



DINÁMICA

Aplicaciones de las Leyes de Newton

Para resolver problemas aplicando las leyes de Newton, se recomienda:

Hacer el dibujo.

- ▶ Hacer el diagrama de cuerpo libre o aislado, considerando al cuerpo como si fuese un punto.
- ▶ Colocar en el diagrama y saliendo del punto, todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo.
- ▶ Elegir un sistema de referencia (plano cartesiano)
- ▶ Colocar en el sistema la convención de signos.
- ▶ Tomar como eje positivo el de la dirección de movimiento del cuerpo.
- ▶ Marcar los ángulos que forman las fuerzas con respecto a los ejes.
- ▶ Descomponer a las fuerzas en sus componentes rectangulares.
- ▶ Cuando se trabaje con planos inclinados, uno de los ejes debe de ser paralelo al plano.
- ▶ Aplicar la Segunda Ley de Newton, haciendo la sumatoria de las componentes de las fuerzas sobre los ejes.

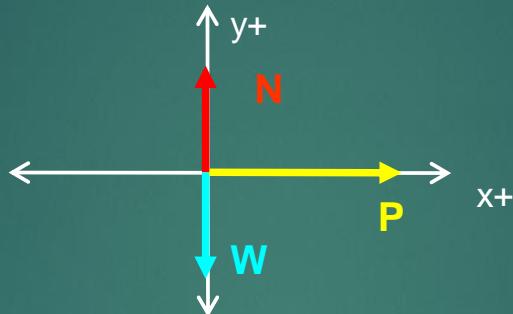
$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_x = ma_x$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO: Una persona empuja una caja de 50 kg sobre una superficie horizontal lisa aplicando una fuerza de 30 N. Determine la aceleración de la caja.

Diagrama de Cuerpo libre



La única fuerza que está actuando sobre el eje de las x es la Fuerza **P** aplicada, además, tal fuerza es igual a la componente P_x , por lo tanto:

$$\sum F_x = ma_x \quad P_x = ma_x$$

despejando a la aceleración:

$$a = \frac{P}{m} = \frac{30N}{50kg} = 0.6 \frac{m}{s^2}$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

En este tipo de problemas donde no existe fricción, no es necesario realizar la suma de fuerzas en el eje de las y a menos que se solicite.

$$\sum F_y = ma_y$$

Las fuerzas que actúan sobre el eje de las y son la Normal (positiva hacia arriba) y el peso (negativo hacia abajo).

$$N - W = ma_y$$

Como no hay movimiento en dicho eje, la aceleración aquí es cero (no hay cambios de velocidad). Por lo tanto:

$$N - W = 0$$

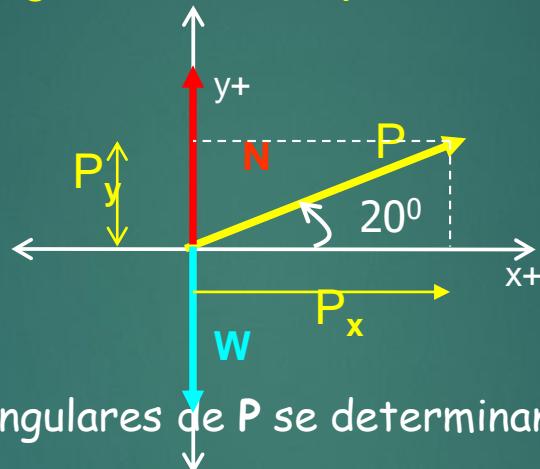
Ya que el peso es igual a la masa por la aceleración de la gravedad.

$$N = W = mg = 50kg(9.81 \frac{m}{s^2}) = 490.5N$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO. - Del ejemplo anterior, la persona le aplica a la caja la misma fuerza pero haciendo un ángulo de 20^0 con respecto a la horizontal. Determine la aceleración que tal fuerza le produce a la caja.

Diagrama de Cuerpo libre



donde las componentes rectangulares de P se determinan a partir del triángulo que se forma:

$$P_x = |P| \cos \theta = 30N(\cos 20^0) = 30N(0.9396) = 28.19N$$

Aplicando la suma de fuerzas en x :

$$P_y = |P| \sin \theta = 30N(\sin 20^0) = 30N(0.342) = 10.26N$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

$$\sum F_x = ma_x$$

$$P_x = ma_x$$

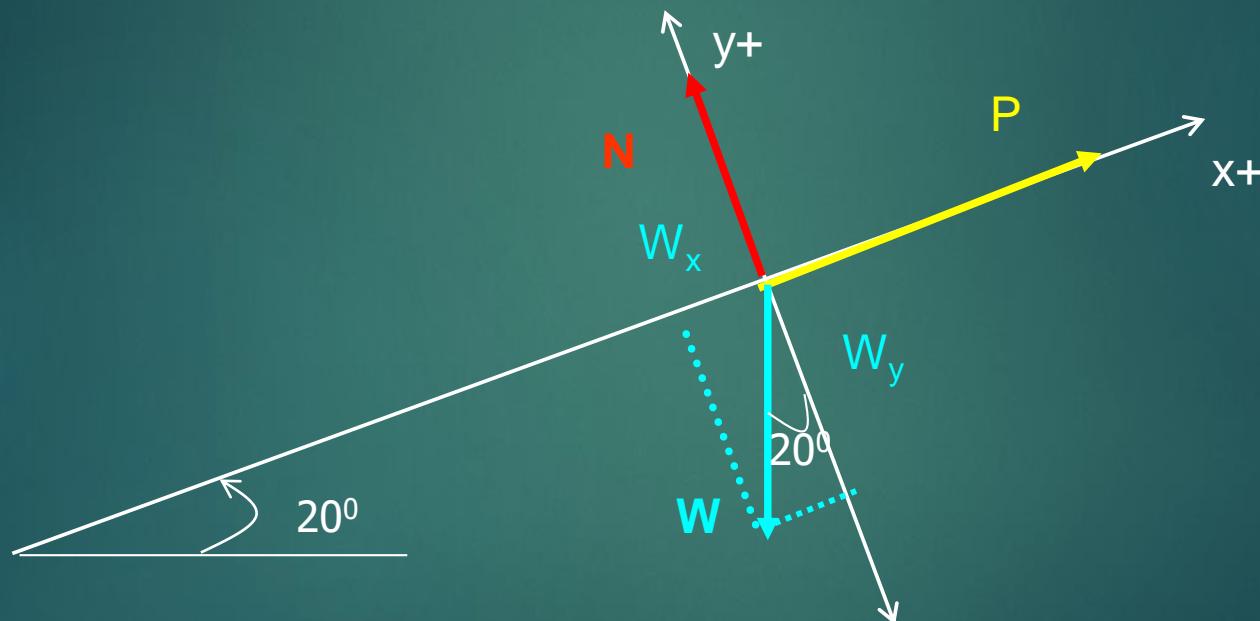
$$a_x = \frac{P_x}{m} = \frac{28.19N}{50kg} = 0.5638 \frac{m}{s^2}$$

Como se puede observar de los dos resultados, la aceleración máxima se obtiene cuando la fuerza aplicada es horizontal. A medida que aumentamos el ángulo de aplicación de la fuerza, la aceleración disminuye.

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO: Del mismo problema pero cuando la caja es subida por un plano inclinado 20^0 con respecto a la horizontal.

Diagrama de Cuerpo libre



Aplicaciones de las Leyes de Newton

Suma de fuerzas en x

$$\sum F_x = ma_x$$

$$P - W_x = ma_x$$

$$P - mg \operatorname{sen} \theta = ma_x$$

$$a_x = \frac{P - mg \operatorname{sen} \theta}{m}$$

$$a_x = \frac{30N - 50kg(9.81 \frac{m}{s^2}) \operatorname{sen} 20^0}{50kg}$$

$$a_x = \frac{30N - 167.76n}{50kg}$$

$$a_x = \frac{-137.76N}{50kg}$$

$$a_x = -2.75 \frac{m}{s^2}$$

Suma de fuerzas en y

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N - W_y = ma_y \quad (\text{no hay mov. en este eje})$$

$$N - mg \cos \theta = 0$$

$$N = mg \cos \theta$$

$$N = 50kg(9 - 81 \frac{m}{s^2}) \cos 20^0$$

$$N = 460.919 Nt$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

Como se obtiene un valor negativo para la aceleración, implica que la dirección de movimiento que supusimos era incorrecta, es decir que el cuerpo en lugar de subir baja. Lo anterior podemos reforzarlo si analizamos las fuerzas (o componentes) que actúan en el eje x.

La componente del peso es:

$$W_x = mg \operatorname{sen}\theta = 50\text{kg}(9.81 \frac{m}{s^2})(\operatorname{sen}20^0) = 167.76\text{Nt}$$

y la fuerza aplicada P tiene un valor de:

$$P = 30 \text{ Nt.}$$

Como la componente del peso es mayor que la fuerza aplicada, la dirección de la resultante de ambas tendrá esa misma dirección.

Lo cual nos lleva al siguiente ejemplo.

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO: Del mismo problema anterior, ¿cuál debe de ser la magnitud de la fuerza aplicada para poder sostener al cuerpo sobre el plano inclinado?

En este caso, la caja estaría en equilibrio, es decir en reposo, por lo que la aceleración $a_x = 0$ y $a_y = 0$
consecuentemente,

$$P - W_x = 0$$

$$P - mg \operatorname{sen} \eta = 0$$

$$P = mg \operatorname{sen} \eta$$

$$P = 167.76 \text{ Nt}$$

EJEMPLO: Del mismo problema, si deseo subir la caja con velocidad constante, ¿qué fuerza debo aplicar?

En este caso, el cuerpo se estaría moviendo pero con velocidad constante, es decir que nuevamente la aceleración sería nula por lo que la fuerza necesaria sería igual a la componente del peso.

$$P = W_x = 167.76 \text{ Nt}$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO: Si deseo subir la caja con una aceleración de 2 m/s^2 ¿Qué fuerza debo de aplicar?

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_x = 0$$

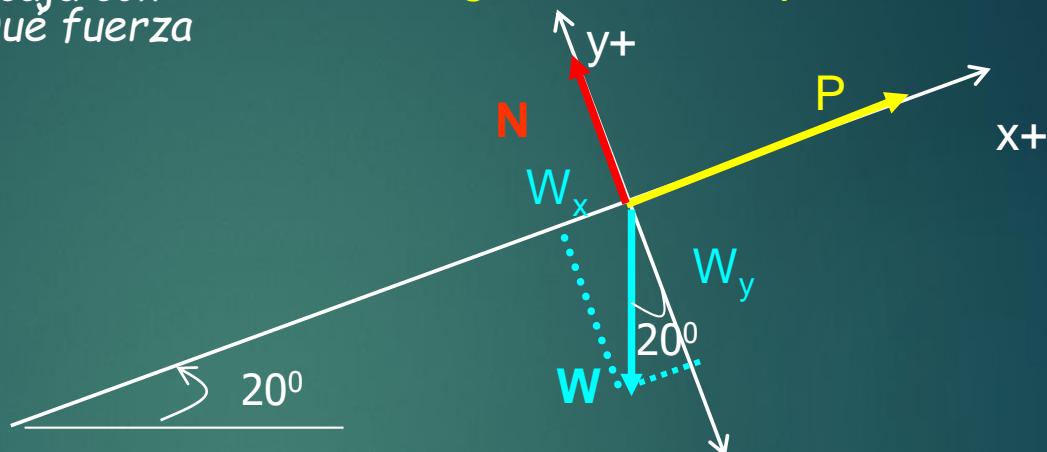
$$P - W_x = ma_x$$

$$P = ma_x + W_x$$

$$P = 50\text{kg}(2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}) + 50\text{kg}(9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})\text{sen}20^\circ$$

$$P = 267.76 \text{ Nt}$$

Diagrama de Cuerpo libre



EJEMPLO: ¿Qué tan grande es esta fuerza?

Para darnos una idea de que tan grande es ésta fuerza, debemos de compararla con algo que nos sea familiar, por ejemplo, para levantar a una persona que pesa 80 kg necesito aplicar una fuerza de:

$$F = mg = 80 \text{ kg} (9.81 \text{ m/s}^2) = 784.1 \text{ Nt}$$

Aplicaciones de las Leyes de Newton

EJEMPLO: Si el cuerpo parte del reposo y el plano tiene una longitud de 25 m. ¿Cuanto tiempo se invierte en subir la caja?, ¿Cuál será su velocidad al llegar a la parte alta del plano?

Este ya es un problema de cinemática, por lo que tendremos que usar las ecuaciones de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

puesto que la posición inicial es cero en la base del plano y como parte del reposo,

$$x = \frac{1}{2} a t^2$$

despejando el tiempo:

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(25m)}{2 \frac{m}{s^2}}} = \sqrt{25s^2} = 5s$$

a velocidad se determina a partir de la ecuación:

$$v = v_0 + at$$
$$v = 2 \frac{m}{s^2} (5s) = 10 \frac{m}{s}$$

Dinámica Segunda Parte (Fricción)

INTRODUCCIÓN

Una de las principales fuerzas que existen en la naturaleza son las fuerzas de fricción o de rozamiento.

Si no existiesen tales fuerzas, nos sería imposible caminar, sostener o agarrar objetos, en pocas palabras, sería un mundo inanimado ya que no sería posible el movimiento.

Para darnos una idea de lo anterior, imagíñese que se encuentra en el centro de un lago congelado al cual se le vertió aceite lubricante en su superficie, en esas condiciones, la superficie se puede considerar lisa y sin rozamiento.

¿Considera Usted que puede salir de ahí?

La respuesta inmediata que le surge tal vez sería que no, ya que al intentar caminar empezaría a resbalar o a patinar y se caería por no tener apoyo. Si su respuesta es esa (que no), es que no lo meditó bien y no ésta aplicando la tercera ley de Newton, lo único que tendría que hacer es soplar.

Fricción estática (f_s)

Donde el subíndice **s** proviene de la palabra "**statics**" cuyo significado es reposo o estático.

Las fuerzas de rozamiento se dan entre un par de superficies secas no lubricadas que están en contacto mutuo, son paralelas a las superficies en contacto y por lo general **se oponen a la dirección de movimiento** (no siempre ocurre así).

Si dos cuerpos están en contacto pero no existe fuerza aplicada a uno de ellos, no hay fuerza de rozamiento.

Las fuerzas de rozamiento aparecen en el momento en que se aplican fuerzas, cuando un cuerpo está en reposo, la fuerza de rozamiento empieza a incrementarse en la misma medida en que aumentamos la fuerza aplicada.

Para ilustrar lo anterior, pongamos el siguiente ejemplo: Tenemos un camión y queremos moverlo.

Viene una persona, le aplica una cierta fuerza y se observa que no puede moverlo. Si aplicásemos la segunda ley de Newton, al aplicar una fuerza, ésta debería de producir una aceleración, pero se observó que el camión no se movió, por lo tanto inferimos que existe una fuerza de igual magnitud y en sentido contrario a la fuerza aplicada, de tal forma que se está anulando. Tal fuerza es la fuerza de rozamiento estática.

Fricción estática (f_s)

Viene otra persona a ayudarle a la primera, (supongamos que ambas ejercen la misma fuerza) de tal forma que ambos empujan con una fuerza doble que la anterior. Sin embargo, el camión sigue sin moverse. De ello inferimos que al aumentar la fuerza aplicada, aumenta también la fuerza de fricción.

Viene una tercera persona y empuja también con la misma fuerza. El camión sigue sin moverse. La fuerza de rozamiento vuelve a incrementarse.

Viene una cuarta persona y se observa que el camión empieza a moverse, primero muy lentamente y después más rápidamente.

En la transición en que el camión pasa del reposo al movimiento, la fuerza de rozamiento adquiere su máximo valor. Dicho valor corresponde a la mínima fuerza necesaria para iniciar el movimiento. Todo lo anterior se ilustra en los siguientes dibujos:

Fricción estática (f_s)

sistema

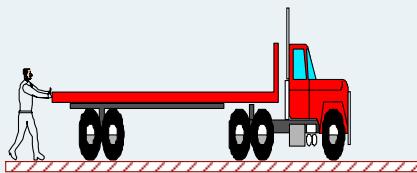
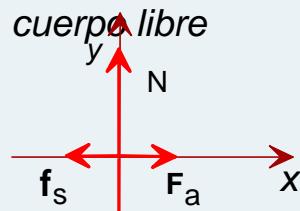


Diagrama de cuerpo libre



Aplicación de la Segunda ley

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} \quad (\text{forma vectorial})$$

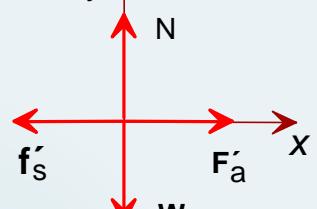
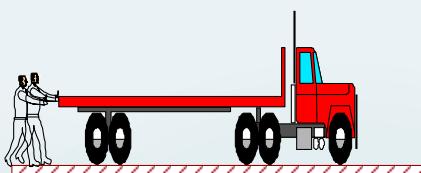
$$\sum F_x = m a_x \quad (\text{forma escalar})$$

$$F_a - f_s = 0 \quad (a_x = 0)$$

Observación del sistema

no hay mov.

$$F_a = f_s$$



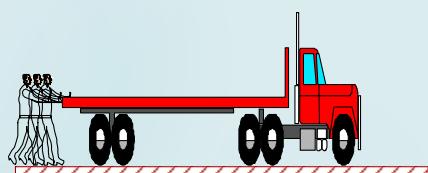
$$\sum F_x = m a_x$$

$$F'_a - f'_s = 0 \quad (a_x = 0)$$

no hay mov.

$$F'_a = f'_s$$

con $F'_a = 2 F_a$



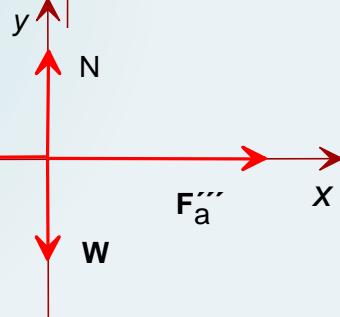
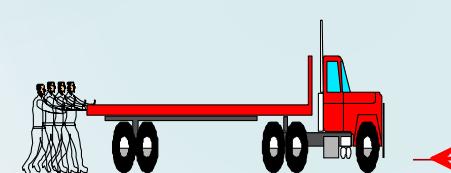
$$\sum F_x = m a_x$$

$$F''_a - f''_s = 0 \quad (a_x = 0)$$

no hay mov.

$$F''_a = f''_s$$

con $F''_a = 3 F_a$



$$\sum F_x = m a_x$$

$$F'''_a - f'''_s = 0$$

$$F'''_a = f'''_s$$

$f'''_s = f_{s\max}$

Transición entre reposo y mov., la aceleración se considera nula. En éste momento, la fuerza de rozamiento adquiere su máximo valor, la cual corresponde a la mínima fuerza aplicada para iniciar el movimiento.

Fricción cinética (f_k)

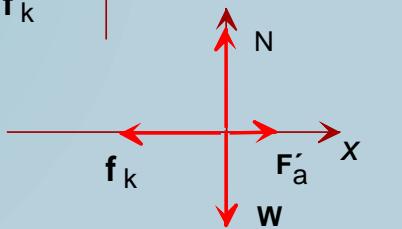
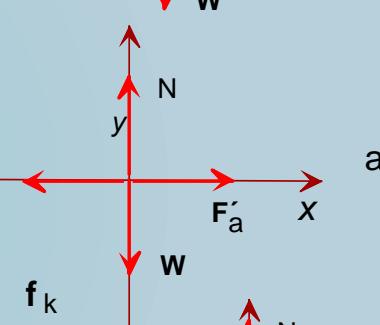
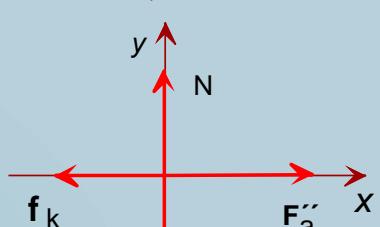
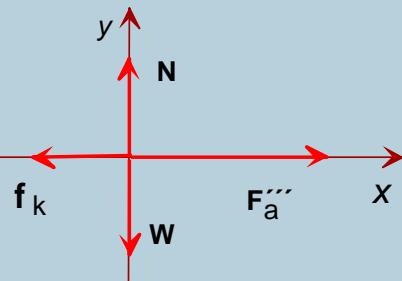
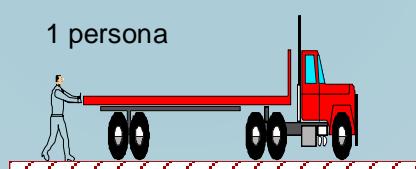
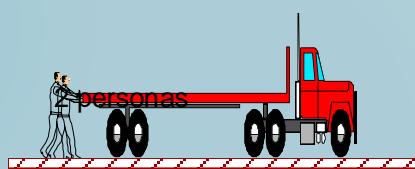
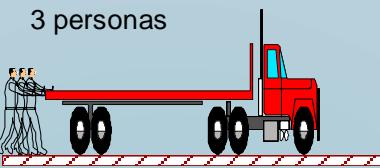
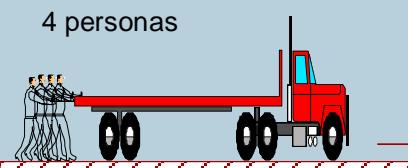
Al igual que la fuerza de rozamiento estática, la de rozamiento cinética también se da entre un par de superficies secas no lubricadas que se encuentran en movimiento relativo una con respecto a la otra, su dirección es opuesta a la dirección del movimiento.

En la última ilustración del dibujo anterior, con las cuatro personas empujando el camión con la misma fuerza con la que se inició el movimiento, éste empieza a moverse muy lentamente, pero si seguimos ejerciendo esa misma fuerza, observamos que la velocidad empieza a incrementarse paulatinamente, es decir, el camión empieza a acelerarse de tal forma que después de unos segundos, prácticamente iremos corriendo detrás de él.

La fuerza de rozamiento persiste, pero pasa a ser una de rozamiento cinético f_k (donde el subíndice **k** proviene de la palabra "**kinematics**" que significa movimiento).

La experiencia nos indica que esta fuerza, es menor que la estática, ya que el camión empieza a acelerarse con la misma fuerza ejercida al comenzar el movimiento.

Fricción cinética (f_k)



$$\sum F_x = m a_x$$

$$F_a''' - f_k = m a_x$$

$$a_x = \frac{F_a''' - f_k}{m} \neq 0$$

con $a_x \neq 0$

Como a_x es diferente de cero, implica que $F_a''' > f_k$

$$\sum F_x = m a'_x$$

$$a'_x = \frac{F_a'' - f_k}{m} \neq 0$$

Con 3 personas, la fuerza aplicada disminuye por lo que la aceleración ($a' < a$) pero el camión sigue acelerado.

$$\sum F_x = m a_x$$

$$F_a' - f_k = m a''_x$$

$$a''_x = \frac{F_a' - f_k}{m} = 0$$

$$F_a' = f_k$$

Con 2 personas, la fuerza aplicada vuelve a disminuir, pero en este caso, se iguala con la fuerza de rozamiento por lo que no hay aceleración. Sin embargo, como el camión está en movimiento, se seguirá moviendo pero con velocidad constante.

$$\text{En este caso, } F_a < f_k$$

$$a'''_x = \frac{F_a - f_k}{m} < 0$$

Con una persona, la fuerza de rozamiento será mayor que la fuerza aplicada, por lo que el camión comenzará a disminuir la velocidad (frenarse) hasta que quede en reposo.

Fricción cinética (f_k)

Si empezamos a disminuir la fuerza aplicada, llegará un momento en que ésta se iguale con la fuerza de rozamiento cinético, en cuyo caso la aceleración será igual a cero.

Pero como el camión ya tiene una velocidad en dicho instante de tiempo, entonces se seguirá moviendo con esa misma velocidad (movimiento rectilíneo uniforme).

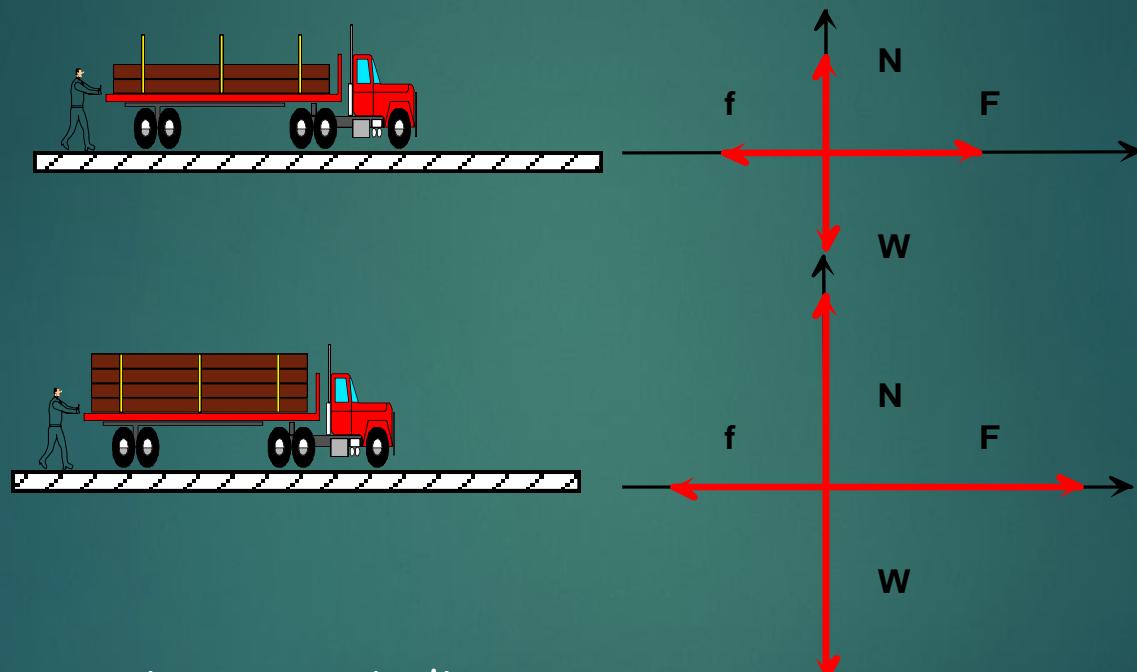
De continuar disminuyendo la fuerza aplicada, entonces la de rozamiento cinético será mayor, por lo que nuevamente el camión entrará a un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (desacelerado), disminuyendo su velocidad hasta quedar nuevamente en reposo.

De lo anterior se concluye que:

$$f_s > f_k$$

Coeficientes de Fricción

Veremos ahora de que dependen las fuerzas de rozamiento. Para ello, supongamos que cargamos el camión y que nuevamente queremos moverlo.



Las figuras anteriores nos indican que entre mayor peso tenga el camión, necesitaremos una mayor fuerza para poder moverlo, eso nos indica que la fuerza de rozamiento a crecido en forma proporcional al peso del camión. Luego entonces, a grosso modo podemos afirmar que:

La fuerza de rozamiento es proporcional al peso del camión.

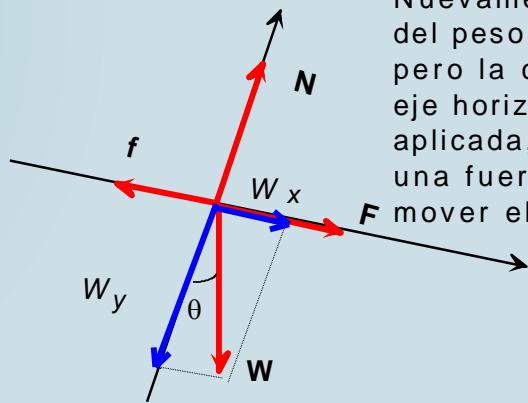
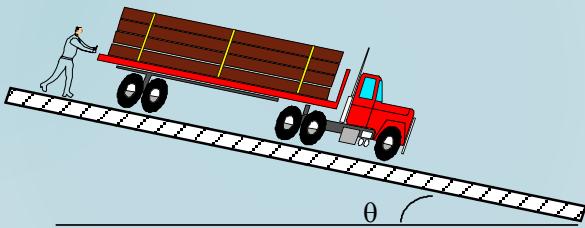
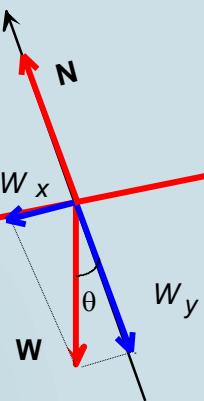
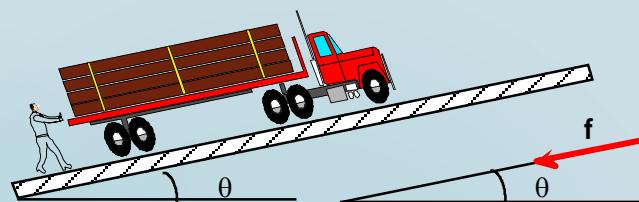
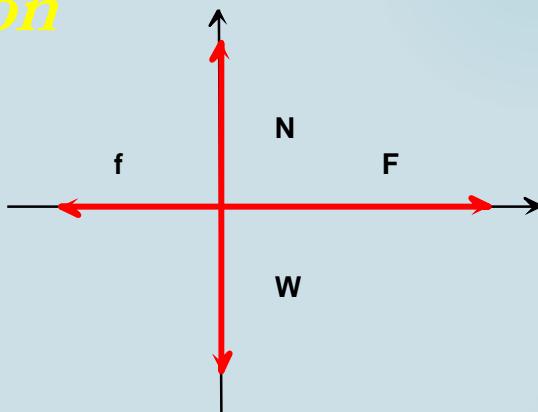
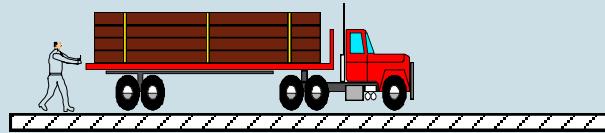
Coeficientes de Fricción

Sin embargo, como no hay movimiento en el eje vertical, el peso es igual a la fuerza normal y consecuentemente, la fuerza de rozamiento está relacionada con dicha fuerza normal.

Para ver esto, analicemos nuevamente el ejemplo anterior en los siguientes casos:

- a) Camión en piso horizontal.
- b) Camión en piso inclinado
 - i) de subida.
 - ii) de bajada.

Coeficientes de Fricción



Al descomponer el peso en sus componentes rectangulares, la componente en el eje x se suma a la fuerza normal, por lo que la Fuerza aplicada tendrá que ser mayor. Como en el eje vertical sigue sin haber movimiento, la componente vertical es igual a fuerza normal, la cual disminuye

Nuevamente la componente vertical del peso es igual a la Fuerza normal, pero la componente del peso en el eje horizontal le ayuda a la fuerza aplicada, por lo que se requiere de una fuerza aplicada menor para F mover el camión.

Coeficientes de Fricción

Por lo anterior, la fuerza de rozamiento, mas que proporcional al peso, decimos que es proporcional a la Fuerza normal.

La constante de proporcionalidad depende de las superficies que estén en contacto. Así por ejemplo, si el camión se encuentra en una superficie horizontal, no es lo mismo que tal superficie sea de concreto, de tierra que de arena. Se requiere de una menor fuerza cuando se tienen como superficies en contacto *concreto-hule* que cuando se tiene *tierra-hule* y una fuerza aún mayor cuando las superficies son *arena-hule*.

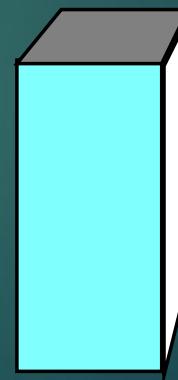
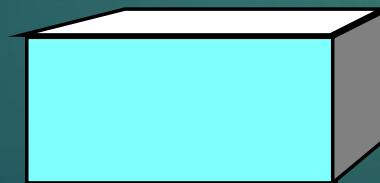
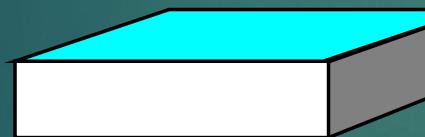
Consecuentemente, la fuerza de rozamiento depende del par de superficies en contacto, tal dependencia es lo que denominamos *coeficientes de rozamiento*. Cuando está en reposo es *estático* (m_s) y en movimiento, *cinético* (m_k).

Generalmente, el coeficiente de rozamiento *estático* es mayor que el *cinético*.

$$m_s > m_k$$

Coeficientes de Fricción

Existen dos tipos de rozamiento, el que hemos analizado es el de *rodamiento*, el otro es el de *deslizamiento*, siendo menor el de rodamiento que el de deslizamiento. Por ejemplo, no es lo mismo mover el camión sin freno (rodamiento) que cuando están puestos (deslizamiento). Adicionalmente a que las fuerzas de rozamiento son proporcionales a la fuerza normal y a las superficies en contacto, dichas fuerzas son aproximadamente independientes del área de contacto. Para ello analicemos los siguientes dibujos:



Coeficientes de Fricción

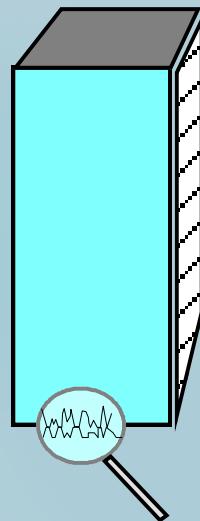
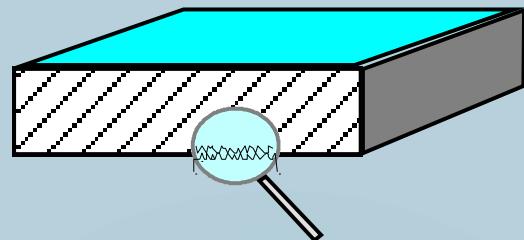
El bloque tiene el mismo peso, independientemente de como se coloque, si de lado, de canto o parado, las tres áreas en las que se apoya son diferentes, el área A_1 es mayor que el área A_2 , y ésta a su vez es mayor que el área A_3 .

La Fuerza aplicada para moverlo es la misma, debido a que al apoyarse el bloque en un área mayor, la presión que éste ejerce sobre la superficie se reduce, y al apoyarse en un área menor, la presión que ejerce sobre la superficie aumenta.

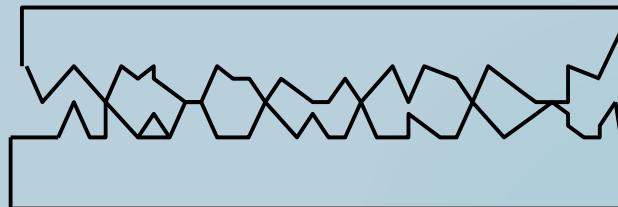
Esto hace que el área efectiva de apoyo sea la misma independientemente de como se coloque el bloque, ya que al estar apoyado en una mayor área, las irregularidades (picos) de las superficies no son alteradas, en tanto que al apoyarse en un área menor, si se afectan las irregularidades, quebrándose y aumentando el área efectiva de apoyo.

Lo anterior se explica mejor en los siguientes dibujos a nivel microscópico.

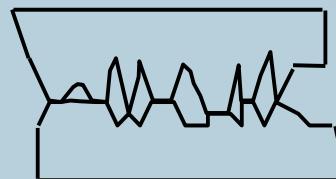
Coeficientes de Fricción



puntos de apoyo



mayor área distribuída en mayor puntos de apoyo, haciendo una área efectiva de apoyo A'



menor área distribuída en menor puntos de apoyo (pero con mayor área) haciendo una área efectiva de apoyo A''

Coeficientes de Fricción

Resumiendo, las fuerzas de fricción son directamente proporcionales a la fuerza normal, donde la constante de proporcionalidad son los coeficientes de rozamiento. Lo anterior expresado en forma de ecuación matemática se reduce a:

fuerza de rozamiento estática:

$$f_s \leq m_s$$

fuerza de rozamiento cinética:

$$f_k = m_k$$

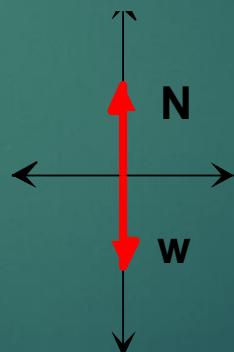
Donde el signo menor ($<$) en la de rozamiento estático indica que esta fuerza crece a medida que aumentamos la fuerza aplicada y el signo igual ($=$) es cuando la fuerza de rozamiento estática adquiere su máximo valor, siendo éste justo en el instante en que se va a iniciar el movimiento.

Aplicación de Fricción

EJEMPLO: Determinar el coeficiente de rozamiento estático entre un tablón y un ladrillo.

Para determinar el coeficiente, se realiza el siguiente experimento: Uno de los extremos del tablón se apoya en un cuerpo fijo para evitar que resbale. Con el ladrillo colocado en el otro extremo, gradualmente se va levantando el tablón y se deja de levantar cuando se observa que el ladrillo empieza a deslizarse.

Analicemos el experimento mediante los siguientes dibujos.

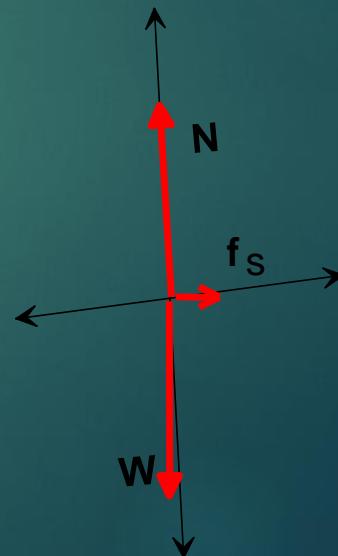
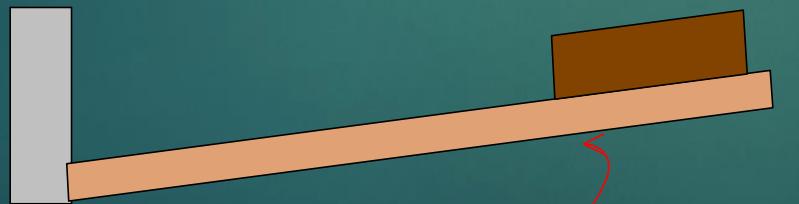


El sistema se encuentra en reposo
Las únicas Fuerzas que actúan sobre
el ladrillo son la Fuerza normal y el
peso, las cuales por la segunda ley de
Newton son iguales. Aún no se tiene
la fuerza de rozamiento estática.

Aplicación de Fricción

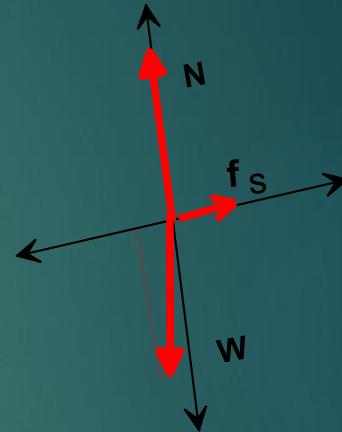
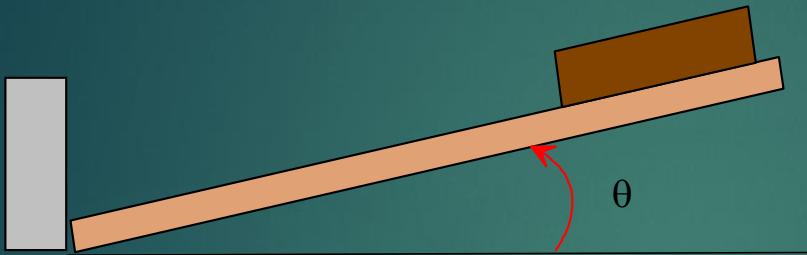
Al levantar el tablón, hacemos un diagrama de cuerpo libre, donde el eje horizontal se toma paralelo al tablón, de esta forma, la fuerza normal sigue apareciendo en el eje vertical en tanto que el peso (que es vertical y hacia abajo) forma un ángulo de 5 grados con la "vertical", de tal forma que en este sistema de referencia tiene una componente en el eje vertical y otra en el eje horizontal. Como no hay desplazamiento en ninguno de los ejes (de la observación vemos que el bloque no se mueve), al aplicar la segunda ley de Newton, tenemos que la fuerza normal se equilibra con la componente vertical del peso ($N = W_y$). En el caso de la componente horizontal, ésta es la que debería hacer que el ladrillo se deslizara sobre el tablón, pero como no lo hace, inferimos que existe una fuerza que se opone al movimiento, siendo ésta la fuerza de rozamiento estática ($f_s = W_x = mg \operatorname{sen} \theta$).

El tablón se levanta 5 grados



Aplicación de Fricción

El tablón se levanta 10 grados



Como sigue sin haber movimiento, nuevamente la fuerza normal se equilibra con la componente vertical del peso. La componente horizontal del peso aumenta y consecuentemente la fuerza de rozamiento estática.

Aplicación de Fricción

El tablón se levanta 15 grados



Se repiten las mismas aseveraciones anteriores, debido a que el ladrillo aún permanece en reposo. Hagámoslo ahora mediante ecuaciones.

$$W_x \sum_s F_x = m a_x$$

$$N - W_y = m a_y \quad \sum F_y = m a_y$$

(Como no hay movimiento $a_x = 0 ; a_y = 0$)

$$W_x - f_s = 0$$

$$N - W_y = 0$$

$$W_x = f_s$$

$$N = W_y$$

$$mg \operatorname{sen} \eta = f_s$$

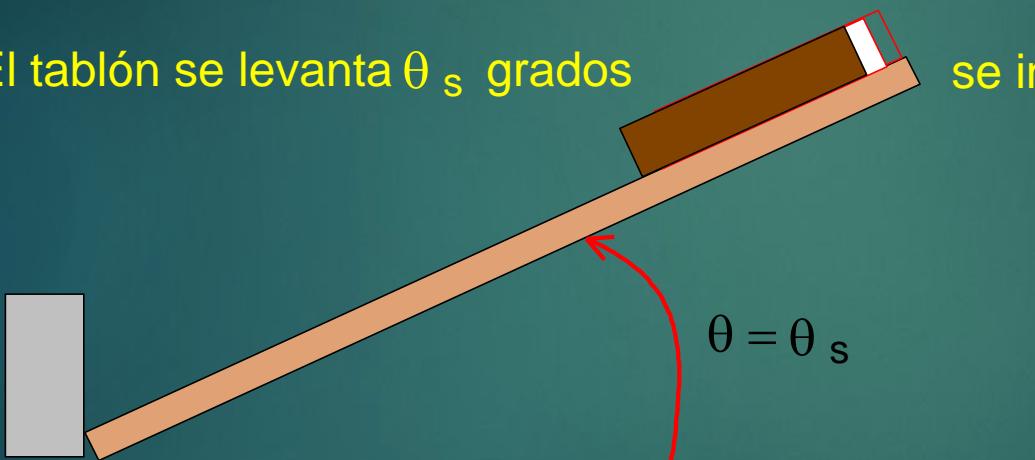
$$N = mg \cos \eta$$

Aplicación de Fricción

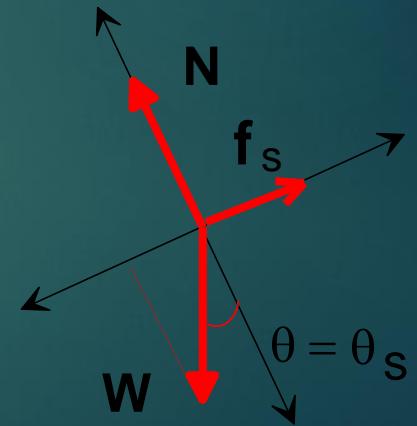
Obsérvese que la fuerza de rozamiento estática depende del peso del cuerpo (que es constante) y del ángulo de inclinación del tablón, el cual estamos variando. Lo mismo sucede con la fuerza normal. la cual disminuye a medida que aumentamos el ángulo ($1 < \cos \theta < 0$; $\cos 0^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$).

Ahora bien, existirá un ángulo al cual denominamos θ_s bajo el cual el ladrillo empieza a moverse. Cuando observemos esto, dejamos de levantar el tablón y con un transportador medimos el ángulo.

El tablón se levanta θ_s grados

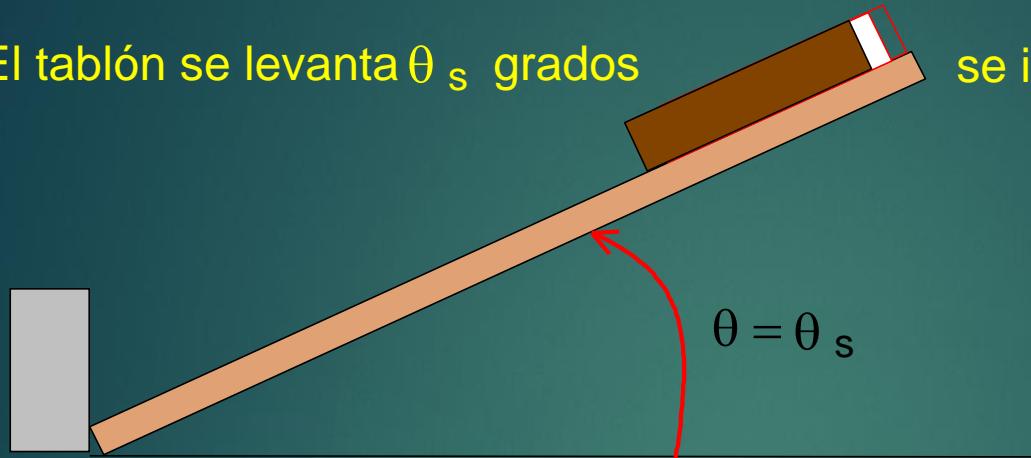


se inicia el movimiento



Aplicación de Fricción

El tablón se levanta θ_s grados



se inicia el movimiento

$$W_x - \sum F_x = ma_x$$

$$N - W_y = ma_y \quad \sum F_y = ma_y$$

(Como apenas se va a iniciar el mov. $a_x = 0$; $a_y = 0$)

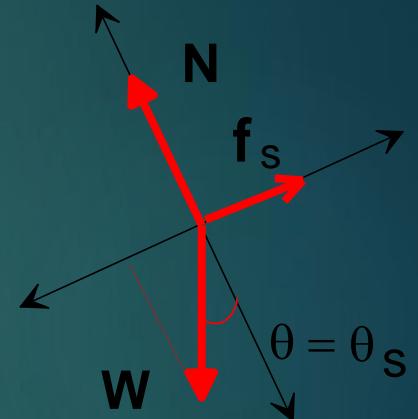
$$W_x - f_s = 0$$

$$W_x = f_s$$

$$mg \sin \theta_s = f_s$$

Pero

$$F_s = m_s N \quad (\text{adquiere el máximo justo cuando se inicia el movimiento})$$



Aplicación de Fricción

sustituyendo:

$$mg \operatorname{sen} \theta_s = m_s N$$

sustituyendo nuevamente:

$$mg \operatorname{sen} \theta_s = m_s mg \operatorname{cos} \theta_s$$

despejando:

$$m_s = \operatorname{tan} \theta_s$$

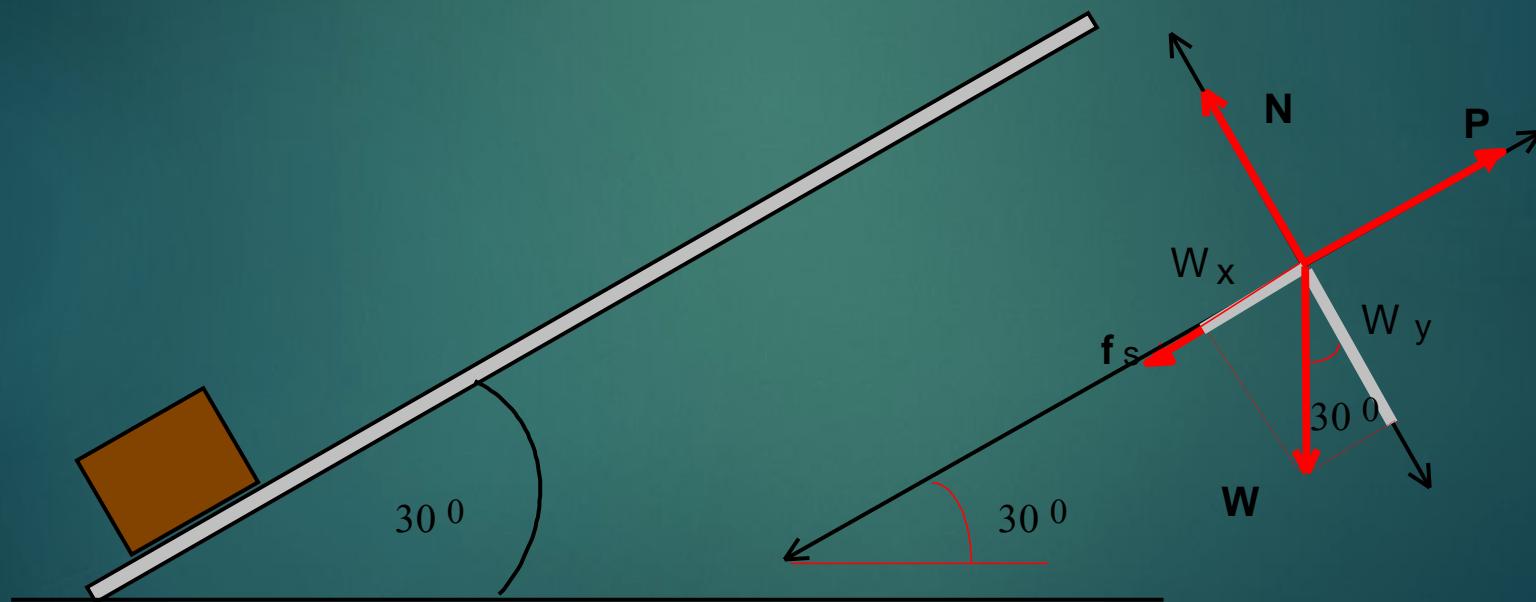
Por lo que para medir el coeficiente de rozamiento estático entre cualquier par de superficies, basta con colocar una encima de la otra y levantar gradualmente la inferior, deteniéndonos y midiendo el ángulo bajo el cual se inicia el movimiento. A éste ángulo le sacamos la tangente y listo. Ya tenemos el coeficiente de rozamiento estático.

Para el caso del coeficiente de rozamiento cinético, se procede de igual manera, pero resulta problemático debido a que debemos medir el ángulo ($\theta = \theta_k$) bajo el cual el cuerpo superior desliza sobre el inferior con velocidad constante.

Todos los problemas con rozamiento, se resuelven de igual manera que los problemas sin rozamiento vistos en las aplicaciones de las leyes de Newton, la única diferencia es que debemos de incorporar una nueva fuerza (fuerza de rozamiento estática o cinética según sea el caso).

Aplicación de Fricción

EJEMPLO: Determine la fuerza necesaria que debe de ejercer una persona para hacer que un bloque de 40 kg empiece a moverse hacia arriba sobre un plano inclinado 30° con respecto a la horizontal, si el coeficiente de rozamiento estático entre ambas superficies es de 0.60. Una vez iniciado el movimiento, con esa misma fuerza aplicada, determine la aceleración del bloque si el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.40. Y por último, determine la fuerza necesaria para que el bloque se deslice hacia arriba con velocidad constante.



Aplicación de Fricción

Para que empiece a moverse:

De la aplicación de la segunda ley al diagrama de cuerpo libre tenemos que:

$$\sum F_x = ma_x$$

$$P - f_s - W_x = 0 \quad (\text{el cuerpo está en reposo, } a_x = 0)$$

$$P = f_s + W_x$$

$$P = m_s N + mg \operatorname{sen} \theta$$

De la suma de fuerzas en el eje vertical, determinamos a la fuerza normal.

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N - W_y = 0$$

(el cuerpo en ningún momento se mueve en el eje vertical $a_y = 0$)

$$N = mg \cos \theta$$

Aplicación de Fricción

sustituyendo en la expresión de P encontrada en la sumatoria de fuerzas en el eje "horizontal" (eje x)

$$P = \mu_s mg \cos \theta + mg \sen \theta$$

$$P = mg (\mu_s \cos \theta + \sen \theta)$$

sustituyendo valores

$$P = (40\text{kg})(9.81\text{m/s}^2)(0.6 \cos 30^\circ + \sen 30^\circ)$$

$$P = 400.09 \text{ Nt}$$

El cuerpo ya se está moviendo y el coeficiente pasa a ser uno de rozamiento cinético, con esa misma fuerza aplicada de 400.09 N el cuerpo se acelera, la aceleración es:

$$\Sigma F = ma$$

$$a = \frac{P - f_k - W_x}{m} a_x$$

$$a = \frac{P - \mu_k N - mg \sen \theta}{m}$$

Aplicación de Fricción

De la suma de fuerzas en el eje vertical, determinamos a la fuerza normal.

$$\sum F_y = ma_y$$

$$N - W_y = 0$$

(el cuerpo en ningún momento se mueve en el eje vertical $a_y = 0$)

$$N = mg \cos \theta$$

sustituyendo en la expresión de la aceleración encontrada en la sumatoria de fuerzas en el eje "horizontal" (eje x)

$$a = \frac{P - \mu_k mg \cos \theta - mg \sin \theta}{m}$$

sustituyendo valores

$$a = 1.69 \text{ m/s}^2$$

Ahora determinaremos la fuerza necesaria para que el cuerpo se siga moviendo hacia arriba con velocidad constante

$$\sum F_x = ma_x$$

$$P - f_k - W_x = 0$$

(el cuerpo está moviéndose con velocidad constante, $a_x = 0$)

$$P = f_k + W_x$$

Aplicación de Fricción

$$P = m_k N + mg \operatorname{sen} \eta$$

De la suma de fuerzas en el eje vertical, determinamos a la fuerza normal.

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$N - W_y = 0$$

(el cuerpo en ningún momento se mueve en el eje vertical $a_y = 0$)

$$N = mg \operatorname{cos} \theta$$

sustituyendo en la expresión de P encontrada en la sumatoria de fuerzas en el eje "horizontal" (eje x)

$$P = m_k N + mg \operatorname{sen} \eta$$

$$P = m_k mg \operatorname{cos} \eta + mg \operatorname{sen} \eta$$

$$P = mg (m_k \operatorname{cos} \eta + \operatorname{sen} \eta)$$

sustituyendo valores

$$P = (40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.4 \operatorname{cos} 30^\circ + \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$P = 332.13 \text{ N.}$$