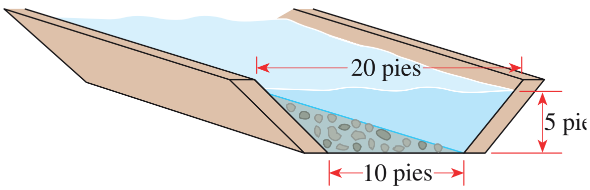
las fuertes deprecipitaciones pluviales. En el caso del canal mostrado en la figura, $A = 75$ pies cuadrados, $S = 0.050$, $p = 24.1$ pies, y $n = 0.040$.

a) Determinar la velocidad que lleva el agua por este canal.

b) ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede descargar el canal por cada segundo? [*Sugerencia:* multiplique V por A para obtener el volumen del flujo por segundo.]



Descubrimiento • Análisis

98. ¿Qué tanto son mil millones? Si tiene un millón (10^6) de dólares en una valija y usted gasta mil (10^3) dólares cada día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Si gasta lo mismo, ¿cuántos años tardaría en vaciar la valija llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

99. Potencias fáciles que parecen difíciles Calcule estas expresiones mentalmente. Aplique las Leyes de los exponentes para facilitar el proceso.

a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ **b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

100. Comportamiento limitante de las potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa? ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué sucede con la raíz e-ésima de n cuando n se incrementa?

101. Comparación de raíces Sin usar calculadora, determine qué número es más grande en cada par de valores.

a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 Expresiones algebraicas

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables como x, y y z y algunos números reales, y los combinamos usando la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtendremos una **expresión algebraica**. He aquí algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión de las anteriores es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de **grado n**. Los polinomios a_kx^k que conforman el polinomio son los **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomio	$9x^5$	5
6	monomio	6	0

Combinación de expresiones algebraicas

Propiedad distributiva

$ac + bc = (a + b)c$

Sumamos y **restamos** polinomios aplicando las propiedades de los números reales que se estudian en la sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (es decir, términos con las mismas variables elevadas a las mismas potencias) usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Al restar polinomios tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión que se encuentra entre paréntesis, entonces el signo de cada término dentro del paréntesis cambia cuando eliminamos los paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Es simplemente un caso de la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

Ejemplo 1 Adición y sustracción de polinomios

a) Efectúe la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

Solución

a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ Propiedad distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ Combinación de términos semejantes

■

Para encontrar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas necesitamos usar la propiedad distributiva en forma repetida. En particular, al usarla tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto indica que para multiplicar los dos factores se multiplica cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor y se suman los productos. En forma esquemática tenemos

La regla práctica siguiente ayuda a obtener el producto de dos binomios: el primero por el primero, el primero por el segundo, el segundo por el primero y el segundo por el segundo.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

En general, multiplicamos dos expresiones algebraicas usando la propiedad distributiva y las Leyes de los exponentes.

Ejemplo 2 Multiplicación de expresiones algebraicas

a) $(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$ Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1) = x^2(x^3 + 2x + 1) - 3(x^3 + 2x + 1)$ Propiedad distributiva

$= x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$ Propiedad distributiva

$= x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$ Combinación de términos semejantes

c) $(1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2$ Propiedad distributiva

$= 2 - \sqrt{x} - 3x$ Combinación de términos semejantes ■

Ciertos tipos de productos son tan frecuentes que es necesario memorizarlos. Puede verificar las fórmulas siguientes efectuando las multiplicaciones.

Refiérase al Proyecto de descubrimiento de la página 34 para ver una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

Fórmulas para productos especiales

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ Suma y producto de términos iguales

2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de una suma

3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de una diferencia

4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ Cubo de una suma

5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ Cubo de una diferencia

La idea clave de usar estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **principio de la sustitución**: podríamos reemplazar cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para determinar $(x^2 + y^3)^2$ aplicamos la fórmula 2 del producto, escribimos A en lugar de x^2 y B en lugar de y^3 para llegar a

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Ejemplo 3 Aplicación de las fórmulas para productos especiales

Utilice las fórmulas para productos especiales para determinar cada uno de los productos.

a) $(3x + 5)^2$ b) $(x^2 - 2)^3$ c) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$

Solución

a) Al sustituir $A = 3x$ y $B = 5$ en la fórmula 2 de los productos, tenemos

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

b) Al sustituir $A = x^2$ y $B = 2$ en la fórmula 5 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3\\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

c) Al sustituir $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la fórmula 1 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) &= (2x)^2 - (\sqrt{y})^2\\ &= 4x^2 - y\end{aligned}$$

■

Factorización

Aplicamos la propiedad distributiva para expandir las expresiones algebraicas. Algunas veces necesitamos invertir este proceso usando otra vez la propiedad distributiva mediante la **factorización** de una expresión en productos de términos más simples. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Ejemplo 4 Obtención de factores comunes

Factorice cada una de las expresiones.

a) $3x^2 - 6x$ b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

Solución

a) El factor común máximo de los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, y entonces

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x$ ✓

b) Observe que

8, 6 y -2 tienen a 2 como máximo factor común

x^4, x^3 y x tienen a x como máximo factor común

y^2, y^3 y y^4 tienen a y^2 como máximo factor común

De modo que el máximo factor común de los tres términos en el polinomio es $2xy^2$, por lo que

$$\begin{aligned}8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2)\\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)\end{aligned}$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) =$

$8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$ ✓

c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned}(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplificación}\end{aligned}$$ ■

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

de modo que es necesario escoger números r y s tal que $r + s = b$ y $rs = c$.

Ejemplo 5 Factorización de $x^2 + bx + c$ mediante ensayo y error

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

Solución Necesitamos encontrar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea igual a 7. Mediante ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Por lo tanto, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

factores de 12 ■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✓

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

factores de a

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s)$$

factores de c

Por lo tanto, tratamos de hallar números p, q, r, y s tal que $pq = a$, $rs = c$, $ps + qr = b$. Si todos estos números son enteros, entonces tendremos un número limitado de posibilidades para p, q, r y s.

Ejemplo 6 Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

Solución Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o bien $3 \cdot 2$, y -5 como $-25 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Intentando estas posibilidades llegamos a la factorización

factores de 6

$$6x^2 + 7x - 5 = (3x + 5)(2x - 1)$$

factores de -5 ■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✓

Ejemplo 7 Identificación de la forma de una expresión

Factorice cada una de las expresiones.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

Solución

a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\boxed{}$ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la de la expresión en el inciso (a), de modo que se factoriza como $(\boxed{} - 3)(\boxed{} + 1)$.

$$(\boxed{5a+1})^2 - 2(\boxed{5a+1}) - 3 = [(\boxed{5a+1}) - 3][(\boxed{5a+1}) + 1]$$
$$= (5a - 2)(5a + 2)$$

Algunas expresiones algebraicas especiales se pueden factorizar usando las fórmulas siguientes. Las primeras tres son simplemente las fórmulas para productos especiales, pero escritas hacia atrás.

Fórmulas de factorización especial

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplo 8 Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice cada polinomio.

a) $4x^2 - 25$ b) $(x + y)^2 - z^2$

Solución

a) Si usamos la fórmula de diferencia de cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$
$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

b) Aplicamos la fórmula de la diferencia de cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$

Ejemplo 9 Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

a) $27x^3 - 1$ b) $x^6 + 8$

Solución

a) Al aplicar la fórmula de diferencia de cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, tenemos que

$$27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]$$
$$= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$$

b) Al aplicar la fórmula de la suma de cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$ ■

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o bien,} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Entonces, **reconocemos a un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o bien, $-2AB$) es más o menos el doble del producto de la raíces cuadradas de los otros dos términos.

Ejemplo 10 Identificación de cuadrados perfectos

Factorice los trinomios.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $4x^2 - 4xy + y^2$

Solución

a) En este caso $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. De acuerdo con la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

b) Aquí, $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Puesto que el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Mediante la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$ ■

Cuando factorizamos una expresión, algunas veces el resultado se puede factorizar todavía más. En general, *primero buscamos los factores comunes*, luego inspeccionamos el resultado para ver si se puede factorizar por medio de otros métodos de esta sección. Repetimos el proceso hasta que hemos factorizado la expresión por completo.

Ejemplo 11 Factorización completa de una expresión

Factorice totalmente cada una de las expresiones.

a) $2x^4 - 8x^2$ b) $x^5y^2 - xy^6$

Solución

a) Primero factorizamos la potencia de x con el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorizamos } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

b) Primero factorizamos las potencias de x y y con los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Se factoriza } x^4 - y^4 \text{ como diferencias de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Se factoriza } x^2 - y^2 \text{ como diferencias de cuadrados} \end{aligned}$$ ■

En el siguiente ejemplo se factorizan variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se requiere en el cálculo.

Matemáticas en el mundo moderno

Palabras, sonidos e imágenes que se cambian a números

Fotografías, sonidos y texto se transmiten en forma continua desde un lugar a otro por medio de Internet, máquinas para facsímiles o módem. ¿Cómo pueden ser transmitidas tales cosas por los cables del teléfono? La clave para hacerlo es transformarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo se cambia un texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101, y así sucesivamente. La palabra "BED" se convertiría en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho es posible traducir este núme-ro a la palabra "BED".

Cambiar el sonido a bits es más complicado. Una onda de sonido se puede graficar en un osciloscopio o una computadora. La gráfica se descompone matemáticamente en componentes más simples que corresponden a las frecuencias diferentes del sonido original. (Una rama de las matemáticas que se llama análisis de Fourier se usa aquí.) La intensidad de cada componente es un número y el sonido original se puede reconstruir a partir de estos números. Por ejemplo, la música se almacena en un disco compacto como una sucesión de bits; se podría ver como 101010001010010-100101010100000101111010100 0101011. . . . (¡Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits!) El reproductor de discos compactos reconstruye la música a partir de los números en el disco.

Cambiar fotografías a números requiere expresar el color y la brillantez de cada punto, o pixel, en un número. Lo anterior se logra con mucha eficacia usando una rama de las matemáticas que se llama teoría ondulatoria. El FBI utiliza las ondas como una manera compacta de almacenar los millones de huellas digitales que necesitan.

Ejemplo 12 Factorización de expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice las expresiones.

a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ b) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

Solución

a) Factorice la potencia de x con el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$$\begin{aligned} 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} &= 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2) && \text{Se saca como factor } 3x^{-1/2} \\ &= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2) && \text{Factorización de la expresión cuadrática } x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

b) Se toma como factor la potencia de $2 + x$ con el *exponente más pequeño*, es decir $(2 + x)^{-2/3}$.

$$\begin{aligned} (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} &= (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)] && \text{El factor es } (2 + x)^{-2/3} \\ &= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x) && \text{Simplificación} \\ &= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x) && \text{Se saca como factor al 2} \end{aligned}$$

■

Para factorizar $x^{-1/2}$ a partir de $x^{3/2}$, *restamos* los exponentes:

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)}) \\ &= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2}) \\ &= x^{-1/2}(x^2) \end{aligned}$$

Compruebe su respuesta

Para ver si la factorización es correcta, multiplique usando las Leyes de los Exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✓

(b) $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$

$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✓

Los polinomios con al menos cuatro términos se pueden factorizar agrupando términos. El ejemplo siguiente ilustra la idea

Ejemplo 13 Factorización por agrupación

Factorice cada uno de los polinomios.

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Solución

a)
$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 4x + 4 &= (x^3 + x^2) + (4x + 4) && \text{Términos agrupados} \\ &= x^2(x + 1) + 4(x + 1) && \text{Se toman factores comunes} \\ &= (x^2 + 4)(x + 1) && \text{Se saca como factor común } x + 1 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 &= (x^3 - 2x^2) - (3x - 6) && \text{Agrupación de términos} \\ &= x^2(x - 2) - 3(x - 2) && \text{Se sacan factores comunes} \\ &= (x^2 - 3)(x - 2) && \text{Se saca como factor común } x - 2 \text{ de cada término} \end{aligned}$$

■

1.3 Ejercicios

1–6 ■ Complete la tabla siguiente escribiendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio. Luego liste los términos y establezca su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
1. $x^2 - 3x + 7$			
2. $2x^5 + 4x^2$			
3. -8			
4. $\frac{1}{2}x^7$			
5. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
6. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

7–42 ■ Ejecute las operaciones que se piden y simplifique.

7. $(12x - 7) - (5x - 12)$ **8.** $(5 - 3x) + (2x - 8)$

9. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

10. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

11. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

12. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

13. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

14. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

15. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

16. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

17. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$ **18.** $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

19. $(3t - 2)(7t - 5)$ **20.** $(4x - 1)(3x + 7)$

21. $(x + 2y)(3x - y)$ **22.** $(4x - 3y)(2x + 5y)$

23. $(1 - 2y)^2$ **24.** $(3x + 4)^2$

25. $(2x^2 + 3y^2)^2$ **26.** $\left(c + \dfrac{1}{c}\right)^2$

27. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$ **28.** $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

29. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$ **30.** $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

31. $\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

32. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

33. $(1 + a^3)^3$

34. $(1 - 2y)^3$

35. $(x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 2)$

36. $(3x^3 + x^2 - 2)(x^2 + 2x - 1)$

37. $(1 + x^{4/3})(1 - x^{2/3})$ **38.** $(1 - b)^2(1 + b)^2$

39. $(3x^2y + 7xy^2)(x^2y^3 - 2y^2)$ **40.** $(x^4y - y^5)(x^2 + xy + y^2)$

41. $(x + y + z)(x - y - z)$ **42.** $(x^2 - y + z)(x^2 + y - z)$

43–48 ■ Obtenga el factor común.

43. $-2x^3 + 16x$ **44.** $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

45. $y(y - 6) + 9(y - 6)$ **46.** $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

47. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$ **48.** $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

49–54 ■ Factorice el trinomio.

49. $x^2 + 2x - 3$ **50.** $x^2 - 6x + 5$

51. $8x^2 - 14x - 15$ **52.** $6y^2 + 11y - 21$

53. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

54. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

55–60 ■ Aplique una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

55. $9a^2 - 16$ **56.** $(x + 3)^2 - 4$

57. $27x^3 + y^3$ **58.** $8s^3 - 125t^6$

59. $x^2 + 12x + 36$ **60.** $16z^2 - 24z + 9$

61–66 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

61. $x^3 + 4x^2 + x + 4$ **62.** $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

63. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ **64.** $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

65. $x^3 + x^2 + x + 1$ **66.** $x^5 + x^4 + x + 1$

67–70 ■ Factorice totalmente la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

67. $x^{5/2} - x^{1/2}$ **68.** $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

69. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

70. $2x^{1/3}(x - 2)^{2/3} - 5x^{4/3}(x - 2)^{-1/3}$

71–100 ■ Factorice totalmente las expresiones.

71. $12x^3 + 18x$ **72.** $5ab - 8abc$

73. $x^2 - 2x - 8$ **74.** $y^2 - 8y + 15$

75. $2x^2 + 5x + 3$ **76.** $9x^2 - 36x - 45$

77. $6x^2 - 5x - 6$ **78.** $r^2 - 6rs + 9s^2$

79. $25s^2 - 10st + t^2$ **80.** $x^2 - 36$

81. $4x^2 - 25$ **82.** $49 - 4y^2$

83. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

84. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2$

85. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$ **86.** $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

87. $8x^3 + 125$ **88.** $x^6 + 64$

89. $x^6 - 8y^3$ **90.** $27a^3 - b^6$

91. $x^3 + 2x^2 + x$ **92.** $3x^3 - 27x$

93. $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$ **94.** $x^3 + 3x^2 - x - 3$

95. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$ **96.** $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

97. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

98. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

99. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

100. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

101–104 ■ Factorice completamente la expresión. (Este tipo de expresión surge en el cálculo cuando se usa la "regla del producto".)

101. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

102. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

103. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

104. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

105. **a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

d) Factorice completamente: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

106. Compruebe las fórmulas de factorización especial 4 y 5 expandiendo sus segundos miembros.

Aplicaciones

107. Volumen de concreto Una alcantarilla está construida mediante cascarones cilíndricos colados en concreto, según se muestra en la figura. Aplique la fórmula del volumen de un cilindro que se encuentra en los forros interiores de este libro y explique por qué el volumen del cascarón cilíndrico es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

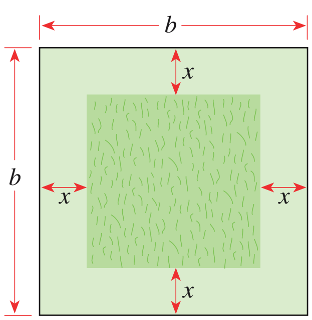
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

Utilice el esquema "desenrrollado" para explicar por qué tiene sentido desde el punto de vista geométrico.

108. Poda de un terreno Cada semana se corta el pasto de las orillas de un terreno cuadrado de un cierto estacionamiento. El resto del terreno permanece intacto para que sirva como hábitat de pájaros y otros pequeños animales (véase la figura). El terreno mide b pies por b pies y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

(b) Factorice la expresión del inciso a) para demostrar que el área de la parte podada es también $4x(b - x)$.



Descubrimiento • Debate

109. Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios, luego calcule la suma y el producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo es el grado del producto en relación con los grados de los polinomios originales?

b) ¿Cómo es el grado de la suma en relación con el grado de los polinomios originales?

110. El poder de las fórmulas algebraicas Aplique la fórmula de las diferencias de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Observe que es fácil de calcular mentalmente la forma factorizada, pero es difícil de calcular la forma original de esta manera. Evalúe cada expresión mentalmente:

a) $528^2 - 527^2$ **b)** $122^2 - 120^2$ **c)** $1020^2 - 1010^2$

Ahora aplique la fórmula para productos especiales

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar estos productos mentalmente:

d) $79 \cdot 51$ **e)** $998 \cdot 1002$

111. Diferencias de potencias pares

a) Factorice del todo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.

b) Verifique que $18\,335 = 12^4 - 7^4$ y que $2\,868\,335 = 12^6 - 7^6$.

c) Use los resultados de los incisos a) y b) para factorizar los enteros 18 335 y 2 868 335. Luego demuestre que en ambas factorizaciones, todos los factores son números primos.

112. Factorización de $A^n - 1$ Verifique estas fórmulas expandiendo y simplificando el segundo miembro.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Use base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa que se factorizaría $A^5 - 1$? Verifique sus suposiciones. En seguida generalice el patrón que observó para obtener una fórmula con la cual se factorice $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

113. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ Algunas veces, un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$ puede factorizarse con facilidad. Por ejemplo, $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$. Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar de esta manera, sino que podemos usar el método siguiente.

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 && \text{Suma y resta de } x^2 \\ &= (x^2 + 2)^2 - x^2 && \text{Factorización del cuadrado perfecto} \\ &= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2) \end{aligned}$$

Factorice las expresiones siguientes usando cualquier método que sea adecuado.

a) $x^4 + x^2 - 2$

b) $x^4 + 2x^2 + 9$

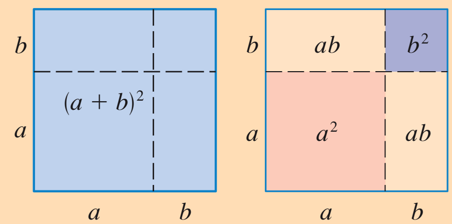
c) $x^4 + 4x^2 + 16$

d) $x^4 + 2x^2 + 1$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Representación gráfica de una fórmula

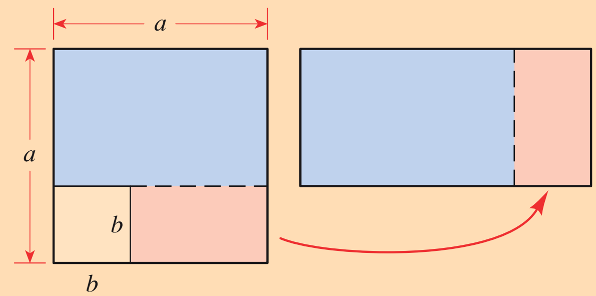
Muchas de las fórmulas para productos especiales que se tratan en esta sección se pueden representar en forma geométrica, considerando el largo, el área y el volumen. Por ejemplo, la figura ilustra cómo se puede interpretar la fórmula del cuadrado de un binomio mediante áreas de cuadrados y de rectángulos.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

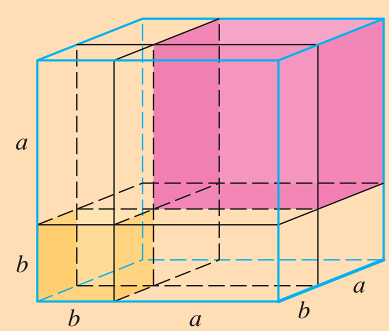
En la figura, a y b representan longitudes, a^2, b^2, ab y $(a+b)^2$ representan áreas. Los antiguos griegos siempre interpretaban las fórmulas algebraicas en términos de figuras geométricas como se hace aquí.

1. Explique cómo la figura verifica la fórmula $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.



2. Encuentre una figura que compruebe la fórmula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Explique cómo la figura siguiente verifica la fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



4. ¿Es posible dibujar una figura geométrica que verifique la fórmula para $(a+b)^4$? Explique.

5. a) Efectúe $(a+b+c)^2$.

b) Trace una figura geométrica que verifique la fórmula que encontró en el inciso a).