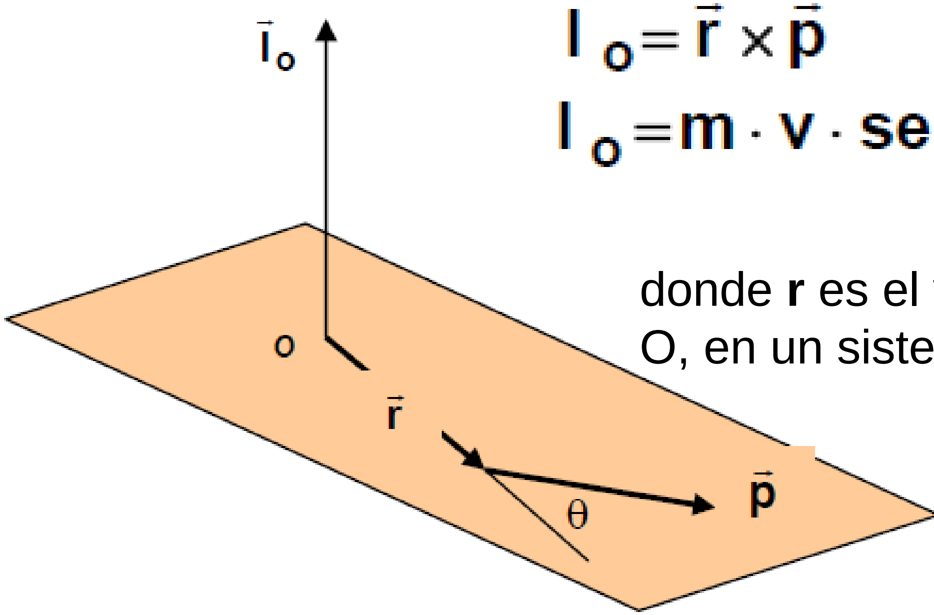
En la figura (c), se han dibujado las velocidades de dichos puntos, haciendo la combinación de rotación y traslación simultánea.

Se observa que el punto P no tiene velocidad, que el punto O se mueve con la velocidad del centro de masa, $2\vec{v}_{cm}$ que el punto A se mueve con y que el punto B con rapidez $v_B = \overline{BP}\omega$

En sistemas en los cuales la única fuerza no conservativa es la fuerza de roce estático, la energía mecánica se conserva constante, ya que la **fuerza de roce estático no disipa energía**, o no realiza trabajo.

MOMENTUM ANGULAR (L)

Definiremos el momentum angular **L**, conrespecto a O, para una partícula de masa **m** que se mueve con velocidad v , Como:



$\vec{l}_o = \vec{r} \times \vec{p}$ cuyo módulo es

$l_o = m \cdot v \cdot \operatorname{sen}\theta$

donde **r** es el vector posición respecto de un punto fijo O, en un sistema de referencia inercial.

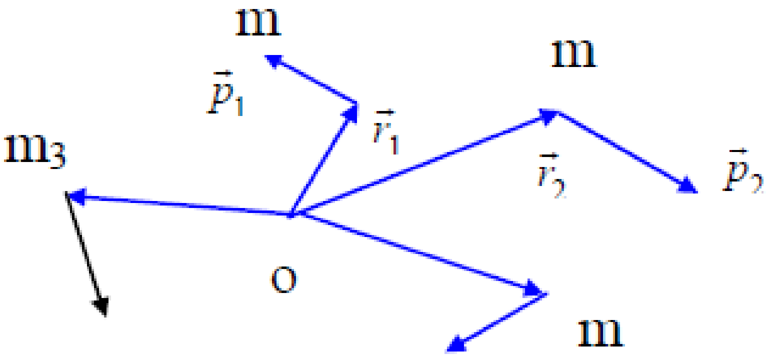
El momentum angular **o L**,es un vector perpendicular al plano, determinado por **r** y **v**.

Si la partícula se mueve en un plano, el momentum angular respecto de O permanece con su dirección invariante, para cuando O está contenido en dicho plano.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR O MOMENTUM ANGULAR DE UN SISTEMA DE PARTICULAS

$$\vec{L}_o = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n$$

$$\vec{L}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i, \qquad \vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$



Al transcurrir el tiempo, el momentum angular**L**, puede cambiar debido a la acción de:

a) momentos ejercidos sobre las partículas del sistema por fuerzas internas entre las partículas.

b) momentos ejercidos sobre las partículas del sistema por fuerzas externas.

$$\vec{\tau}_{o\ ext} = \frac{d\vec{L}_o}{dt}$$

MOMENTO ANGULAR PARA UN CUERPO RIGIDO

Como hemos dicho anteriormente, un cuerpo rígido es un caso especial de sistema de partículas, cuyas posiciones relativas están fijas, luego es aplicable la expresión:

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

La ecuación de movimiento de rotación del rígido es $\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$ siendo **I** el momento de inercia respecto de un eje. Si se considera que **I** es constante respecto a dicho eje, entonces:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt}$$

Luego : $\vec{L}_O = I_O \cdot \vec{\omega}$

PRINCIPIO DE CONSERVACION DEL MOMENTUM ANGULAR (Lo)

Supongamos que se tiene un sistema de partículas sobre el cual la suma de los torques externos que actúa sobre él, es cero, es decir:

$$\vec{\tau}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{L}_O = cte.$$

Esto implica que cuando el torque neto externo neto sea cero, el vector cantidad de momentum angular del sistema, permanece constante.