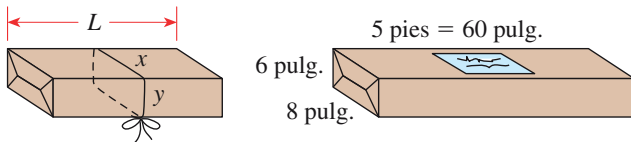


75. Envío por correo de un paquete La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales el largo más lo que mida alrededor no sea mayor que 108 pulg. Por consiguiente, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

- a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete que mide 6 pulg de ancho, 8 pulg de alto y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mide 2 por 2 por 4 pies?
- b) ¿Cuál es el mayor largo aceptable para un paquete que tiene base cuadrada y mide 9 por 9 pulg?



Descubrimiento • Análisis

76. Signos de números Sean a , b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

- a) $-a$ b) $-b$ c) bc
d) $a - b$ e) $c - a$ f) $a + bc$
g) $ab + ac$ h) $-abc$ i) ab^2

77. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales son números

racionales. ¿El producto de dos números irracionales es necesariamente irracional? ¿Qué sucede con la suma?

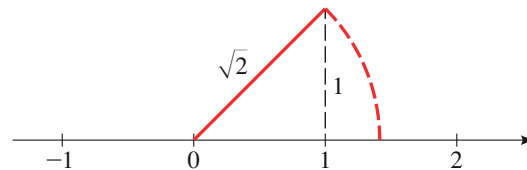
78. Combinación de números racionales con números irracionales ¿Es $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ racional o irracional? Es $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ racional o irracional? En general, ¿qué puede decir con respecto a la suma de un número racional y un número irracional? ¿Y del producto?

79. Comportamiento limitante de los recíprocos Complete las tablas. ¿Qué sucede con el tamaño de la fracción $1/x$ cuando x se incrementa? ¿Y cuando disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

80. Números irracionales y geometría Refiérase a la figura siguiente y explique cómo ubicar el punto $\sqrt{2}$ sobre una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ mediante un método similar? ¿Y $\sqrt{6}$? Mencione otros números irracionales que se pueden ubicar mediante este modo.



81. Operaciones conmutativa y no conmutativa

Hemos visto que tanto la suma como la multiplicación son operaciones conmutativas.

- (a) ¿Es conmutativa la sustracción?
- (b) ¿Es conmutativa la división de números reales no cero?

1.2

Exponentes y radicales

En esta sección damos el significado de expresiones como $a^{m/n}$ en las cuales el exponente m/n es un número racional. Para hacerlo, necesitamos recordar algunos hechos con respecto a los exponentes, radicales y raíces n -ésimas de enteros.

Exponentes enteros

Por lo regular, un producto de números idénticos se expresa mediante la notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3 . En general, tenemos la definición siguiente.

Notación exponencial

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la **potencia n -ésima** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base** y n es el **exponente**.

 Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4 . En $(-3)^4$ el exponente se aplica a -3 , pero en -3^4 el exponente se aplica sólo a 3.

Ejemplo 1 Notación exponencial

- a) $(\frac{1}{2})^5 = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$
 b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
 c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$

Podemos establecer varias reglas útiles para trabajar con la notación exponencial. Para descubrir la regla de la multiplicación, multipliquemos 5^4 por 5^2 :

$$5^4 \cdot 5^2 = (\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{4 \text{ factores}})(\underbrace{5 \cdot 5}_{2 \text{ factores}}) = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Al parecer, al *multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos los exponentes*. En general, para cualquier número real a y los enteros positivos m y n , tenemos

$$a^m a^n = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Por consiguiente $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera válida incluso cuando m y n sean 0 o enteros negativos. Por ejemplo,

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto sólo puede suceder si $2^0 = 1$. De igual manera, queremos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones generan la definición siguiente:

Exponentes cero y negativos

Si $a \neq 0$ es un número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \quad \text{y} \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 2 Exponentes cero y negativos

- a) $(\frac{4}{7})^0 = 1$
 b) $x^{-1} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{x}$
 c) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$



Es esencial conocer las reglas siguientes para trabajar con los exponentes y bases. En la tabla siguiente, las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son enteros.

Leyes de los exponentes		
Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2 \cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador y denominador a la potencia.

■ **Demostración de la ley 3** Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$\begin{aligned}
 (a^m)^n &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}^n \\
 &= \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \cdots \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}} \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ grupos de factores}} \\
 &= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}
 \end{aligned}$$

Los casos para los cuales $m \leq 0$ o $n \leq 0$ se pueden demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

■ **Demostración de la ley 4** Si n es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \cdots \cdot b)}_{n \text{ factores}} = a^n b^n$$

En este caso hemos aplicado las propiedades conmutativa y asociativa de manera repetida. Si $n \leq 0$ la ley 4 se puede demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

En el ejercicio 88 se le pide demostrar las leyes 2 y 5.

Ejemplo 3 Aplicación de las leyes de los exponentes

- a) $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
- b) $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
- c) $\frac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ Ley 2: $a^m / a^n = a^{m-n}$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (b^4)^5 &= b^{4 \cdot 5} = b^{20} && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn} \\ \text{e)} \quad (3x)^3 &= 3^3 x^3 = 27x^3 && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^n b^n \\ \text{f)} \quad \left(\frac{x}{2}\right)^5 &= \frac{x^5}{2^5} = \frac{x^5}{32} && \text{Ley 5: } (a/b)^n = a^n/b^n \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique:

$$\text{a)} \quad (2a^3b^2)(3ab^4)^3 \qquad \text{b)} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4$$

Solución

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^n b^n \\ &= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn} \\ &= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupación de factores con la misma base} \\ &= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^m a^n = a^{m+n} \\ \text{b)} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3} \frac{(y^2)^4 x^4}{z^4} && \text{Ley 5 y 4} \\ &= \frac{x^3}{y^3} \frac{y^8 x^4}{z^4} && \text{Ley 3} \\ &= (x^3 x^4) \left(\frac{y^8}{y^3}\right) \frac{1}{z^4} && \text{Agrupación de factores con la misma base} \\ &= \frac{x^7 y^5}{z^4} && \text{Ley 1 y 2} \end{aligned}$$

Al simplificar una expresión, encontrará que llega al mismo resultado mediante diferentes métodos. Siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de los exponentes para poner en práctica su propio método. En seguida presentamos otras dos leyes que son útiles para simplificar expresiones con exponentes negativos.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$	$\frac{3^{-2}}{4^{-5}} = \frac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia desde el numerador al denominador o desde el denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

■ **Demostración de la ley 7** Si usamos la definición de los exponentes negativos y luego aplicamos la propiedad 2 de las fracciones (pág. 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

Se le pedirá que demuestre la ley 6 en el ejercicio 88.

Matemáticas en el mundo moderno

Si bien a menudo no nos percatamos de su presencia, la matemática impregna casi todos los aspectos de la vida del mundo moderno. Con la técnica moderna, las matemáticas desempeñan un papel más importante en nuestra vida. Quizá hoy usted despertó con la alarma de un reloj digital, habló por teléfono que usa transmisión digital, envió un mensaje por correo electrónico a través de Internet, guió un automóvil que cuenta con inyección de combustible controlada en forma digital, escuchó música por medio de un reproductor de discos compactos, luego durmió en una habitación cuya temperatura está controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas son imprescindibles. En general, una propiedad como la intensidad o la frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape del automóvil, los colores de una imagen, o la temperatura en la recámara es transformada en sucesiones de números mediante complicados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, los cuales casi siempre consisten en varios millones de bits (los dígitos 0 y 1), se transmiten y luego se reinterpretan. Trabajar con esas enormes cantidades de datos no era posible antes de la invención de las computadoras, y los matemáticos fueron los que inventaron los procesos lógicos de estas máquinas.

La contribución de las matemáticas en el mundo moderno no se limita a los adelantos técnicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se utilizan ahora para analizar problemas complejos en las ciencias sociales, políticas y biológicas de manera nueva y sorprendente. Los avances en las matemáticas continúan, algunos de los más emocionantes surgieron en la década recién finalizada.

En otras de las secciones de las *Matemáticas en el mundo moderno* se describe con más detalle cómo esta ciencia afecta a todos nosotros en nuestras actividades de la vida cotidiana.

Ejemplo 5 Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine los exponentes negativos y simplifique las expresiones.

a) $\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ b) $\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

Solución

- (a) Usamos la ley 7, la cual permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador, o viceversa, cambiando el signo del exponente.

$$\begin{aligned} \frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} &= \frac{6s^1t^{-4}}{2s^{-2}t^2} && \text{Ley 7} \\ &= \frac{3s^3}{t^6} && \text{Ley 1} \end{aligned}$$

t⁻⁴ se baja al denominador y se vuelve t⁴.

s⁻² se sube al numerador y se vuelve s².

- b) Usamos la ley 6, que permite cambiar el signo del exponente de una fracción si ésta se invierte.

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} &= \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 && \text{Ley 6} \\ &= \frac{9z^6}{y^2} && \text{Leyes 5 y 4} \end{aligned}$$

Notación científica

Los científicos utilizan la notación exponencial para compactar la escritura de números muy grandes o de los muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana más allá del Sol, Alfa Centauro, está a casi 40 000 000 000 000 kilómetros. Por otro lado, la masa de un átomo de hidrógeno es de casi 0.000000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y de escribir, de modo que los científicos los expresan casi siempre en *notación científica*.

Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \quad \text{donde } 1 \leq a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando establecemos que la distancia a la estrella Alfa Centauro es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe desplazar 13 lugares a la derecha:

$$4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

Mover el punto decimal 13 lugares a la derecha.

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe pasarse 24 lugares a la izquierda:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.000000000000000000000000166$$

Mover el punto decimal 24 lugares a la izquierda.

Ejemplo 6 Escritura de números en notación científica

a) $\underbrace{327900}_{5 \text{ lugares}} = 3.279 \times 10^5$

b) $\underbrace{0.000627}_{4 \text{ lugares}} = 6.27 \times 10^{-4}$

Para utilizar la notación científica en una calculadora, presione la tecla **EE** o bien **EXP** o **EEX** para ingresar el exponente. Por ejemplo, para escribir el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, escribimos

$$3.629 \text{ 2ND EE 15}$$

y en la pantalla se lee

$$3.629\text{E}15$$

La notación científica se aplica a menudo para escribir un número muy grande o muy pequeño en una calculadora. Por ejemplo, si usamos una calculadora para elevar al cuadrado el número 1 111 111, se puede ver en la pantalla, dependiendo del modelo de calculadora, la aproximación

$$1.234568 \text{ 12} \quad \text{o bien,} \quad 1.23468 \text{ E}12$$

En este caso, los dígitos finales indican la potencia de 10, e interpretamos que el resultado es

$$1.234568 \times 10^{12}$$

Ejemplo 7 Cálculos con ayuda de la notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use una calculadora para obtener un valor aproximado del cociente ab/c .

Solución Podemos escribir los datos en notación científica, o bien, podemos usar las leyes de los exponentes como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36} \end{aligned}$$

Damos la respuesta correcta hasta con dos cifras significativas porque el menos exacto de los números dados tiene dos cifras significativas.

Radicales

Ya sabemos lo que 2^n significa siempre que n es un entero. Para dar el significado de una potencia, como $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar a los radicales.

El símbolo $\sqrt{\quad}$ significa “la raíz cuadrada de”. Por lo tanto

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Puesto que $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3 , pero la notación $\sqrt{9}$ se reserva para la raíz cuadrada positiva de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si queremos la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3 .

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n -ésimas. La raíz n -ésima de x es el número que cuando se eleva a la potencia n -ésima da x .

Definición de la raíz n -ésima

Si n es un entero positivo, entonces la **raíz n -ésima principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{quiere decir} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por consiguiente,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{porque} \quad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidos. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definido porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Observe que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{pero} \quad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre se cumple; es verdadera sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas usadas al trabajar con raíces n -ésimas se listan en el siguiente cuadro. En cada propiedad suponemos que existen las raíces dadas.

Propiedades de las raíces n -ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = a $ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = -3 = 3$

Ejemplo 8 Simplificación de expresiones que contienen raíces n -ésimas

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \sqrt[3]{x^4} &= \sqrt[3]{x^3 x} && \text{Sacar como factor el término más grande al cubo} \\
 &= \sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b} \\
 &= x \sqrt[3]{x} && \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \sqrt[4]{81x^8y^4} &= \sqrt[4]{81} \sqrt[4]{x^8} \sqrt[4]{y^4} && \text{Propiedad 1: } \sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a} \sqrt[4]{b} \sqrt[4]{c} \\
 &= 3 \sqrt[4]{(x^2)^4} |y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a| \\
 &= 3x^2 |y| && \text{Propiedad 5: } \sqrt[4]{a^4} = |a|, |x^2| = x^2
 \end{aligned}$$

Con frecuencia es muy útil combinar radicales similares en una expresión como $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Se puede hacer usando la propiedad distributiva. Por lo tanto,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

En el ejemplo siguiente se ilustra mejor este proceso.

Ejemplo 9 Combinación de radicales

 Evite cometer el error siguiente:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{¡Falso!}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt{32} + \sqrt{200} &= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2} \\
 &= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2} \\
 &= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Se sacan como factores los cuadrados más grandes

Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Propiedad distributiva

b) Si $b > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
 \sqrt{25b} - \sqrt{b^3} &= \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b} \\
 &= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b} \\
 &= (5 - b)\sqrt{b}
 \end{aligned}$$

Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Propiedad 5, $b > 0$

Propiedad distributiva

Exponentes racionales

Para definir lo que queremos decir con *exponente racional* o, lo que es lo mismo, *exponente fraccionario* como $a^{1/3}$, necesitamos usar los radicales. Con objeto de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las Leyes de los exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, según la definición de raíz n -ésima,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos los exponentes racionales como se señala a continuación.

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \quad \text{o en forma equivalente} \quad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que las *Leyes de los exponentes son válidas también para los exponentes racionales*.

Diofanto vivió en Alejandría por el año 250 antes de nuestra era. Se considera que su obra *Aritmética* es el primer libro sobre álgebra. En ella proporciona métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Aritmética* fue la obra en la que se estudió por más de mil años. Fermat (véase página 652) hizo algunos de sus descubrimientos más importantes cuando estudiaba este libro. La contribución principal de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque este simbolismo no es tan simple como lo usamos en la actualidad, fue un gran adelanto para no escribir todo con palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma} \alpha \varsigma \eta \eta \Delta^{\gamma} \zeta M \epsilon \iota^{\sigma} \kappa \delta$$

La notación algebraica moderna no se volvió común sino hasta el siglo XVII.

Ejemplo 10 Uso de la definición de los exponentes racionales



- a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$
- b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Otra solución: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$
- c) $125^{-1/3} = \frac{1}{125^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} = \frac{1}{5}$
- d) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$

Ejemplo 11 Uso de las Leyes de los exponentes con exponentes racionales



- a) $a^{1/3} a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$
- b) $\frac{a^{2/5} a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- c) $(2a^3 b^4)^{3/2} = 2^{3/2} (a^3)^{3/2} (b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$
 $= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$
 $= 2\sqrt{2} a^{9/2} b^6$
- d) $\left(\frac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3 \left(\frac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \frac{2^3 (x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3} \cdot (y^4 x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7
 $= \frac{8x^{9/4}}{y} \cdot y^4 x^{1/2}$ Ley 3
 $= 8x^{11/4} y^3$ Leyes 1 y 2

Ejemplo 12 Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

- a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales
 $= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1
- b) $\sqrt{x}\sqrt{x} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales
 $= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1
 $= x^{3/4}$ Ley 3

Racionalización del denominador

Con frecuencia es muy útil eliminar el denominador mediante la multiplicación tanto del numerador como del denominador por una expresión adecuada. Este procedimiento recibe el nombre de **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, entonces multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$. Al hacerlo, estamos multiplicando la cantidad por 1, de modo que no se altera el valor. Por ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Obsérvese que el denominador en la última fracción no contiene radical alguno. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizamos el denominador, porque, en el caso de $a > 0$,

$$\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo 13 Racionalización de denominadores

$$\text{a) } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$\text{c) } \sqrt[7]{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \cdot \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \frac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$$

1.2 Ejercicios

1–8 ■ Escriba cada una de las expresiones con radicales usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

Expresión con radicales	Expresión con exponentes
1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$	
2. $\sqrt[3]{7^2}$	
3.	$4^{2/3}$
4.	$11^{-3/2}$
5. $\sqrt[5]{5^3}$	
6.	$2^{-1.5}$
7.	$a^{2/5}$
8. $\frac{1}{\sqrt{x^5}}$	

9–18 ■ Evalúe cada expresión

- | | | |
|------------------------------------|--|---|
| 9. a) -3^2 | b) $(-3)^2$ | c) $(-3)^0$ |
| 10. a) $5^2 \cdot (\frac{1}{5})^3$ | b) $\frac{10^7}{10^4}$ | c) $\frac{3}{3^{-2}}$ |
| 11. a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$ | b) $\frac{3^{-2}}{9}$ | c) $(\frac{1}{4})^{-2}$ |
| 12. a) $(\frac{2}{3})^{-3}$ | b) $(\frac{3}{2})^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ | c) $(\frac{1}{2})^4 \cdot (\frac{5}{2})^{-2}$ |
| 13. a) $\sqrt{16}$ | b) $\sqrt[4]{16}$ | c) $\sqrt[4]{1/16}$ |
| 14. a) $\sqrt{64}$ | b) $\sqrt[3]{-64}$ | c) $\sqrt[5]{-32}$ |
| 15. a) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ | b) $\sqrt[3]{\frac{-1}{64}}$ | c) $\frac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$ |

$$\text{16. a) } \sqrt{7}\sqrt{28} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} \quad \text{c) } \sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$$

$$\text{17. a) } (\frac{4}{9})^{-1/2} \quad \text{b) } (-32)^{2/5} \quad \text{c) } -32^{2/5}$$

$$\text{18. a) } 1024^{-0.1} \quad \text{b) } (-\frac{27}{8})^{2/3} \quad \text{c) } (\frac{25}{64})^{-3/2}$$

19–22 ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

$$\text{19. } \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{20. } \sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$$

$$\text{21. } (9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3} \quad \text{22. } (xy)^{2z}$$

23–26 ■ Simplifique la expresión.

$$\text{23. } \sqrt{32} + \sqrt{18} \quad \text{24. } \sqrt{75} + \sqrt{48}$$

$$\text{25. } \sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3} \quad \text{26. } \sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$$

27–44 ■ Simplifique la expresión y elimine todos los exponentes negativos.

$$\text{27. } a^9 a^{-5} \quad \text{28. } (3y^2)(4y^5)$$

$$\text{29. } (12x^2y^4)(\frac{1}{2}x^5y) \quad \text{30. } (6y)^3$$

$$\text{31. } \frac{x^9(2x)^4}{x^3} \quad \text{32. } \frac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$$

$$\text{33. } b^4(\frac{1}{3}b^2)(12b^{-8}) \quad \text{34. } (2s^3t^{-1})(\frac{1}{4}s^6)(16t^4)$$

$$\text{35. } (rs)^3(2s)^{-2}(4r)^4 \quad \text{36. } (2u^2v^3)^3(3u^3v)^{-2}$$

$$\text{37. } \frac{(6y^3)^4}{2y^5} \quad \text{38. } \frac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$$

$$\text{39. } \frac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y} \quad \text{40. } \left(\frac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\frac{d^2}{c^3}\right)^3$$

41. $\frac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$

42. $\left(\frac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

43. $\left(\frac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

44. $(3ab^2c)\left(\frac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$

45–52 ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras representan números reales.

45. $\sqrt[4]{x^4}$

46. $\sqrt[5]{x^{10}}$

47. $\sqrt[4]{16x^8}$

48. $\sqrt[3]{x^3y^6}$

49. $\sqrt{a^2b^6}$

50. $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{a^4b}$

51. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$

52. $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

53–70 ■ Simplifique la expresión y elimine los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos.

53. $x^{2/3}x^{1/5}$

54. $(2x^{3/2})(4x)^{-1/2}$

55. $(-3a^{1/4})(9a)^{-3/2}$

56. $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

57. $(4b)^{1/2}(8b^{2/5})$

58. $(8x^6)^{-2/3}$

59. $(c^2d^3)^{-1/3}$

60. $(4x^6y^8)^{3/2}$

61. $(y^{3/4})^{2/3}$

62. $(a^{2/5})^{-3/4}$

63. $(2x^4y^{-4/5})^3(8y^2)^{2/3}$

64. $(x^{-5}y^3z^{10})^{-3/5}$

65. $\left(\frac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$

66. $\left(\frac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

67. $\left(\frac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$

68. $\frac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$

69. $\frac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$

70. $\left(\frac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\frac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$

71–72 ■ Escriba las cantidades mediante la notación científica.

71. a) 69 300 000

b) 7 200 000 000 000

c) 0.000028536

d) 0.0001213

72. a) 129 540 000

b) 7 259 000 000

c) 0.0000000014

d) 0.0007029

73–74 ■ Escriba cada una de las cantidades en la notación decimal.

73. a) 3.19×10^5

b) 2.721×10^8

c) 2.670×10^{-8}

d) 9.999×10^{-9}

74. a) 7.1×10^{14}

b) 6×10^{12}

c) 8.55×10^{-3}

d) 6.257×10^{-10}

75–76 ■ Escriba en notación científica la cantidad indicada en cada inciso.

75. a) Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es de casi 9 460 800 000 000 km.

b) El diámetro de un electrón es de casi 0.00000000000004 cm.

c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

76. a) La distancia de la Tierra al Sol es de casi 150 millones de kilómetros.

b) La masa de una molécula de oxígeno es de casi 0.0000000000000000000053 g.

c) La masa de la Tierra es de casi 5 970 000 000 000 000 000 000 kg.

77–82 ■ Utilice la notación científica, las Leyes de los exponentes y la calculadora para ejecutar las operaciones señaladas. Proporcione su respuesta correcta de acuerdo con la cantidad de cifras significativas indicadas por los datos dados.

77. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

78. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

79. $\frac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

80. $\frac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

81. $\frac{(0.0000162)(0.01582)}{(594\,621\,000)(0.0058)}$

82. $\frac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

83–86 ■ Racionalice el denominador.

83. a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

b) $\sqrt{\frac{2}{x}}$

c) $\sqrt{\frac{x}{3}}$

84. a) $\sqrt{\frac{5}{12}}$

b) $\sqrt{\frac{x}{6}}$

c) $\sqrt{\frac{y}{2z}}$

85. a) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$

c) $\frac{x}{y^{2/5}}$

86. a) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}}$

b) $\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$

c) $\frac{1}{c^{3/7}}$

87. Sean a , b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) b^5

b) b^{10}

c) ab^2c^3

d) $(b - a)^3$

e) $(b - a)^4$

f) $\frac{a^3c^3}{b^6c^6}$

88. Demuestre que las Leyes de los exponentes dadas para cada caso en el cual m y n son enteros positivos y $m > n$.

a) Ley 2

b) Ley 5

c) Ley 6

Aplicaciones

89. Distancia a la estrella más cercana Alfa Centauro, la estrella más cercana al Sistema Solar, está a 4.3 años luz.

Utilice la información del ejercicio 75 a) para expresar esta distancia en kilómetros.

- 90. Velocidad de la luz** La velocidad de la luz es de casi 300 000 km/s. Utilice la información del ejercicio 76 a) para determinar cuánto tarda un rayo de luz en llegar a la Tierra desde el Sol.

- 91. Volumen del mar** El promedio de la profundidad del mar es de 3.7×10^3 m, y la superficie del mar es de 3.6×10^{14} m². ¿Cuál es el volumen total del mar en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



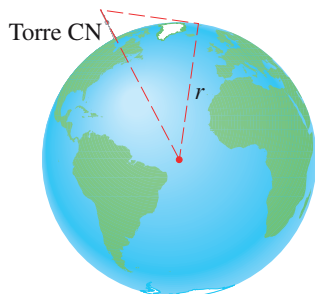
- 92. Deuda nacional** En noviembre de 2004, la población de Estados Unidos era de 2.949×10^8 , y la deuda nacional era de 7.529×10^{12} dólares. ¿Cuánto debe cada persona?

- 93. Número de moléculas** Un cuarto aislado de hospital mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto; se llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 litros y 22.4 litros de cualquier gas contiene 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

- 94. ¿Qué tan lejos puede ver?** Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que usted puede ver desde el último piso de un edificio alto cuya altura es h se estima mediante la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

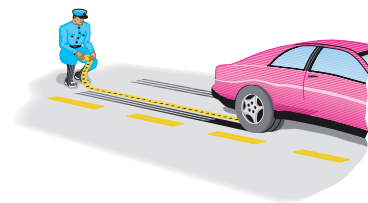
donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿Qué tan lejos puede ver desde el mirador de la Torre de CN de Toronto, 1135 pies por arriba del suelo?



- 95. Velocidad de un automóvil que frena** La policía aplica la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) a la cual un vehículo se desplaza si recorre d pies después de que aplica los frenos en forma repentina. El número f es el coeficiente de fricción de la carretera, el cual es una medida de la “deslizabilidad” de la carretera. La tabla da algunas estimaciones representativas de f .

	Alquitrán	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Húmedo	0.5	0.4	0.1

- (a) Si un automóvil se desliza 65 pies en concreto húmedo, ¿qué tan rápido iba cuando se aplicaron los frenos?
- (b) Si el vehículo se desplaza a 50 millas por hora, ¿qué tanto se desliza en alquitrán húmedo?



- 96. Distancia de la Tierra al Sol** Se infiere de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento de los planetas que la distancia promedio de un planeta al Sol, en metros, es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2} \right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² es la constante gravitacional y T es el periodo de la órbita del planeta, en segundos. Aplique el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de casi 365.25 días para encontrar la distancia de la Tierra al Sol.

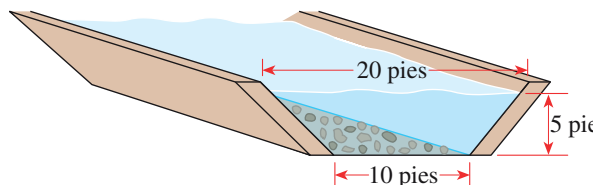
- 97. Velocidad de flujo en un canal** La velocidad del agua que fluye por un canal o por el lecho de un río se rige por la **ecuación de Manning**

$$V = 1.486 \frac{A^{2/3} S^{1/2}}{p^{2/3} n}$$

donde V es la velocidad del flujo en pies/s; A es el área de la sección transversal del canal; en pies cuadrados; S es la pendiente descendente del canal; p es el perímetro mojado en pies (la distancia desde la parte superior de una orilla, bajando por el lado del canal, atravesando el fondo y subiendo hasta la parte superior de la otra orilla), y n es el coeficiente de rugosidad (una medida de la rugosidad del fondo del canal). Esta ecuación se usa para predecir la capacidad de los canales de inundación para regular el escurrimiento de

las fuertes deprecipitaciones pluviales. En el caso del canal mostrado en la figura, $A = 75$ pies cuadrados, $S = 0.050$, $p = 24.1$ pies, y $n = 0.040$.

- Determinar la velocidad que lleva el agua por este canal.
- ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede descargar el canal por cada segundo? [*Sugerencia:* multiplique V por A para obtener el volumen del flujo por segundo.]



Descubrimiento • Análisis

98. **¿Qué tanto son mil millones?** Si tiene un millón (10^6) de dólares en una valija y usted gasta mil (10^3) dólares cada día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Si gasta lo mismo, ¿cuántos años tardaría en vaciar la valija llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

99. **Potencias fáciles que parecen difíciles** Calcule estas expresiones mentalmente. Aplique las Leyes de los exponentes para facilitar el proceso.

a) $\frac{18^5}{9^5}$ b) $20^6 \cdot (0.5)^6$

100. **Comportamiento limitante de las potencias** Complete las tablas siguientes. ¿Qué sucede con la raíz n -ésima de 2 cuando n se incrementa? ¿Qué sucede con la raíz n -ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$(\frac{1}{2})^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué sucede con la raíz e -ésima de n cuando n se incrementa?

101. **Comparación de raíces** Sin usar calculadora, determine qué número es más grande en cada par de valores.

a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ b) $(\frac{1}{2})^{1/2}$ o $(\frac{1}{2})^{1/3}$
 c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ d) $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3

Expresiones algebraicas

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables como x , y y z y algunos números reales, y los combinamos usando la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtendremos una **expresión algebraica**. He aquí algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k , donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama **polinomio**. Por ejemplo, la primera expresión de las anteriores es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de **grado n** . Los polinomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio son los **términos** del polinomio.