1.1 Números reales

Repasemos los tipos de números que constituyen el sistema de los números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los distintos tipos de números reales se inventaron para cumplir con necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas por abajo de cero grados, los números racionales para conceptos como "medio litro de leche", y los números irracionales para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** están formados por los números naturales junto con los negativos y el 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al formar cocientes con los enteros. Por lo tanto, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Ejemplos son:

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre cero es imposible, por lo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, como $\sqrt{2}$, que no pueden ser expresados como un cociente de enteros y, por lo tanto, se llaman **números irracionales**. Se puede demostrar que, con diferentes grados de dificultad, estos números son también irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

El conjunto de todos los números reales se denota mediante el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin calificativo, queremos decir "número real". En la figura 1 se ilustra un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

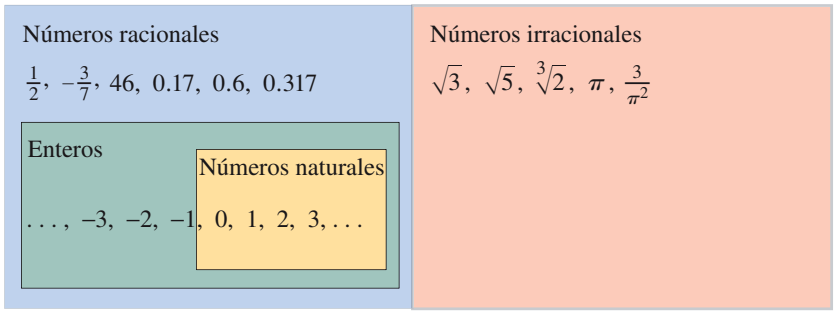


Figura 1
El campo de los números reales

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo en un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= \quad 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por potencias adecuadas de 10, y luego restar para eliminar la parte que se repite.)

Todos los números reales tienen una representación decimal. Si el número es racional, entonces su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra significa que la sucesión de cifras se repite por siempre.) Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si interrumpimos la expansión decimal de cualquier número en un cierto lugar, tenemos una aproximación del número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo $\approx$ quiere decir "es aproximadamente igual a". A medida que tenemos más decimales es mejor la aproximación.

Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$ y que $5 + 7 = 7 + 5$ y que $513 + 87 = 87 + 513$, y así sucesivamente. En álgebra, expresamos estos hechos, que son infinitos, mediante la expresión

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una manera concisa de decir que "cuando se suman dos números, no importa el orden en que se sumen". Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la suma. De acuerdo con nuestra experiencia con los números, sabemos que las propiedades de la tabla siguiente son también válidas.

Propiedades de los números reales

Propiedad	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando se suman dos números, no importa el orden.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando se multiplican dos números no importa el orden.
Propiedades asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos se suman primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números no importa cuáles dos se multiplican primero.
Propiedad distributiva		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando se multiplica un número por una suma de dos números se obtiene el mismo resultado al multiplicar el número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

La propiedad distributiva se aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. En la figura 2 se explica por qué esta propiedad se aplica en el caso en el cual todos los números son enteros positivos, pero la propiedad es válida para cualquier número real a, b y c.

La propiedad distributiva es muy importante porque describe la manera en que interactúan la adición y la multiplicación.

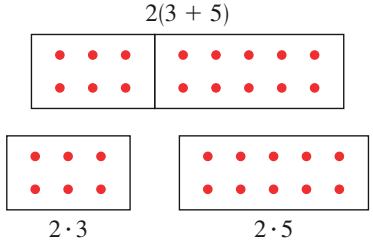


Figura 2
La propiedad distributiva

Ejemplo 1 Uso de la propiedad distributiva

a) $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ Propiedad distributiva

$= 2x + 6$ Simplificación

b) $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ Propiedad distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ Propiedad distributiva

$= ax + bx + ay + by$ Propiedad asociativa de la suma

En el último paso quitamos los paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la suma. ■

No suponga que $-a$ es un número negativo. Si $-a$ es negativa o positiva depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), que es un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; se le llama **elemento idéntico** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que cumple $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación inversa a la adición; para restar un número de otro simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar los números reales que contienen negativos, utilizamos las propiedades siguientes.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La propiedad 6 establece el hecho intuitivo de que $a - b$ es el negativo de $b - a$. La propiedad 5 se usa a menudo con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

Ejemplo 2 Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

a) $-(x + 2) = -x - 2$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ Propiedad 2: $-(-a) = a$ ■

El número 1 es especial para la multiplicación; se le llama **elemento idéntico** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real diferente de cero a tiene un **inverso**, $1/a$, que cumple $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación inversa de la multiplicación; para dividir un número multiplicamos por el inverso de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** de a y b, o bien, como la **fracción** a entre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar los números reales usando la operación de división usamos las propiedades siguientes.

Propiedades de las fracciones

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Cuando se **multiplican fracciones**, se multiplican los numeradores y los denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Cuando se **dividen fracciones**, se invierte el divisor y se multiplica.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Cuando se **suman fracciones** con el **mismo denominador** se suman los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Cuando se **suman fracciones** con **denominadores diferentes**, se busca un denominador común. Luego se suman todos los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Se anulan** los números que son **factores comunes** en el numerador y en el denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por lo que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Por lo regular, cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, no se usa la propiedad 4. En lugar de eso se vuelven a escribir las fracciones de modo que tengan el denominador común más pequeño posible (con frecuencia más pequeño que el producto de los denominadores), y luego se aplica la propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se explica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 Uso del MCD en la suma de fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

Solución Al factorizar cada denominador en sus factores primos se tiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el Mínimo Común Denominador (MCD) efectuando el producto de todos los factores que hay en estas factorizaciones y se usa la potencia más alta de cada factor.

Por consiguiente, el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3}$$ Uso del denominador común

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$ Propiedad 3: sumar fracciones con el mismo denominador ■

La recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 3. La dirección positiva, hacia la derecha, se señala por medio de una flecha. Escogemos un punto de referencia O arbitrario, al que llamamos **origen**, el cual corresponde al número real 0. Dada una unidad conveniente de medición, cada número positivo x se representa por un punto en la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta recibe el nombre de **eje coordenado** o de **recta de los números reales** o simplemente **recta real**. Con frecuencia identificamos el punto con su coordenada y pensamos que un número es el inicio de la recta numérica.

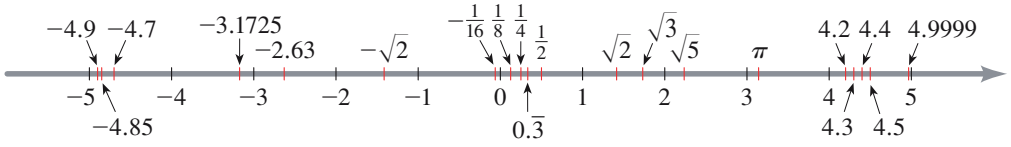


Figura 3 Recta de los números reales

Los números reales están *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Es lo mismo que decir que ***b* es mayor que *a*** y escribir $b > a$. El símbolo $a \leq b$ (o $b \geq a$), quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y se lee como "a es menor que o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \leq 2$$

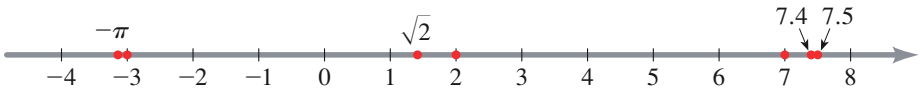


Figura 4

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se denominan **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento que pertenece a S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los enteros, entonces, $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos de los conjuntos se pueden describir acomodando sus elementos dentro de corchetes. Por ejemplo, un conjunto A que consiste en todos los enteros positivos menores que 7 se expresa como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en la **notación de conjuntos**:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$."

Si S y T son conjuntos, entonces la **unión** $S \cup T$ es el conjunto que consta de todos los elementos que están en S o en T o en ambos. La **intersección** de S y de T es el conjunto $S \cap T$ que consiste en todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte que es común a S y a T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$ es el conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo 4 Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, determine los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

Solución

$$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$ Todos los elementos que están en S o en T

$$S \cap T = \{4, 5\}$$ Elementos comunes tanto a S como a T

$$S \cap V = \varnothing$$ S y V no tienen elementos en común ■

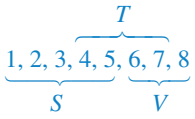


Figura 5
Intervalo abierto (a, b)

Figura 6
Intervalo cerrado $[a, b]$

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con mucha frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos lineales. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b consta de todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** desde a hasta b comprende los extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

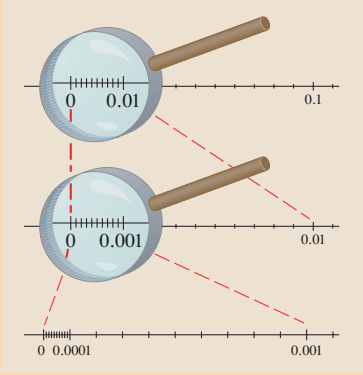
Observe que el paréntesis ( ) en la notación de los intervalos y los círculos abiertos en la gráfica de la figura 5 indican que los extremos están *excluidos* del intervalo. Por otro lado, los corchetes [ ] y los círculos llenos de la figura 6 indican que los extremos están *incluidos*. Los intervalos pueden incluir sólo un punto extremo, o se podrían prolongar hasta el infinito en una dirección o en ambas direcciones. En la siguiente tabla se ilustran los tipos posibles de intervalos.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo ∞ ("infinito") no es un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, indica simplemente que el intervalo no tiene punto final a la derecha, sino que se prolonga hacia el infinito en la dirección positiva.

No hay número más pequeño o más grande en un intervalo abierto

Cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números —cada punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real—. En el intervalo cerrado [0, 1], el número más pequeño es 0 y el más grande es 1, pero el intervalo abierto (0, 1) no contiene un número que sea el más pequeño o el más grande. Para entenderlo, observe que 0.01 está cerca de cero, pero 0.001 está más cerca, y 0.0001 está todavía más cerca, y así sucesivamente. De este modo, siempre podemos encontrar un número en el intervalo (0, 1) más cercano a cero que cualquier número dado. Puesto que 0 en sí no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número que sea el más pequeño. Con el mismo razonamiento, 0.99 está cercano a 1, pero 0.999 está más cerca, 0.9999 es aún más cercano, y así sucesivamente. Como el 1 no está en el intervalo, éste no contiene un número que sea el más grande.



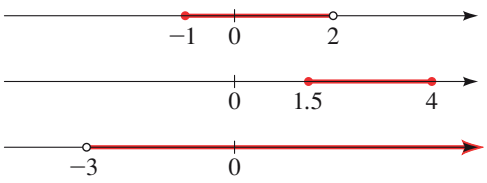
Ejemplo 5 Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades, y luego grafíquelos.

a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$

b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$

c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



■

Ejemplo 6 Determinar la unión y la intersección de intervalos

Grafique cada conjunto

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ b) $(1, 3) \cup [2, 7]$

Solución

a) La intersección de dos intervalos consiste en los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$(1, 3) \cap [2, 7] = \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}$$
$$= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)$$

Este conjunto se ilustra en la figura 7.

b) La unión de dos intervalos son los números que están en un intervalo o en el otro o en ambos. Por lo tanto,

$$(1, 3) \cup [2, 7] = \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}$$
$$= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]$$

Este conjunto se ilustra en la figura 8.

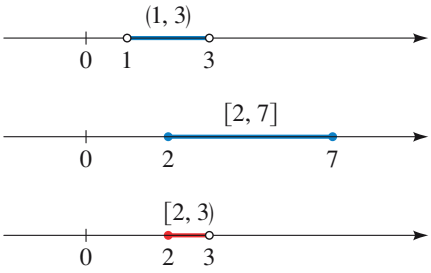


Figura 7
$(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

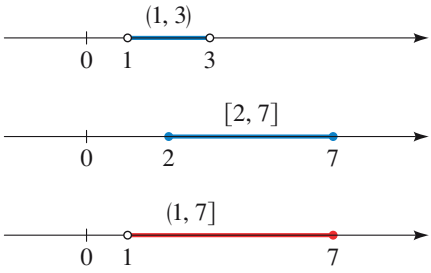


Figura 8
$(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$ ■

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 sobre la recta de los números reales (véase la figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para cada número a. Tenga en cuenta que $-a$ es positiva cuando a es negativa, y entonces tenemos la definición siguiente.

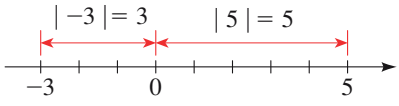


Figura 9

Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7 Determinación de los valores absolutos de números

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$) ■

Cuando se trabaja con números absolutos, usamos las propiedades siguientes.

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3} \right\rvert = \frac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

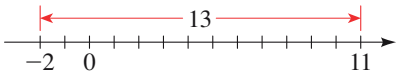


Figura 10

¿Cuál es la distancia en la recta numérica entre los números -2 y 11? En la figura 10, vemos que la distancia es 13. Llegamos a este resultado luego de determinar $|11 - (-2)| = 13$, o bien, $|(-2) - 11| = 13$. De acuerdo con esta observación damos la definición siguiente (véase la figura 11).

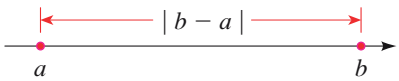


Figura 11
Longitud de un segmento de recta $= |b - a|$

Distancia entre puntos de la recta de los números reales

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta numérica es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De acuerdo con la propiedad 6 se infiere que $|b - a| = |a - b|$. Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a.

Ejemplo 8 Distancia entre puntos de la recta numérica

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ilustra en la figura 12. ■

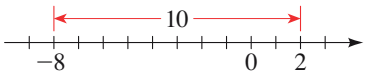


Figura 12

1.1 Ejercicios

1–2 ■ Liste los elementos del conjunto dado que son
a) números naturales
b) enteros
c) números racionales
d) números irracionales

1. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

2. $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

3–10 ■ Establezca la propiedad de los números reales que se está usando.

3. $7 + 10 = 10 + 7$

4. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

5. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

6. $2(A + B) = 2A + 2B$

7. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

8. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

9. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

10. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

11–14 ■ Escriba de nuevo la expresión aplicando la propiedad dada de los números reales

11. Propiedad conmutativa de la adición, $x + 3 =$ _____

12. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$ _____

13. Propiedad distributiva, $4(A + B) =$ _____

14. Propiedad distributiva, $5x + 5y =$ _____

15–20 ■ Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.

15. $3(x + y)$

16. $(a - b)8$

17. $4(2m)$

18. $\frac{4}{3}(-6y)$

19. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$

20. $(3a)(b + c - 2d)$

21–26 ■ Efectúe las operaciones indicadas.

21. **a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

22. **a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

23. **a)** $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

24. **a)** $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

25. **a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

26. **a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

27–28 ■ Escriba el símbolo correcto ($<$, $>$ o $=$) en el espacio.

27. **a)** $3 \quad \frac{7}{2}$ **b)** $-3 \quad -\frac{7}{2}$ **c)** $3.5 \quad \frac{7}{2}$

28. **a)** $\frac{2}{3} \quad 0.67$ **b)** $\frac{2}{3} \quad -0.67$ **c)** $|0.67| \quad |-0.67|$

29–32 ■ Diga de cada desigualdad si es verdadera o falsa.

29. **a)** $-6 < -10$ **b)** $\sqrt{2} > 1.41$

30. **a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

31. **a)** $-\pi > -3$ **b)** $8 \le 9$

32. **a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **b)** $8 \le 8$

33–34 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

33. **a)** x es positiva
b) t es menor que 4
c) a es mayor que o igual a π
d) x es menor que $\frac{1}{3}$ y es mayor que -5
e) La distancia desde p hasta 3 es cuando mucho 5

34. **a)** y es negativa
b) z es mayor que 1
c) b es cuanto más 8

d) w es positiva y es menor o igual a 17

e) y está por lo menos a 2 unidades desde π

35–38 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

35. **a)** $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

36. **a)** $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

37. **a)** $A \cup C$ **b)** $A \cap C$

38. **a)** $A \cup B \cup C$ **b)** $A \cap B \cap C$

39–40 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

39. **a)** $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

40. **a)** $A \cap C$ **b)** $A \cap B$

41–46 ■ Exprese el intervalo en forma de desigualdad, y luego grafique el intervalo.

41. $(-3, 0)$ **42.** $(2, 8]$

43. $[2, 8)$ **44.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

45. $[2, \infty)$ **46.** $(-\infty, 1)$

47–52 ■ Exprese la desigualdad con notación de intervalo, y después grafique el intervalo correspondiente.

47. $x \leq 1$ **48.** $1 \leq x \leq 2$

49. $-2 < x \leq 1$ **50.** $x \geq -5$

51. $x > -1$ **52.** $-5 < x < 2$

53–54 ■ Exprese cada conjunto mediante la notación de los intervalos.

53. **a)**

b)

54. **a)**

b)

55–60 ■ Grafique el conjunto.

55. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **56.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

57. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **58.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

59. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **60.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

61–66 ■ Evalúe cada una de las expresiones.

61. **a)** $|100|$ **b)** $|-73|$

62. **a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **b)** $|10 - \pi|$

63. **a)** $||-6| - |-4||$ **b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

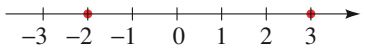
64. **a)** $|2 - |-12||$ **b)** $-1 - |1 - |-1||$

65. **a)** $|(-2) \cdot 6|$ **b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

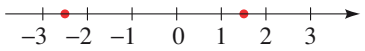
66. **a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

67–70 ■ Determine la distancia entre los números dados.

67.



68.



69. **a)** 2 y 17

b) -3 y 21

c) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

70. **a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$

b) -38 y -57

c) -2.6 y -1.8

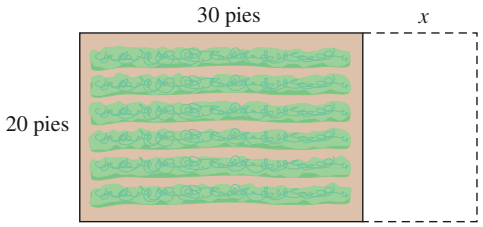
71–72 ■ Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción. (Véase la nota al margen de la página 2.)

71. **a)** $0.\overline{7}$ **b)** $0.2\overline{8}$ **c)** $0.5\overline{7}$

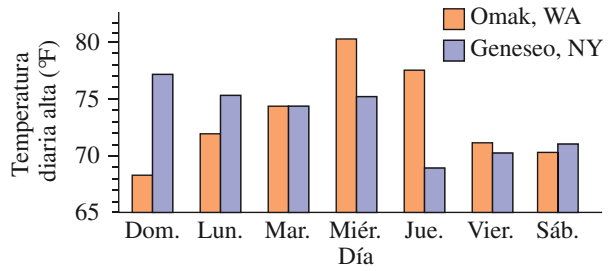
72. **a)** $5.\overline{23}$ **b)** $1.3\overline{7}$ **c)** $2.1\overline{35}$

Aplicaciones

73. Superficie de un jardín El terreno trasero donde Mary siembra verduras mide 20 por 30 pies, por lo que esa área es $20 \times 30 = 600$ pies cuadrados. Decide agrandarlo, como se muestra en la figura, de modo que el área se incrementa a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales dice que la nueva área se puede expresar también como $A = 600 + 20x$?



74. Variación de la temperatura La gráfica de barras muestra las temperaturas diarias altas de Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante una cierta semana de junio. Sea T_O la temperatura de Omak y T_G la temperatura de Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada uno de los días mostrados. ¿Cuál de los dos valores da más información?

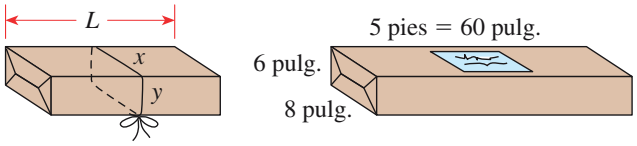


75. Envío por correo de un paquete La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales el largo más lo que mida alrededor no sea mayor que 108 pulg. Por consiguiente, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete que mide 6 pulg de ancho, 8 pulg de alto y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mide 2 por 2 por 4 pies?

b) ¿Cuál es el mayor largo aceptable para un paquete que tiene base cuadrada y mide 9 por 9 pulg?



Descubrimiento • Análisis

76. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) $-a$ **b)** $-b$ **c)** bc

d) $a - b$ **e)** $c - a$ **f)** $a + bc$

g) $ab + ac$ **h)** $-abc$ **i)** ab^2

77. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales es necesariamente irracional? ¿Qué sucede con la suma?

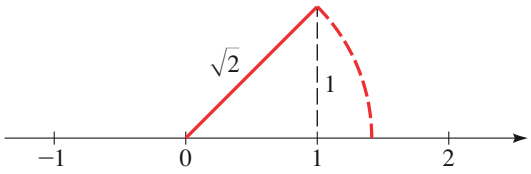
78. Combinación de números racionales con números irracionales ¿Es $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ racional o irracional? Es $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ racional o irracional? En general, ¿qué puede decir con respecto a la suma de un número racional y un número irracional? ¿Y del producto?

79. Comportamiento limitante de los recíprocos Complete las tablas. ¿Qué sucede con el tamaño de la fracción $1/x$ cuando x se incrementa? ¿Y cuando disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

80. Números irracionales y geometría Refiérase a la figura siguiente y explique cómo ubicar el punto $\sqrt{2}$ sobre una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ mediante un método similar? ¿Y $\sqrt{6}$? Mencione otros números irracionales que se pueden ubicar mediante este modo.



81. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que tanto la suma como la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿Es conmutativa la substracción?

(b) ¿Es conmutativa la división de números reales no cero?

1.2 Exponentes y radicales

En esta sección damos el significado de expresiones como $a^{m/n}$ en las cuales el exponente m/n es un número racional. Para hacerlo, necesitamos recordar algunos hechos con respecto a los exponentes, radicales y raíces n-ésimas de enteros.

Exponentes enteros

Por lo regular, un producto de números idénticos se expresa mediante la notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la definición siguiente.