

22

LEY DE GAUSS

METAS DE APRENDIZAJE

Al estudiar este capítulo, usted aprenderá:

- Cómo determinar la cantidad de carga dentro de una superficie cerrada examinando el campo eléctrico sobre la superficie.
- Cuál es el significado de flujo eléctrico y cómo se calcula.
- Cómo la ley de Gauss relaciona al flujo eléctrico a través de una superficie cerrada con la carga encerrada por la superficie.
- Cómo usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico debido a una distribución simétrica de la carga.
- Dónde se localiza la carga en un conductor cargado.

? Esta niña adquiere una carga eléctrica al tocar la esfera metálica con carga. Los cabellos con carga en su cabeza se repelen y se levantan. Si la niña estuviera *dentro* de una esfera de metal grande y con carga, ¿sus cabellos se levantarían?



Con frecuencia, al efectuar un trabajo existe un modo fácil y otro difícil; el modo fácil tal vez sólo requiera el empleo de las herramientas correctas. En física las *propiedades de simetría* de los sistemas constituyen una herramienta importante para simplificar los problemas. Muchos sistemas físicos tienen simetría; por ejemplo, un cuerpo cilíndrico no se ve distinto después de hacerlo girar sobre su eje, y una esfera de metal con carga se ve igual una vez que se ha hecho girar alrededor de cualquier eje que pase por su centro.

La ley de Gauss es parte de la clave para utilizar consideraciones de simetría que simplifiquen los cálculos del campo eléctrico. Por ejemplo, el campo de una distribución de carga en una línea recta o en una hoja plana, que se obtuvo en la sección 21.5 con algunas integrales un tanto difíciles, se obtiene en unos cuantos renglones con ayuda de la ley de Gauss. Sin embargo, la ley de Gauss es algo más que un método para hacer ciertos cálculos con facilidad. En realidad es un enunciado fundamental acerca de la relación que hay entre las cargas eléctricas y los campos eléctricos. Entre otras cosas, la ley de Gauss ayuda a entender cómo se distribuye la carga en los cuerpos conductores.

La ley de Gauss se trata de lo siguiente. Dada cualquier distribución general de carga, se rodea con una superficie imaginaria que la encierre y luego se observa el campo eléctrico en distintos puntos de esa superficie imaginaria. La ley de Gauss es una relación entre el campo en *todos* los puntos de la superficie y la carga total que ésta encierra. Tal vez esto suene como una forma indirecta de expresar los fenómenos, pero es una relación sumamente útil. Más allá de su empleo como herramienta de cálculo, la ley de Gauss ayuda a tener una comprensión más profunda de los campos eléctricos. En varios de los siguientes capítulos recurriremos continuamente a esta comprensión conforme avancemos en el estudio del electromagnetismo.

22.1 Carga y flujo eléctrico

En el capítulo 21 se planteó la pregunta, “Dada una distribución de carga, ¿cuál es el campo eléctrico que produce esa distribución en un punto P ?”. Vimos que la respuesta podía encontrarse si se representaba la distribución como un conjunto de cargas puntuales, cada una de las cuales producía un campo eléctrico $\vec{E}$ dado por la ecuación

En esta sección el análisis de la ley de Gauss se basa e inspira en las ideas innovadoras de Ruth W. Chabay y Bruce A. Sherwood, en su obra *Electric and Magnetic Interactions* (John Wiley & Sons, 1994).

(21.7). Así, el campo total en P es la suma vectorial de los campos debidos a todas las cargas puntuales.

Pero existe una relación alternativa entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos. Para descubrir esta relación, planteemos la pregunta del capítulo 21 a la inversa: “si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué podemos determinar acerca de la distribución de carga en esa región?”

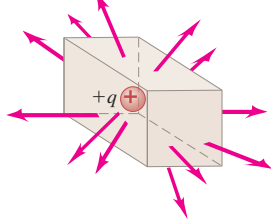
He aquí un ejemplo. Considere la caja que se ilustra en la figura 22.1a, que puede contener o no una carga eléctrica. Imagine que la caja está construida con un material que no tiene efecto en ningún campo eléctrico; es como los conceptos de la cuerda sin masa y el plano inclinado libre de fricción. Mejor aún, dejemos que la caja represente una superficie *imaginaria* que puede encerrar o no cierta carga. Llamaremos a la caja una **superficie cerrada**, ya que encierra por completo un volumen. ¿Cómo determinar cuánta carga eléctrica (si es que la hay) se encuentra dentro de la caja?

Como sabemos que una distribución de carga produce un campo eléctrico y que éste ejerce una fuerza sobre una carga de prueba, se mueve una carga de prueba q_0 en torno a las proximidades de la caja. Con la medición de la fuerza $\vec{F}$ experimentada por la carga de prueba en diferentes posiciones, se elabora un mapa tridimensional del campo eléctrico $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ fuera de la caja. En el caso que se ilustra en la figura 22.1b, el mapa resulta ser el mismo que el del campo eléctrico producido por una carga puntual positiva (figura 21.29a). A partir de los detalles del mapa es posible determinar el valor exacto de la carga puntual dentro de la caja.

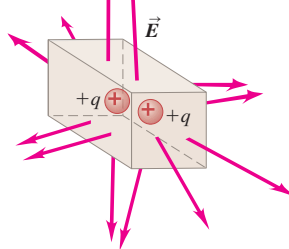
Para determinar el contenido de la caja, en realidad sólo se necesita medir $\vec{E}$ en la *superficie* de la caja. En la figura 22.2a hay una sola carga puntual positiva en el interior de la caja, y en la figura 22.2b hay dos de tales cargas. Los patrones de campo en las superficies de las cajas son diferentes en sus detalles, pero en ambos casos el campo eléctrico apunta hacia fuera de la caja. Las figuras 22.2c y 22.2d ilustran casos con una y dos cargas puntuales negativas, respectivamente, dentro de la caja. Una vez más, los detalles de $\vec{E}$ sobre la superficie de la caja son distintos, pero en los dos casos el campo apunta hacia la caja.

22.2 El campo eléctrico sobre la superficie de las cajas contiene a) una sola carga puntual positiva, b) dos cargas puntuales positivas, c) una sola carga puntual negativa, o d) dos cargas puntuales negativas.

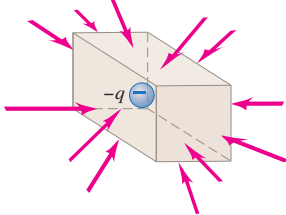
a) Carga positiva dentro de la caja, flujo hacia fuera



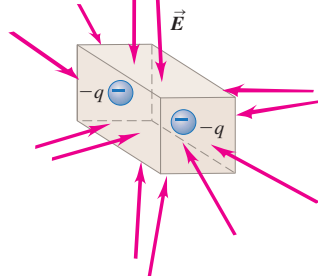
b) Cargas positivas dentro de la caja, flujo hacia fuera



c) Carga negativa dentro de la caja, flujo hacia dentro



d) Cargas negativas dentro de la caja, flujo hacia dentro

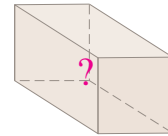


Activ
ONLINE
Physics

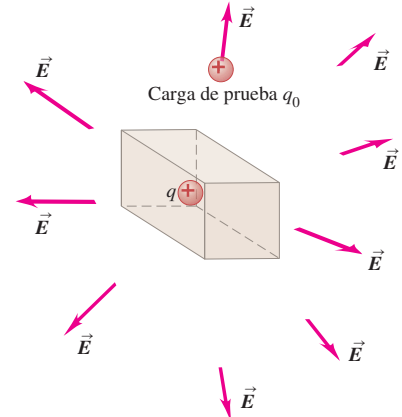
11.7 Flujo eléctrico

22.1 ¿Cómo se podría medir la carga dentro de una caja sin abrirla?

a) Caja que contiene una cantidad desconocida de carga



b) Uso de una carga de prueba fuera de la caja para determinar la cantidad de carga que hay en el interior



El flujo eléctrico y la carga encerrada

En la sección 21.4 se mencionó la analogía entre los vectores de campo eléctrico y los vectores de velocidad de un fluido en movimiento. Esta analogía resulta útil aun cuando los campos eléctricos no “fluyen” en realidad. Empleando esta analogía, en las figuras 22.2a y 22.2b, en las que los vectores de campo eléctrico apuntan hacia fuera de la superficie, decimos que existe un **flujo eléctrico** saliente. (La palabra “flujo” proviene de un término en latín que significa “fluido”.) En las figuras 22.2c y 22.2d, los vectores $\vec{E}$ se dirigen hacia la superficie, y el flujo eléctrico es *entrante*.

La figura 22.2 sugiere una relación sencilla: la carga positiva dentro de la caja corresponde a un flujo eléctrico saliente a través de la superficie de la caja, y la carga negativa en el interior corresponde a un flujo eléctrico entrante. ¿Qué pasa si la carga dentro de la caja es *cero*? En la figura 22.3a la caja está vacía y $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todo lugar, por lo que no hay flujo eléctrico hacia el interior o exterior de la caja. En la figura 22.3b, dentro de la caja hay una carga positiva y otra negativa de la misma magnitud, por lo que la carga *net*a en el interior es igual a cero. Hay un campo eléctrico, pero “fluye hacia dentro” de la caja en la mitad de su superficie y “fluye hacia fuera” de la caja en la otra mitad. Por lo tanto, no hay flujo eléctrico *net*o hacia dentro o hacia fuera de la caja.

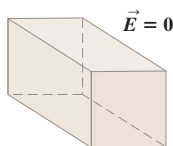
En la figura 22.3c, la caja de nuevo está vacía. Sin embargo, hay una carga presente *fuera* de la caja, que se ha colocado con uno de sus extremos paralelos a una lámina infinita con carga uniforme que produce un campo eléctrico uniforme perpendicular a la lámina (como se vio en el ejemplo 21.12 de la sección 21.5). En un extremo de la caja, $\vec{E}$ apunta hacia esta última, y en el extremo opuesto $\vec{E}$ apunta hacia fuera de la caja; y en los lados, $\vec{E}$ es paralelo a la superficie, por lo que no apunta hacia dentro ni hacia fuera de la caja. Como sucede en la figura 22.3b, el flujo eléctrico hacia el interior en una parte de la caja compensa con exactitud al flujo eléctrico que va hacia el exterior en la otra parte. De manera que en todos los casos que se ilustran en la figura 22.3, no hay un flujo eléctrico *net*o a través de la superficie de la caja, y ninguna carga *net*a está encerrada en ella.

Las figuras 22.2 y 22.3 ponen de manifiesto una vinculación entre el *signo* (positivo, negativo o cero) de la carga *net*a contenida dentro de una superficie cerrada y el sentido (saliente, entrante o ninguno) del flujo eléctrico neto a través de la superficie. Asimismo, existe una conexión entre la *magnitud* de la carga neta dentro de la superficie cerrada y la *intensidad* del “flujo” neto de $\vec{E}$ sobre la superficie. Tanto en la figura 22.4a como en la 22.4b, hay una sola carga puntual en el interior de la caja, pero en la figura 22.4b la magnitud de la carga es el doble de grande, por lo que $\vec{E}$ tiene en todo lugar el doble de magnitud que en la figura 22.4a. Si tenemos en mente la analogía con el flujo de fluidos, esto significa que el flujo eléctrico saliente neto también es dos veces mayor en la figura 22.4b que en la 22.4a. Esto sugiere que el flujo eléctrico neto a través de la superficie de la caja es *directamente proporcional* a la magnitud de la carga neta encerrada en la caja.

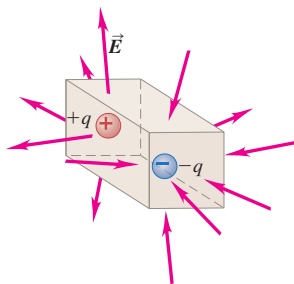
22.3 Tres casos en los que hay una carga *net*a de cero en el interior de la caja, y no hay flujo eléctrico a través de la superficie de ésta.

a) Caja vacía con $\vec{E} = \mathbf{0}$. b) Caja que contiene una carga puntual positiva y una negativa de igual magnitud. c) Caja vacía inmersa en un campo eléctrico uniforme.

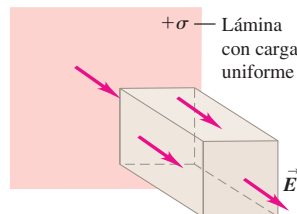
a) Sin carga dentro de la caja, flujo igual a cero



b) Carga *net*a igual a cero en el interior de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente



c) No hay carga dentro de la caja; el flujo entrante cancela el flujo saliente



Esta conclusión es independiente del tamaño de la caja. En la figura 22.4c la carga puntual $+q$ está encerrada por una caja con dimensiones lineales que duplican las de la caja de la figura 22.4a. La magnitud del campo eléctrico de una carga puntual disminuye con la distancia de acuerdo con $1/r^2$, de manera que la magnitud media de $\vec{E}$ en cada cara de la caja grande en la figura 22.4c es justo $\frac{1}{4}$ de la magnitud media en la cara correspondiente en la figura 22.4a. Pero cada cara de la caja grande tiene exactamente el cuádruple del área de la cara correspondiente de la caja pequeña. Por lo tanto, el flujo eléctrico saliente de la caja es *igual* para las dos cajas si el flujo eléctrico se *define* como sigue: con respecto a cada cara de la caja, hay que calcular el producto de la componente perpendicular media de $\vec{E}$ por el área de esa cara; luego se suman los resultados de todas las caras de la caja. Con esta definición, el flujo eléctrico neto debido a una sola carga puntual dentro de la caja es independiente del tamaño de ésta y sólo depende de la carga neta en el interior.

Se ha visto que existe una relación entre la cantidad neta de carga dentro de una superficie cerrada y el flujo eléctrico a través de esa superficie. Para los casos especiales de una superficie cerrada en forma de caja rectangular y distribuciones de carga constituidas por cargas puntuales o láminas infinitas con carga, se tiene lo siguiente:

1. El hecho de que el flujo neto sea hacia el exterior o hacia el interior de una superficie cerrada depende del signo de la carga encerrada.
2. Las cargas *afuera* de la superficie no provocan un flujo eléctrico neto a través de la superficie.
3. El flujo eléctrico neto es directamente proporcional a la cantidad neta de carga contenida dentro de la superficie, pero es independiente del tamaño de la superficie cerrada.

Estas observaciones son el planteamiento cualitativo de la *ley de Gauss*.

¿Son válidas estas observaciones para otras clases de distribuciones de carga y para superficies cerradas de forma arbitraria? Se demostrará que la respuesta a estas preguntas es *sí*. Pero para explicar por qué esto es así, se necesita contar con un enunciado matemático preciso de lo que significa el flujo eléctrico, lo cual se desarrollará en la siguiente sección.

Evalúe su comprensión de la sección 22.1 Si todas las dimensiones de la caja de la figura 22.2a se incrementaran en un factor de 3, ¿qué efecto tendría este cambio en el flujo eléctrico a través de la caja? i) El flujo sería $3^2 = 9$ veces mayor; ii) el flujo sería 3 veces más grande; iii) el flujo permanecería sin cambio; iv) el flujo sería de $(\frac{1}{3})$; v) el flujo sería $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$; vi) no hay información suficiente para decidir.



22.2 Cálculo del flujo eléctrico

En la sección anterior presentamos el concepto de *flujo eléctrico*. Cualitativamente, el flujo eléctrico a través de una superficie es la descripción de si el campo eléctrico $\vec{E}$ apunta hacia la superficie o en sentido contrario. Esto se utilizó para formular un enunciado cualitativo de la ley de Gauss: el flujo eléctrico neto a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la carga neta en el interior de esa superficie. Para aprovechar por completo esta ley, se necesita saber cómo *calcular* el flujo eléctrico. Para ello, se empleará de nuevo la analogía entre un campo eléctrico $\vec{E}$ y el campo de los vectores de velocidad $\vec{v}$ en un fluido en movimiento. (De nuevo, recuerde que esto sólo es una analogía; un campo eléctrico *no* es un flujo.)

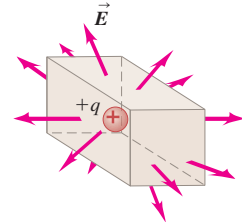
Flujo: Analogía del fluido en movimiento

La figura 22.5 ilustra un fluido en movimiento estable de izquierda a derecha. Examinemos la tasa de flujo volumétrico dV/dt (digamos, en metros cúbicos por segundo) a través del alambre rectangular de área A . Cuando el área es perpendicular a la velocidad de flujo $\vec{v}$ (figura 22.5a) y la velocidad de flujo es la misma en todos los puntos del fluido, la tasa de flujo volumétrico dV/dt es el área A multiplicada por la velocidad del flujo v :

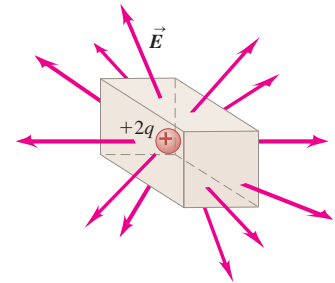
$$\frac{dV}{dt} = vA$$

22.4 a) Caja que encierra una carga puntual positiva $+q$. b) La duplicación de la carga ocasiona que la magnitud de $\vec{E}$ se duplique, lo que también duplica el flujo eléctrico a través de la superficie. c) Si la carga permanece igual, pero las dimensiones de la caja se duplican, el flujo permanece sin cambio. La magnitud de $\vec{E}$ sobre la superficie disminuye en un factor de $\frac{1}{4}$, pero el área a través de la que “fluye” $\vec{E}$ aumenta en un factor de 4.

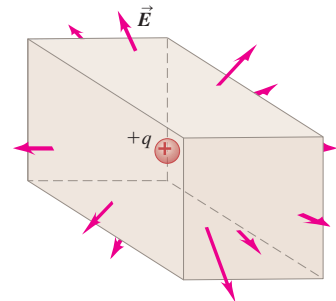
a) La caja contiene una carga



b) Al duplicarse la carga se duplica el flujo.

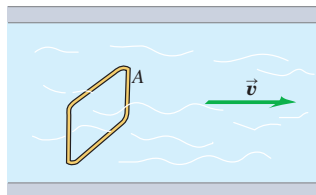


c) Al duplicarse de las dimensiones de la caja *no* cambia el flujo.

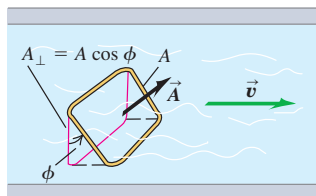


22.5 La tasa de flujo volumétrico del fluido a través del alambre rectangular a) es vA cuando el área del rectángulo es perpendicular a $\vec{v}$, y b) cuando el rectángulo está inclinado un ángulo ϕ la tasa es $vA \cos \phi$.

a) Alambre rectangular en un fluido



b) El alambre rectangular está inclinado un ángulo ϕ



Cuando el rectángulo se encuentra inclinado un ángulo ϕ (figura 22.5b) de manera que su cara no es perpendicular a $\vec{v}$, el área que se toma en cuenta es la de la silueta que se genera al mirar en la dirección de $\vec{v}$. Esta área, que se indica en color rojo y se denota con $A_{\perp}$ en la figura 22.5b, es la *proyección* del área A sobre una superficie perpendicular a $\vec{v}$. Dos lados del rectángulo proyectado tienen la misma longitud que en el original, pero los otros dos disminuyen en un factor de $\cos \phi$, por lo que el área proyectada $A_{\perp}$ es igual a $A \cos \phi$. Así, la tasa de flujo volumétrico a través de A es

$$\frac{dV}{dt} = vA \cos \phi$$

Si $\phi = 90^\circ$, $dV/dt = 0$; el alambre rectangular presenta su borde al flujo, por lo que ningún fluido pasa a través suyo.

Asimismo, $v \cos \phi$ es la componente del vector $\vec{v}$ perpendicular al plano del área A . Si se llama $v_{\perp}$ a esta componente, la tasa de flujo volumétrico queda así:

$$\frac{dV}{dt} = v_{\perp} A$$

Es posible expresar la tasa de flujo volumétrico de manera más compacta mediante el concepto de *vector de área* $\vec{A}$, una cantidad vectorial con magnitud A y dirección perpendicular al plano del área que se describe. El vector de área $\vec{A}$ describe tanto el tamaño de un área como su orientación en el espacio. En términos de $\vec{A}$, podemos escribir la tasa de flujo volumétrico a través del rectángulo en la figura 22.5b como el producto escalar:

$$\frac{dV}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Flujo de un campo eléctrico uniforme

Utilizando la analogía entre el campo eléctrico y el flujo en movimiento se definirá ahora el flujo eléctrico de la misma forma en que se acaba de definir la tasa de flujo volumétrico de un fluido; simplemente se sustituye la velocidad del fluido $\vec{v}$ por el campo eléctrico $\vec{E}$. El símbolo que se usa para el flujo eléctrico es Φ_E (la letra griega mayúscula ϕ ; el subíndice E es para recordar que se trata de flujo *eléctrico*). En primer lugar, considere un área plana A perpendicular a un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ (figura 22.6a). Se define el flujo eléctrico a través de esta área como el producto de la magnitud del campo E por el área A :

$$\Phi_E = EA$$

En términos aproximados, se puede imaginar Φ_E como las líneas de campo que pasan a través de A . El incremento del área significa que más líneas de $\vec{E}$ cruzan el área, lo que aumenta el flujo; un campo más intenso significa mayor densidad de líneas de $\vec{E}$, por lo que hay más líneas que pasan por unidad de área, lo que también incrementa el flujo.

Si el área A es plana pero no perpendicular al campo $\vec{E}$, entonces son menos las líneas de campo que la atraviesan. En este caso, el área que se toma en cuenta es la silueta que se observa al mirar en dirección de $\vec{E}$. Ésta es el área $A_{\perp}$ en la figura 22.6b, y es igual a $A \cos \phi$ (compárela con la figura 22.5b). Nuestra definición de flujo eléctrico para un campo eléctrico uniforme se generaliza a

$$\Phi_E = EA \cos \phi \quad (\text{flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana}) \quad (22.1)$$

Como $E \cos \phi$ es la componente de $\vec{E}$ perpendicular al área, la ecuación (22.1) se expresa como

$$\Phi_E = E_{\perp} A \quad (\text{flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana}) \quad (22.2)$$

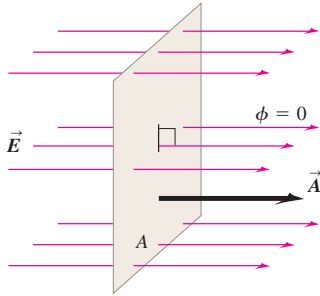
En términos del vector de área $\vec{A}$ perpendicular al área, el flujo eléctrico se expresa como el producto escalar de $\vec{E}$ y $\vec{A}$:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} \quad (\text{flujo eléctrico para } \vec{E} \text{ uniforme, superficie plana}) \quad (22.3)$$

22.6 Una superficie plana en un campo eléctrico uniforme. El flujo eléctrico Φ_E a través de la superficie es igual al producto escalar del campo eléctrico $\vec{E}$ y el vector de área $\vec{A}$.

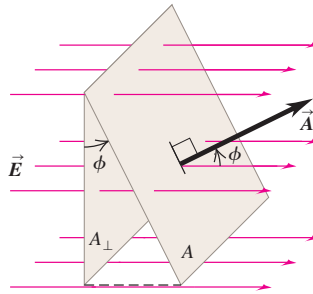
a) La superficie está de frente al campo eléctrico:

- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son paralelos (ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 0$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA$.



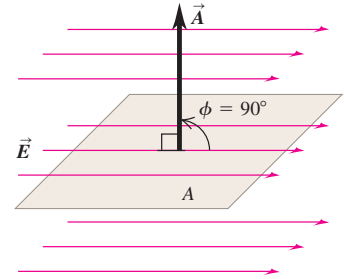
b) La superficie está inclinada un ángulo ϕ respecto de la orientación de frente:

- El ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es ϕ .
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \phi$.



c) La superficie está de canto en relación con el campo eléctrico:

- $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares (el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A}$ es $\phi = 90^\circ$).
- El flujo $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos 90^\circ = 0$.



Las ecuaciones (22.1), (22.2) y (22.3) expresan el flujo eléctrico para una superficie plana y un campo eléctrico uniforme de maneras diferentes pero equivalentes. La unidad del SI para el flujo eléctrico es $1 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. Observe que si el área está de perfil respecto del campo, $\vec{E}$ y $\vec{A}$ son perpendiculares y el flujo es igual a cero (figura 22.6c).

La dirección de un vector de área se puede representar con $\vec{A}$ empleando un *vector unitario* $\hat{n}$ perpendicular al área; $\hat{n}$ significa “normal”. De esta forma,

$$\vec{A} = A\hat{n} \quad (22.4)$$

Una superficie tiene dos lados, por lo que hay dos direcciones posibles para $\hat{n}$ y $\vec{A}$. Siempre se debe especificar cuál es la dirección elegida. En la sección 22.1 se relacionó la carga dentro de una superficie *cerrada* con el flujo eléctrico a través de ella. Con una superficie cerrada siempre se elegirá la dirección de $\hat{n}$ como la que se dirige *hacia el exterior*, y se hablará del flujo *hacia fuera* de una superficie cerrada. Así, lo que en la sección 22.1 se llamó “flujo eléctrico hacia fuera” corresponde a un valor positivo de Φ_E , y lo que se denominó “flujo eléctrico hacia dentro” corresponde a un valor negativo de Φ_E .

Flujo de un campo eléctrico no uniforme

¿Qué pasa si el campo eléctrico $\vec{E}$ no es uniforme, sino que varía de un punto a otro del área A ? O, ¿qué ocurre si A es parte de una superficie curva? Aquí se divide A en muchos elementos pequeños dA , cada uno de los cuales tiene un vector unitario $\hat{n}$ perpendicular a él, y un vector de área $d\vec{A} = \hat{n} dA$. El flujo eléctrico se calcula a través de cada elemento y los resultados se integran para obtener el flujo total:

$$\Phi_E = \int E \cos \phi dA = \int E_{\perp} dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A} \quad (\text{definición general del flujo eléctrico}) \quad (22.5)$$

Esta integral se llama **integral de superficie** de la componente $E_{\perp}$ en el área, o integral de superficie de $\vec{E} \cdot d\vec{A}$. Las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto en términos diferentes. En problemas específicos, una forma resulta en ocasiones más conveniente que otra. El ejemplo 22.3 al final de esta sección ilustra el uso de la ecuación (22.5).

En la ecuación (22.5) el flujo eléctrico $\int E_{\perp} dA$ es igual al valor *medio* de la componente perpendicular del campo eléctrico, multiplicado por el área de la superficie. Ésta es la misma definición del flujo eléctrico a que se llegó en la sección 22.1, ahora expresada en una forma más matemática. En la siguiente sección se verá la vinculación entre el flujo eléctrico total a través de *cualquier* superficie cerrada, sin importar su forma, y la cantidad de carga encerrada dentro de la superficie.

Ejemplo 22.1 Flujo eléctrico a través de un disco

Un disco con radio de 0.10 m se orienta con su vector unitario normal $\hat{n}$ con un ángulo de 30° respecto de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ con magnitud de $2.0 \times 10^3 \text{ N/C}$ (figura 22.7). (Como ésta no es una superficie cerrada, no tiene un “interior” ni un “exterior”; por eso se tiene que especificar la dirección de $\hat{n}$ en la figura.) a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del disco? b) ¿Cuál sería el flujo que cruzaría el disco si se girara de manera que su normal fuera perpendicular a $\vec{E}$? c) ¿Cuál sería el flujo que pasaría a través del disco si su normal fuera paralela a $\vec{E}$?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Este problema es sobre una superficie plana en un campo eléctrico uniforme, por lo que se aplican las ideas de esta sección.

PLANTEAR: La orientación del disco es como la del rectángulo en la figura 22.6b. El flujo eléctrico se calcula con la ecuación (22.1).

EJECUTAR: a) El área es $A = \pi(0.10 \text{ m})^2 = 0.0314 \text{ m}^2$, y el ángulo entre $\vec{E}$ y $\vec{A} = A\hat{n}$ es $\phi = 30^\circ$, por lo que

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(\cos 30^\circ) \\ &= 54 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

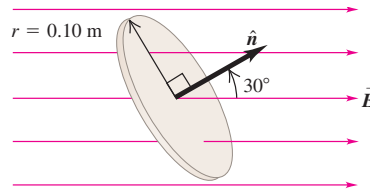
b) Ahora, la normal al disco es perpendicular a $\vec{E}$, de manera que $\phi = 90^\circ$, $\cos \phi = 0$ y $\Phi_E = 0$. A través del disco no hay flujo.

c) La normal al disco es paralela a $\vec{E}$, por lo que $\phi = 0$, $\cos \phi = 1$, y el flujo tiene su valor máximo posible. De la ecuación 22.1, se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA \cos \phi = (2.0 \times 10^3 \text{ N/C})(0.0314 \text{ m}^2)(1) \\ &= 63 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}\end{aligned}$$

EVALUAR: Como comprobación de nuestros resultados, observe que la respuesta del inciso a) es un valor menor que la del inciso c). ¿Así debería ser?

22.7 El flujo eléctrico Φ_E a través de un disco depende del ángulo entre su normal $\hat{n}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$.

**Ejemplo 22.2 Flujo eléctrico a través de un cubo**

Un cubo de arista L está situado en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$. Determine el flujo eléctrico que pasa a través de cada cara del cubo y el flujo total a través de éste cuando a) el cubo está orientado con dos de sus caras perpendiculares al campo $\vec{E}$, como se ilustra en la figura 22.8; y b) cuando el cubo se gira un ángulo θ , como en la figura 22.8b.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este problema se va a determinar el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo y el flujo total (la suma de los flujos que pasan por las seis caras).

PLANTEAR: Como $\vec{E}$ es uniforme y cada una de las seis caras del cubo es una superficie plana, se encuentra el flujo que cruza cada cara con las ecuaciones (22.3) y (22.4). Después se calcula el flujo total a través del cubo sumando los seis flujos individuales.

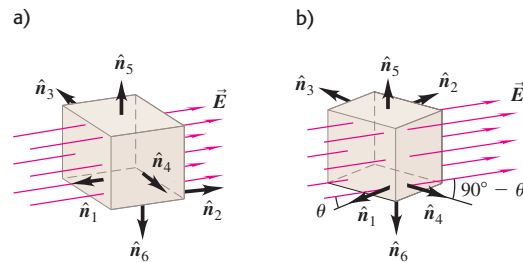
EJECUTAR: a) En la figura se ilustran los vectores unitarios para cada cara ($\hat{n}_1$ a $\hat{n}_6$); la dirección de cada vector unitario es *hacia fuera* desde la superficie cerrada del cubo. El ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_1$ es de 180° ; el ángulo entre $\vec{E}$ y $\hat{n}_2$ es de 0° ; y el ángulo entre $\vec{E}$ y cada uno de los otros cuatro vectores unitarios es de 90° . Cada cara del cubo tiene un área de L^2 , por lo que los flujos a través de cada una de las caras son los siguientes:

$$\begin{aligned}\Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos 180^\circ = -EL^2 \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = EL^2 \cos 0^\circ = +EL^2 \\ \Phi_{E3} &= \Phi_{E4} = \Phi_{E5} = \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

El flujo es negativo en la cara 1, donde $\vec{E}$ está dirigido hacia el cubo, y positivo en la cara 2, en la que $\vec{E}$ se dirige hacia fuera del cubo. El flujo *total* a través del cubo es la suma de los flujos a través de las seis caras:

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6} \\ &= -EL^2 + EL^2 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

22.8 Flujo eléctrico de un campo uniforme $\vec{E}$ a través de una caja cúbica con arista L en dos orientaciones.



b) Los flujos a través de las caras 1 y 3 son negativos, ya que $\vec{E}$ está dirigido hacia esas caras; el campo se dirige hacia fuera de las caras 2 y 4, por lo que los flujos a través de esas caras son positivos. Se tiene que

$$\begin{aligned}\Phi_{E1} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_1 A = EL^2 \cos (180^\circ - \theta) = -EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E2} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_2 A = +EL^2 \cos \theta \\ \Phi_{E3} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_3 A = EL^2 \cos (90^\circ + \theta) = -EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E4} &= \vec{E} \cdot \hat{n}_4 A = EL^2 \cos (90^\circ - \theta) = +EL^2 \sin \theta \\ \Phi_{E5} &= \Phi_{E6} = EL^2 \cos 90^\circ = 0\end{aligned}$$

El flujo total $\Phi_E = \Phi_{E1} + \Phi_{E2} + \Phi_{E3} + \Phi_{E4} + \Phi_{E5} + \Phi_{E6}$ a través de la superficie del cubo es, de nuevo, igual a cero.

EVALUAR: No sorprende que el flujo neto sea igual a cero para ambas orientaciones. Se llegó a la misma conclusión que en el análisis de la figura 22.3c en la sección 22.1. Ahí se observó que había un flujo neto de cero de un campo eléctrico uniforme a través de una superficie cerrada que no contenía carga eléctrica.

Ejemplo 22.3 Flujo eléctrico a través de una esfera

Una carga puntual positiva $q = 3.0 \mu\text{C}$ está rodeada por una esfera centrada en la carga y cuyo radio mide 0.20 m (figura 22.9). Determine el flujo eléctrico a través de la esfera debido a esta carga.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: En este caso la superficie no es plana y el campo eléctrico no es uniforme, por lo que se debe usar la definición general de flujo eléctrico.

PLANTEAR: Se usa la ecuación (22.5) para calcular el flujo eléctrico (la variable que se busca). Como la esfera está centrada en la carga puntual, en cualquier punto sobre la superficie de la esfera, $\vec{E}$ está dirigido hacia el exterior en forma perpendicular a la superficie. La dirección positiva tanto para $\hat{n}$ como para $E_{\perp}$ es hacia el exterior, por lo que $E_{\perp} = E$ y el flujo a través del elemento de superficie dA es $\vec{E} \cdot d\vec{A} = E dA$. Esto simplifica en gran medida la integral en la ecuación (22.5).

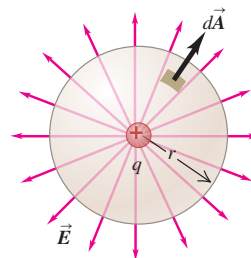
EJECUTAR: En cualquier punto de la esfera, la magnitud de $\vec{E}$ es

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{3.0 \times 10^{-6} \text{ C}}{(0.20 \text{ m})^2} = 6.75 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Puesto que E es igual en todos los puntos, se puede sacar de la integral $\Phi_E = \int E dA$ de la ecuación (22.5); lo que resta es la integral $\int dA$, que es el área total $A = 4\pi r^2$ de la superficie esférica. Así, el flujo total que sale de la esfera es

$$\Phi_E = EA = (6.75 \times 10^5 \text{ N/C})(4\pi)(0.20 \text{ m})^2 = 3.4 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$$

22.9 Flujo eléctrico a través de una esfera centrada en una carga puntual.



EVALUAR: Observe que se dividió entre $r^2 = (0.20 \text{ m})^2$ para encontrar el valor de E , y luego se multiplicó por $r^2 = (0.20 \text{ m})^2$ para encontrar Φ_E ; así, el radio r de la esfera se cancela en el resultado de Φ_E . Se habría obtenido el mismo flujo con una esfera de 2.0 m o incluso de 200 m de radio. En esencia, se llegó a la misma conclusión del análisis de la figura 22.4 en la sección 22.1, donde se consideraron superficies rectangulares cerradas de dos tamaños distintos que encerraban una carga puntual. Ahí se encontró que el flujo de $\vec{E}$ era independiente del tamaño de la superficie; se obtiene el mismo resultado para una superficie esférica. En realidad, el flujo a través de *cualquier* superficie que encierre una sola carga puntual es independiente de la forma o el tamaño de la superficie, como se verá un poco más adelante.

Evalúe su comprensión de la sección 22.2 Ordene las siguientes superficies del flujo más positivo al más negativo. i) Una superficie rectangular plana con vector de área $\vec{A} = (6.0 \text{ m}^2)\hat{i}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{j}$; ii) una superficie circular plana con vector de área $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{j}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{i} + (2.0 \text{ N/C})\hat{j}$; iii) una superficie cuadrada plana con vector de área $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{i} + (7.0 \text{ m}^2)\hat{j}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{i} - (2.0 \text{ N/C})\hat{j}$; iv) una superficie oval plana con vector de área $\vec{A} = (3.0 \text{ m}^2)\hat{i} - (7.0 \text{ m}^2)\hat{j}$ en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (4.0 \text{ N/C})\hat{i} - (2.0 \text{ N/C})\hat{j}$.



22.3 Ley de Gauss

La **ley de Gauss** es una alternativa a la ley de Coulomb. Aunque equivale por completo a la ley de Coulomb, la ley de Gauss ofrece una forma distinta de expresar la relación entre la carga eléctrica y el campo eléctrico. La formuló Carl Friedrich Gauss (1777-1855), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos. Muchas áreas de las matemáticas llevan la marca de su influencia; Gauss también realizó contribuciones igualmente significativas en la física teórica (figura 22.10).

Carga puntual dentro de una superficie esférica

La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada (una superficie que encierra un volumen definido) es proporcional a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie. En la sección 22.1 se planteó esta relación de manera cuantitativa para ciertos casos especiales; ahora se desarrollará en forma más rigurosa. Se comenzará con el campo de una sola carga puntual positiva q . Las líneas de campo se extienden en forma radial hacia fuera en todas direcciones por igual. Colocamos esta carga en el centro de una superficie esférica imaginaria con radio R . La magnitud E del campo eléctrico en cada punto de la superficie está dada por

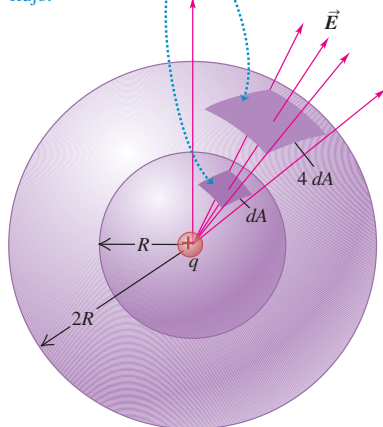
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

22.10 Carl Friedrich Gauss ayudó a desarrollar varias ramas de las matemáticas, incluidos la geometría diferencial, el análisis real y la teoría de números. Una de sus invenciones es la “curva de campana” de la estadística. Gauss también realizó investigaciones de vanguardia sobre el magnetismo de la Tierra y calculó la órbita del primer asteroide que se descubrió.



22.11 Proyección de un elemento de área dA de una esfera de radio R sobre una esfera concéntrica de radio $2R$. La proyección multiplica las dimensiones lineales por 2, por lo que el elemento de área sobre la esfera más grande es $4 dA$.

A través de estos dos elementos de área pasa el mismo número de líneas de campo y el mismo flujo.



En cada punto de la superficie, $\vec{E}$ es perpendicular a ésta, y su magnitud es la misma en todos los puntos, como se ilustra en el ejemplo 22.3 (sección 22.2). El flujo eléctrico total es el producto de la magnitud del campo E por el área total $A = 4\pi R^2$ de la esfera:

$$\Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} (4\pi R^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.6)$$

El flujo es independiente del radio R de la esfera; sólo depende de la carga q encerrada por la esfera.

Este resultado también se puede interpretar en términos de las líneas de campo. La figura 22.11 muestra dos esferas de radios R y $2R$ centradas en la carga puntual q . Cada línea de campo que pasa a través de la esfera más pequeña también cruza la esfera más grande, por lo que el flujo total a través de cada esfera es el mismo.

Lo que se cumple para toda la esfera también se cumple para cualquier región de su superficie. En la figura 22.11, sobre la esfera de radio R , está resaltada un área dA que se proyecta sobre la esfera de radio $2R$ con líneas que van del centro y que pasan por puntos sobre la frontera de dA . El área proyectada sobre la esfera mayor es evidentemente $4 dA$. Pero como el campo eléctrico debido a una carga puntual es inversamente proporcional a r^2 , la magnitud del campo sobre la esfera de radio $2R$ es $\frac{1}{4}$ de la magnitud sobre la esfera de radio R . Así, el flujo eléctrico es el mismo para las dos áreas e independiente del radio de la esfera.

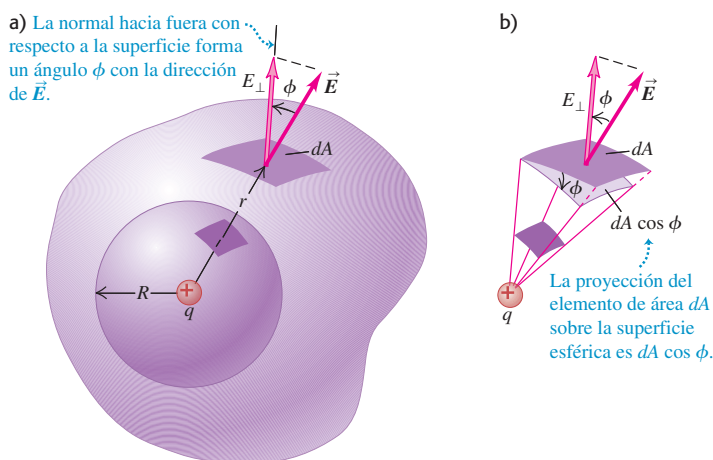
Carga puntual dentro de una superficie no esférica

Esa técnica de proyección demuestra cómo generalizar el análisis a superficies no esféricas. En la figura 22.12a aparece una esfera de radio R circundada por una superficie de forma irregular, en vez de por una segunda esfera. Considere un pequeño elemento de área dA sobre la superficie irregular; se observa que esta área es *mayor* que el elemento correspondiente sobre una superficie esférica a la misma distancia de q . Si una normal a dA forma un ángulo ϕ con una línea radial que sale de q , dos lados del área proyectada sobre la superficie esférica se ven disminuidos en un factor $\cos \phi$ (figura 22.12b). Los otros dos lados permanecen sin cambio. De esta forma, el flujo eléctrico a través del elemento de superficie esférica es igual al flujo $E dA \cos \phi$ a través del correspondiente elemento de superficie irregular.

Se puede dividir toda la superficie irregular en elementos dA , calcular para cada uno de ellos el flujo eléctrico $E dA \cos \phi$, y sumar los resultados por integración, como en la ecuación (22.5). Cada uno de los elementos de área se proyecta sobre un elemento de superficie esférica correspondiente. Así, el flujo eléctrico *total* que atraviesa la superficie irregular, dado por cualquiera de las formas que adopta la ecuación (22.5), debe ser el mismo que el flujo total a través de una esfera, el cual es igual a q/ϵ_0 de acuerdo con la ecuación (22.6). Por lo tanto, para la superficie irregular,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (22.7)$$

22.12 Cálculo del flujo eléctrico que pasa a través de una superficie no esférica.



La ecuación (22.7) se cumple para una superficie de *cualquier* forma o tamaño, siempre y cuando sea una superficie *cerrada* que contenga la carga q . El círculo en el signo de la integral recuerda que la integral siempre se toma sobre una superficie *cerrada*.

Los elementos de área $d\vec{A}$ y los vectores unitarios $\hat{n}$ correspondientes siempre apuntan hacia *fuera* del volumen encerrado por la superficie. El flujo eléctrico es positivo en aquellas áreas en las que el campo eléctrico apunta hacia fuera de la superficie y negativo donde apunta hacia dentro. Además, $E_{\perp}$ es positivo en los puntos en que $\vec{E}$ apunta hacia el exterior de la superficie y negativo en los que $\vec{E}$ apunta hacia el interior de ésta.

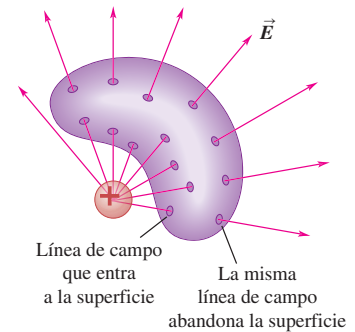
Si la carga puntual en la figura 22.12 es negativa, el campo $\vec{E}$ está dirigido en forma radial *hacia dentro*; en ese caso, el ángulo ϕ es mayor de 90° , su coseno es negativo y la integral en la ecuación (22.7) es negativa. Pero como q también es negativa, la ecuación (22.7) se cumple.

Para una superficie cerrada que *no* encierre carga,

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

Éste es el enunciado matemático que indica que cuando una región no contiene carga, cualquier línea de campo producida por una carga *afuera* de la región y que entran por un lado han de salir por el otro. (En la sección 22.1 se llegó a la misma conclusión al considerar el caso especial de una caja rectangular en un campo uniforme.) La figura 22.13 ilustra este punto. *Las líneas de campo eléctrico comienzan o terminan dentro de una región del espacio sólo cuando en esa región existe carga.*

22.13 Carga puntual *afuera* de una superficie cerrada que no encierra ninguna carga. Si una línea de campo eléctrico proveniente de la carga externa entra por un punto de la superficie, debe salir por otro.



Forma general de la ley de Gauss

Ahora viene el paso final en la obtención de la forma general de la ley de Gauss. Suponga que la superficie encierra no sólo una carga puntual q , sino varias cargas, $q_1, q_2, q_3, \dots$. El campo eléctrico total (resultante) $\vec{E}$ en cualquier punto es la suma vectorial de los campos $\vec{E}$ de las cargas individuales. Sea Q_{enc} la carga *total* encerrada por la superficie $Q_{\text{enc}} = q_1 + q_2 + q_3 + \dots$. Sea también $\vec{E}$ el campo *total* en la posición del elemento de área de la superficie $d\vec{A}$, y sea $E_{\perp}$ su componente perpendicular al plano de ese elemento (es decir, paralelo a $d\vec{A}$). Luego, se puede escribir una ecuación como la (22.7) para cada carga y su campo correspondiente y luego sumar los resultados. Al hacerlo se obtiene el enunciado general de la ley de Gauss:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\text{ley de Gauss}) \quad (22.8)$$

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga eléctrica total (neta) dentro de la superficie, dividida entre ϵ_0 .

CAUTION Las superficies gaussianas son imaginarias Recuerde que la superficie cerrada a que se refiere la ley de Gauss es *imaginaria*; no es necesario que haya un objeto material en la posición de la superficie. A menudo se hace referencia a la superficie cerrada que se menciona en la ley de Gauss como **superficie gaussiana**.

Utilizando la definición de Q_{enc} y las distintas maneras de expresar el flujo eléctrico que da la ecuación (22.5), la ley de Gauss se plantea en las siguientes formas equivalentes:

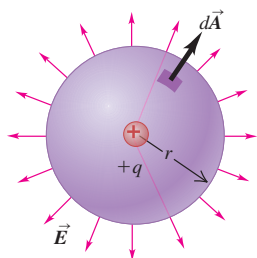
$$\Phi_E = \oint E \cos \phi \, dA = \oint E_{\perp} \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \quad (\text{diversas formas de la ley de Gauss}) \quad (22.9)$$

Igual que en la ecuación (22.5), las diversas formas de la integral expresan el mismo concepto, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana, con distintos términos. En ocasiones conviene más una forma que otra.

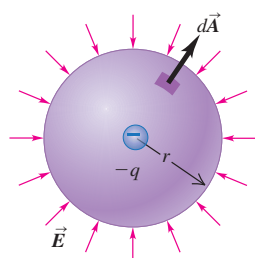
Como ejemplo, en la figura 22.14a se muestra una superficie gaussiana de radio r alrededor de una carga puntual positiva $+q$. El campo eléctrico apunta hacia fuera de la superficie gaussiana, por lo que en cada punto de la superficie, $\vec{E}$ está en la misma

22.14 Superficies gaussianas esféricas alrededor de a) una carga puntual positiva y b) una carga puntual negativa.

a) Superficie gaussiana alrededor de una carga positiva: flujo positivo (saliente)



b) Superficie gaussiana alrededor de una carga negativa: flujo negativo (entrante)



dirección que $d\vec{A}$, $\phi = 0$, y $E_{\perp}$ es igual a la magnitud del campo $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Como E es igual en todos los puntos de la superficie, es válido sacarlo de la integral en la ecuación (22.9), de manera que la integral que queda es $\oint dA = A = 4\pi r^2$, que es el área de la esfera. Así, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} dA = \oint \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

La carga Q_{enc} encerrada sólo es la carga $+q$, lo que concuerda con la ley de Gauss. Si la superficie gaussiana encerrara una carga puntual *negativa*, como en la figura 22.14b, entonces $\vec{E}$ apuntaría *hacia el interior* de la superficie en cada punto en la dirección opuesta a $d\vec{A}$. Así, $\phi = 180^\circ$ y $E_{\perp}$ es igual al negativo de la magnitud del campo: $E_{\perp} = -E = -| -q | / 4\pi\epsilon_0 r^2 = -q / 4\pi\epsilon_0 r^2$. De esta forma, la ecuación (22.9) se convierte en

$$\Phi_E = \oint E_{\perp} dA = \oint \left(\frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint dA = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{-q}{\epsilon_0}$$

Esto de nuevo concuerda con la ley de Gauss porque la carga encerrada en la figura 22.14b es $Q_{\text{enc}} = -q$.

En las ecuaciones (22.8) y (22.9), Q_{enc} siempre es la suma algebraica de todas las cargas positivas y negativas encerradas por la superficie gaussiana, y $\vec{E}$ es el campo *total* en cada punto de la superficie. Note también que, en general, este campo es causado parcialmente por cargas dentro de la superficie y parcialmente por cargas afuera de ésta. Pero como muestra la figura 22.13, las cargas en el exterior *no* contribuyen al flujo total (neto) a través de la superficie. Por lo tanto, las ecuaciones (22.8) y (22.9) son correctas aun cuando haya cargas afuera de la superficie que contribuyan al campo eléctrico en esta última. Cuando $Q_{\text{enc}} = 0$, el flujo total a través de la superficie gaussiana debe ser igual a cero, aunque ciertas áreas tengan flujo positivo y otras flujo negativo (véase la figura 22.3b).

La ley de Gauss es la respuesta definitiva a la pregunta que se planteó al inicio de la sección 22.1: “si se conoce la disposición del campo eléctrico en una región determinada, ¿qué podemos determinar acerca de la distribución de carga en esa región?” La ley de Gauss ofrece una relación entre el campo eléctrico en una superficie cerrada y la distribución de carga dentro de esa superficie. Pero en ciertos casos la ley de Gauss puede usarse para responder la pregunta opuesta: “si se conoce la distribución de carga, ¿qué se concluye acerca del campo eléctrico que esa distribución genera?” Tal vez parezca que la ley de Gauss es una manera poco atractiva de contestar esta pregunta, ya que resolver la integral en la ecuación (22.8) quizá parezca una tarea intimidante. En ocasiones sí lo es, pero en otras es sorprendentemente fácil. A continuación se presenta un ejemplo que *no* implica integración; en la siguiente sección se verán varios ejemplos más.

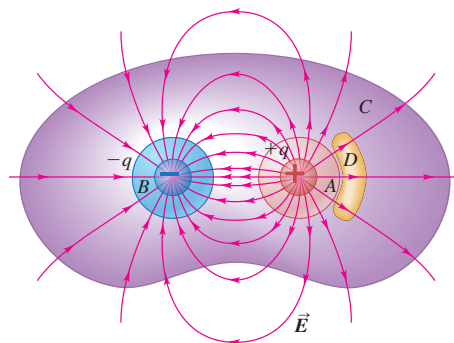
Ejemplo conceptual 22.4 Flujo eléctrico y carga encerrada

La figura 22.15 muestra el campo producido por dos cargas puntuales $+q$ y $-q$ de igual magnitud y signos opuestos (un dipolo eléctrico). Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las superficies cerradas, A, B, C y D.

SOLUCIÓN

La definición de flujo eléctrico dada en la ecuación (22.5) implica una integral de superficie, por lo que quizá parezca que se necesita resolver una integral. Pero la ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga total encerrada dividida entre ϵ_0 . Por inspección de la figura 22.15, la superficie A (en color rojo) encierra la carga positiva, por lo que $Q_{\text{enc}} = +q$; la superficie B (en azul) contiene la carga negativa, de manera que $Q_{\text{enc}} = -q$; la superficie C (en púrpura) encierra las *dos* cargas, y tiene $Q_{\text{enc}} = +q + (-q) = 0$; y la superficie D (en amarillo), no encierra cargas y también tiene $Q_{\text{enc}} = 0$. De

22.15 El número neto de líneas de campo que salen de una superficie cerrada es proporcional a la carga total contenida por la superficie.



manera que sin resolver ninguna integral podemos concluir que los flujos totales para las diversas superficies son $\Phi_E = +q/\epsilon_0$ para la superficie A , $\Phi_E = -q/\epsilon_0$ para la B y $\Phi_E = 0$ tanto para la superficie C como la D .

Estos resultados dependen sólo de las cargas encerradas dentro de cada superficie gaussiana, no de las formas específicas de las superficies. Por ejemplo, compare la superficie C con la superficie rectangular que se muestra en la figura 22.3b, que también encierra las dos cargas en un dipolo eléctrico. En ese caso también se concluyó que el flujo neto de $\vec{E}$ era igual a cero; el flujo hacia el interior en una parte de la superficie compensaba con exactitud el flujo hacia fuera en el resto de la superficie.

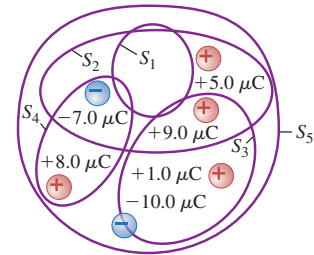
Al examinar las líneas del campo eléctrico se obtienen conclusiones similares. La superficie A encierra sólo la carga positiva; en la fi-

gura 22.15 hay dibujadas 18 líneas que cruzan A en dirección saliente. La superficie B sólo contiene la carga negativa; está atravesada por las mismas 18 líneas, pero en dirección entrante. La superficie C encierra las dos cargas. Se interseca con líneas en 16 puntos; en 8 intersecciones las líneas van hacia el exterior, y en otras 8 hacia el interior. El número *neto* de líneas que cruzan en dirección saliente es cero, y la carga neta dentro de la superficie también es igual a cero. La superficie D se interseca en 6 puntos, en 3 de los cuales las líneas van hacia fuera y en otros 3 hacia dentro. El número neto de líneas que cruzan hacia el exterior y la carga total encerrada son iguales a cero. Hay puntos sobre las superficies en los que $\vec{E}$ no es perpendicular a la superficie, pero esto no afecta el conteo de las líneas de campo.

Evalúe su comprensión de la sección 22.3 En la figura 22.16 se ilustran seis cargas puntuales que están en el mismo plano. Hay cinco superficies gaussianas — S_1 , S_2 , S_3 , S_4 y S_5 — que encierran, cada una, parte de este plano, y la figura 22.16 presenta la intersección de cada superficie con el plano. Clasifique las cinco superficies en orden del flujo eléctrico que pasa a través de ellas, del más positivo al más negativo.



22.16 Cinco superficies gaussianas y seis cargas puntuales.



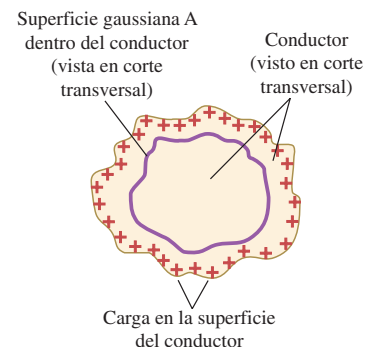
22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Gauss es válida para *cualquier* distribución de cargas y *cualquier* superficie cerrada. La ley de Gauss se puede utilizar de dos maneras. Si se conoce la distribución de la carga y si ésta tiene simetría suficiente que permita evaluar la integral en la ley de Gauss, se puede obtener el campo. O si se conoce el campo, es posible usar la ley de Gauss para encontrar la distribución de carga, como las cargas en superficies conductoras.

En esta sección se presentan ejemplos de ambas clases de aplicaciones. Cuando los estudie, observe el papel que desempeñan las propiedades de la simetría de cada sistema. Se empleará la ley de Gauss para calcular los campos eléctricos ocasionados por varias distribuciones de carga sencillas; los resultados se presentan en forma de tabla en el resumen del capítulo.

En problemas prácticos es frecuente encontrar situaciones en las que se desea conocer el campo eléctrico causado por una distribución de carga en un conductor. Estos cálculos se facilitan por el siguiente hecho notable: *cundo en un conductor sólido se coloca un exceso de carga que se encuentra en reposo, se encuentra en su totalidad en la superficie, no en el interior del material.* (Con el término *exceso* se quiere decir cargas distintas de los iones y electrones libres que constituyen el conductor neutral.) La demostración es la siguiente. Se sabe, de la sección 21.4, que en una situación electrostática (con todas las cargas en reposo) el campo eléctrico $\vec{E}$ en cada punto en el interior de un material conductor es igual a cero. Si $\vec{E}$ no fuera cero, las cargas en exceso se moverían. Suponga que se construye una superficie gaussiana dentro del conductor, como la superficie A en la figura 22.17. Como $\vec{E} = 0$ en cualquier lugar de la superficie, la ley de Gauss requiere que la carga neta dentro de la superficie sea igual a cero. Ahora imagine que se comprime la superficie como un globo que se desinfla hasta que encierre una región tan pequeña que se pueda considerar un punto P ; la carga en ese punto debe ser igual a cero. Esto se puede hacer en cualquier parte dentro del conductor, *por lo que no puede haber carga en exceso en ningún punto dentro de un conductor sólido; toda carga excedente debe encontrarse en la superficie del conductor.* (Este resultado es para un conductor sólido. En la siguiente sección se estudiará lo que sucede si el conductor tiene cavidades en su interior.) En los ejemplos que siguen se utilizará con frecuencia este hecho.

22.17 En condiciones electrostáticas (las cargas no están en movimiento), cualquier carga en exceso en un conductor sólido se encuentra por completo en la superficie del conductor.



Estrategia para resolver problemas 22.1 Ley de Gauss



IDENTIFICAR los conceptos relevantes: La ley de Gauss tiene su máxima utilidad en situaciones en que la distribución de carga tiene simetría esférica o cilíndrica, o está distribuida de manera uniforme en un plano. En estos casos se determina la dirección de $\vec{E}$ a partir de la simetría de la distribución de la carga. Si se conoce la distribución de carga, se puede usar la ley de Gauss para obtener la magnitud de $\vec{E}$. En forma alternativa, si se conoce el campo, se emplea la ley de Gauss para determinar los detalles de la distribución de carga. En cualquier caso, el análisis comienza con la pregunta: ¿Cuál es la simetría?

PLANTEAR el problema mediante los siguientes pasos:

1. Seleccione la superficie que se usará en la ley de Gauss. Es frecuente llamarla *superficie gaussiana*. Si se busca determinar el campo en un punto particular, entonces ese punto debe localizarse en la superficie gaussiana.
2. La superficie gaussiana no tiene que ser una superficie física real, como la de un cuerpo sólido. Es frecuente que la superficie apropiada sea una superficie geométrica imaginaria; puede estar en el espacio vacío, contenida en un cuerpo sólido, o ambas cosas.
3. Por lo general es posible evaluar la integral en la ley de Gauss (sin emplear una computadora) sólo si la superficie gaussiana y la distribución de carga tienen alguna propiedad de simetría. Si la distribución de carga tiene simetría cilíndrica o esférica, elija un cilindro coaxial o una esfera concéntrica como la superficie gaussiana, respectivamente.

EJECUTAR la solución como sigue:

1. Resuelva la integral en la ecuación (22.9), lo que quizá parezca un trabajo intimidante, pero la simetría de la distribución de la carga y la selección cuidadosa de una superficie gaussiana facilitan la tarea.
2. Con frecuencia puede considerarse la superficie gaussiana cerrada como constituida por varias superficies separadas, tales como los

lados y extremos de un cilindro. La integral $\oint \vec{E}_{\perp} dA$ sobre toda la superficie cerrada siempre es igual a la suma de las integrales sobre todas las superficies separadas. Algunas de esas integrales pueden ser igual a cero, como las que se describen más adelante en los puntos 4 y 5.

3. Si $\vec{E}$ es *perpendicular* (normal) en cada punto de la superficie con área A , si apunta *hacia fuera* desde interior de la superficie, y si también tiene la misma *magnitud* en todos los puntos de la superficie, entonces $E_{\perp} = E = \text{constante}$ y $\oint E_{\perp} dA$ sobre la superficie es igual a EA . Si en vez de ello, $\vec{E}$ es perpendicular y apunta *hacia dentro*, entonces $E_{\perp} = -E$ y $\oint E_{\perp} dA = -EA$.
4. Si $\vec{E}$ es *tangente* a la superficie en cada punto, entonces $E_{\perp} = 0$ y la integral sobre la superficie es igual a cero.
5. Si $\vec{E} = 0$ en cada punto de la superficie, la integral es cero.
6. En la integral $\oint \vec{E}_{\perp} dA$, $E_{\perp}$ siempre es la componente perpendicular del campo eléctrico *total* en cada punto de la superficie gaussiana cerrada. En general, este campo puede deberse parcialmente a cargas dentro de la superficie y parcialmente a cargas afuera de ella. Aun cuando *no* hubiera carga dentro de la superficie, el campo en puntos de la superficie gaussiana no necesariamente es igual a cero. Sin embargo, en ese caso, la *integral* sobre la superficie gaussiana —es decir, el flujo eléctrico total a través de la superficie— es siempre igual a cero.
7. Una vez evaluada la integral, en la ecuación (22.9) se despeja la variable que se busca.

EVALUAR la respuesta: Es frecuente que el resultado sea una *función* que describe cómo varía la magnitud del campo eléctrico según la posición. Hay que estudiar esta función con ojo crítico para ver si tiene sentido.

Ejemplo 22.5 Campo de una esfera conductora con carga

Se coloca una carga positiva q en una esfera conductora sólida de radio R (figura 22.18). Determine $\vec{E}$ en cualquier punto en el interior o en el exterior de la esfera.

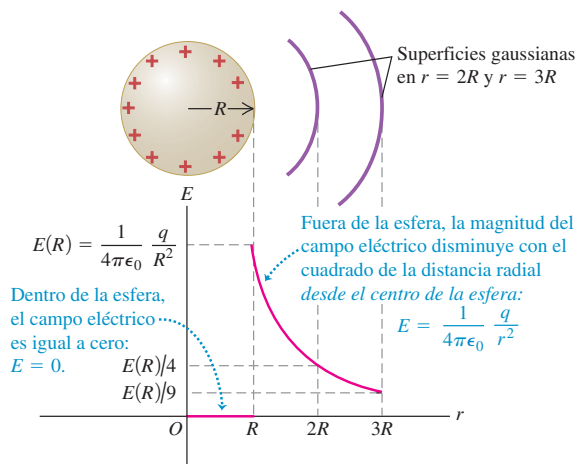
SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como se vio en esta sección, toda la carga debe encontrarse en la superficie de la esfera. El sistema tiene simetría esférica.

PLANTEAR: Para aprovechar la simetría, se toma la superficie gaussiana como una esfera imaginaria de radio r con centro en el conductor. Para calcular el campo afuera del conductor, se toma r de forma que sea mayor que el radio R del conductor; para obtener el campo en el interior, se toma r menor que R . En cualquier caso, el punto en que se desea calcular $\vec{E}$ queda sobre la superficie gaussiana.

EJECUTAR: El papel de la simetría merece atención especial antes de hacer cualquier cálculo. Decir que el sistema tiene simetría esférica significa que si se hace girar con cualquier ángulo alrededor de cualquier eje que pase por el centro, después de la rotación, el sistema es indistinguible del original antes del giro. La carga es libre de moverse en el conductor y no hay nada en este último que la haga tender

22.18 Cálculo del campo eléctrico de una esfera conductora con carga positiva q . Fuera de la esfera, el campo es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en el centro de la esfera.



a concentrarse más en ciertas regiones que en otras. Por lo tanto, se concluye que la carga está distribuida de manera *uniforme* sobre la superficie.

La simetría también muestra que la dirección del campo eléctrico debe ser *radial*, como se ilustra en la figura 22.18. Si el sistema se gira otra vez, la disposición del campo debe ser idéntica al original. Si el campo tuviera una componente en algún punto que fuera perpendicular a la dirección radial, esa componente tendría que ser distinta después de hacer al menos algunas rotaciones. Entonces, no puede haber tal componente y el campo debe ser radial. Por la misma razón, la magnitud E del campo sólo puede depender de la distancia r desde el centro y debe tener el mismo valor en todos los puntos de una superficie esférica concéntrica respecto de la esfera conductora.

La elección de una esfera como superficie gaussiana aprovecha estas propiedades de simetría. En primer lugar se considera el campo fuera del conductor, por lo que se elige $r > R$. Todo el conductor se encuentra dentro de la superficie gaussiana, de manera que la carga encerrada es q . El área de la superficie gaussiana es $4\pi r^2$; $\vec{E}$ es uniforme sobre la superficie y perpendicular a cada uno de sus puntos. Por lo anterior, la integral del flujo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ en la superficie gaussiana es $E(4\pi r^2)$ y la ecuación (22.8) da:

$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \quad y$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (\text{fuera de una esfera conductora con carga})$$

Esta expresión del campo en cualquier punto *afuera* de la esfera ($r > R$) es la misma para una carga puntual; el campo debido a la esfera con carga es equivalente al que habría si toda la carga estuviera concentrada en su centro. Inmediatamente afuera de la superficie de la esfera, donde $r = R$,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

(en la superficie de una esfera conductora con carga)

CAUIDADO El flujo es positivo o negativo Recuerde que se eligió que la carga q fuera *positiva*. Si fuera negativa, el campo eléctrico estaría dirigido radialmente *hacia el interior* y no hacia el exterior, y el flujo eléctrico a través de la superficie gaussiana sería negativo. Las magnitudes del campo eléctrico en el exterior y en la superficie de la esfera están dadas por las mismas expresiones mencionadas, excepto que q denota la *magnitud* (valor absoluto) de la carga. ■

Para calcular $\vec{E}$ dentro del conductor, se usa una superficie gaussiana esférica con radio $r < R$. De nuevo, la simetría esférica dice que $E(4\pi r^2) = Q_{\text{enc}}/\epsilon_0$. Pero como toda la carga está en la superficie del conductor, la superficie gaussiana (que está por completo dentro del conductor) no encierra *ninguna* carga, por lo que $Q_{\text{enc}} = 0$, y el campo eléctrico en el interior del conductor es igual a cero.

EVALUAR: Ya se sabe que dentro del conductor $\vec{E} = 0$, como debe ser en el interior de un conductor sólido cuando las cargas se encuentran en reposo. En la figura 22.18 se ilustra E como función de la distancia r desde el centro de la esfera. Observe que en el límite, cuando $R \rightarrow 0$, la esfera se convierte en una carga puntual; así que sólo hay un “exterior,” y el campo está dado en cualquier parte por $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Así, se ha deducido la ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss. (En la sección 22.3 se dedujo la ley de Gauss a partir de la ley de Coulomb, lo que completa la demostración de su equivalencia lógica.)

Este método también es aplicable a un conductor con forma de *cascarón* esférico (un conductor esférico con un hueco concéntrico en el centro) si dentro del agujero no hay carga. Se usa una superficie gaussiana esférica con radio r menor que el radio del hueco. Si en el interior del hueco *hubiera* un campo, tendría que ser radial y con simetría esférica, como antes, por lo que $E = Q_{\text{enc}}/4\pi\epsilon_0 r^2$. Pero ahora no hay carga encerrada, de manera que en el interior del hueco $Q_{\text{enc}} = 0$ y $E = 0$.

¿Puede utilizar esta misma técnica para encontrar el campo eléctrico en el espacio que hay entre una esfera con carga y una esfera concéntrica y hueca que la rodee?

Ejemplo 22.6 Campo de una carga lineal

Una carga eléctrica está distribuida de manera uniforme a lo largo de un alambre delgado de longitud infinita. La carga por unidad de longitud es λ (se supone positiva). Se trata de encontrar el campo eléctrico. (Ésta es una representación aproximada del campo de un alambre *finito* con carga uniforme, siempre y cuando la distancia del punto del campo al alambre sea mucho menor que la longitud del alambre.)

SOLUCIÓN

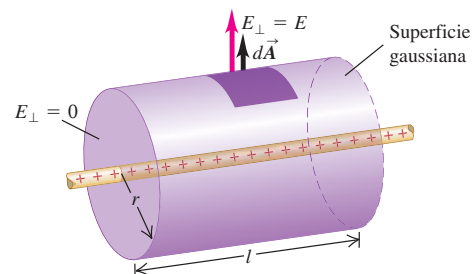
IDENTIFICAR: El sistema tiene simetría *cilíndrica*. El campo debe apuntar hacia fuera de las cargas positivas. Para determinar la dirección de $\vec{E}$ con más precisión, así como demostrar el modo en que su magnitud depende de la posición, se usa la simetría, como se hizo en el ejemplo 22.5.

PLANTEAR: La simetría cilíndrica significa que el sistema puede girarse cualquier ángulo alrededor de su eje y desplazarse cualquier distancia a lo largo del eje; en cada caso el sistema resultante es indistinguible del original. Por lo tanto, $\vec{E}$ no cambia en ningún punto cuando se efectúa cualquiera de estas operaciones. El campo no puede tener ninguna componente paralela al conductor; si la tuviera habría que explicar por qué las líneas del campo que comienzan en el alambre apuntan en una dirección paralela al alambre y no en la otra. Asimismo, el campo no puede tener ninguna componente tangente a un círculo en un plano perpendicular al alambre con su centro en el alambre. Si así fuera, sería necesario explicar por qué la componente señala en una dirección alrededor del

conductor y no en la otra. Todo lo que queda es una componente radial hacia fuera del conductor en cada punto. Por lo tanto, las líneas de campo afuera de un alambre infinito con carga uniforme son *radiales* y se localizan en planos perpendiculares al alambre. La *magnitud* del campo sólo depende de la distancia radial desde el alambre.

Estas propiedades de simetría sugieren que, como superficie gaussiana, se utiliza un *cilindro* con radio arbitrario r y longitud arbitraria l , con sus extremos perpendiculares al conductor (figura 22.19).

22.19 Se emplea una superficie gaussiana cilíndrica coaxial para encontrar el campo eléctrico fuera de un conductor cargado de longitud infinita.



continúa

EJECUTAR: Se descompone la integral de superficie para el flujo Φ_E en una integral sobre cada extremo plano y otra sobre las paredes laterales curvas. A través de los extremos no hay flujo, ya que $\vec{E}$ se encuentra en el plano de la superficie y $E_{\perp} = 0$. Para calcular el flujo a través de las paredes laterales, hay que observar que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie en cada punto, por lo que $E = E_{\perp}$; por simetría, E tiene el mismo valor en cualquier lugar de las paredes. El área de las paredes laterales es $2\pi rl$. (Para hacer un cilindro de papel de radio r y altura l , se necesita un rectángulo de papel de ancho $2\pi r$, altura l y área $2\pi rl$.) De ahí que el flujo total Φ_E a través de todo el cilindro sea igual a la suma del flujo a través de las paredes laterales, que es $(E)(2\pi rl)$, y el flujo a través de los dos extremos es de cero. Por último, se necesita la carga total encerrada, que es la carga por unidad de longitud multiplicada por la longitud del alambre dentro de la superficie gaussiana, o $Q_{\text{enc}} = \lambda l$. De acuerdo con la ley de Gauss, la ecuación (22.8) es

$$\Phi_E = (E)(2\pi rl) = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad y$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \quad (\text{campo de una línea infinita de carga})$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) por medios mucho más laboriosos.

Se ha supuesto que λ es *positiva*. Si fuera *negativa*, $\vec{E}$ estaría dirigido radialmente hacia el interior, en dirección de la línea de carga, y

en la expresión anterior de la magnitud del campo E se debería interpretar λ como la *magnitud* (valor absoluto) de la carga por unidad de longitud.

EVALUAR: Observe que aunque *toda* la carga en el conductor contribuye al campo, al aplicar la ley de Gauss sólo se considera la parte de la carga total que está dentro de la superficie gaussiana. Esto tal vez parezca extraño; parece como si se hubiera obtenido la respuesta correcta ignorando parte de la carga y que el campo de un alambre *corto* de longitud l fuera el mismo que el de otro muy largo. Pero al considerar la *simetría* del problema *sí* se incluye toda la carga en el conductor. Si el alambre es corto, no habría simetría respecto al eje, y el campo no sería de magnitud uniforme en la superficie gaussiana. En ese caso, la ley de Gauss deja de ser útil y *no podría* usarse para calcular el campo; el problema se manejaría mejor con la técnica de integración empleada en el ejemplo 21.11.

Se puede utilizar una superficie gaussiana como la de la figura 22.19 para demostrar que el campo en puntos situados fuera de un cilindro largo con carga uniforme es el mismo que si toda la carga se concentrara en una línea a lo largo de su eje. También se puede calcular el campo eléctrico en el espacio entre un cilindro con carga y otro cilindro coaxial hueco conductor que lo rodee. Estos cálculos se dejan para el lector (véanse los problemas 22.37 y 22.40).

Ejemplo 22.7 Campo de una lámina plana infinita cargada

Encuentre el campo eléctrico que genera una lámina delgada, plana e infinita, en la que hay una carga uniforme positiva por unidad de área σ .

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo debe apuntar hacia fuera de la lámina con carga positiva. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.6, antes de hacer los cálculos se emplea la simetría (en este caso, simetría *plana*) para obtener más datos sobre la dirección de $\vec{E}$ y su dependencia de la posición.

PLANTEAR: La simetría plana significa que la distribución de carga no cambia si hay un movimiento en cualquier dirección paralela a la lámina, de lo que se concluye que $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina. La simetría también dice que el campo debe tener la misma magnitud E a cualquier distancia dada en cualquier lado de la lámina. Para apro-

vechar estas propiedades de la simetría se usa un cilindro como superficie gaussiana, con su eje perpendicular a la lámina de carga, con extremos de área A (figura 22.20).

EJECUTAR: La lámina con carga pasa a través de la mitad de la longitud del cilindro, por lo que los extremos del cilindro son equidistantes con respecto a la lámina. En cada extremo del cilindro, $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie y $E_{\perp}$ es igual a E ; de ahí que el flujo a través de cada extremo sea $+EA$.

Como $\vec{E}$ es perpendicular a la lámina con carga, es paralelo a las *paredes* laterales curvas del cilindro, por lo que $E_{\perp}$ es igual a cero en las paredes y no hay flujo que las atraviese. Así, la integral de flujo total en la ley de Gauss es $2EA$ (EA de cada extremo y cero de las paredes laterales). La carga neta dentro de la superficie gaussiana es la carga por unidad de área multiplicada por el área de lámina encerrada por la superficie, o $Q_{\text{enc}} = \sigma A$. De ahí que la ley de Gauss, ecuación (22.8), dé

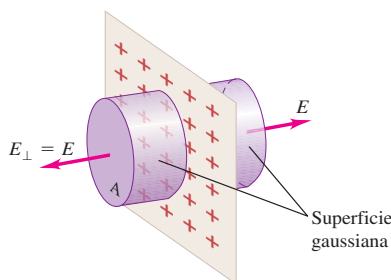
$$2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad y$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{campo de una lámina infinita cargada})$$

Éste es el mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo 21.12 (sección 21.5) con cálculos mucho más complejos. El campo es uniforme y está dirigido perpendicularmente al plano de la lámina. Su magnitud es *independiente* de la distancia a la lámina, por lo que las líneas de campo son rectas y paralelas entre sí, pero perpendiculares a la lámina.

Si la densidad de carga es negativa, $\vec{E}$ está dirigido *hacia* la lámina, el flujo a través de la superficie gaussiana en la figura 22.20 es negativo y σ en la expresión $E = \sigma/2\epsilon_0$ denota la magnitud (valor absoluto) de la densidad de carga.

22.20 Superficie gaussiana cilíndrica que se utiliza para encontrar el campo de una lámina plana infinita cargada.



EVALUAR: La suposición de que la lámina tiene tamaño infinito es una idealización; nada en la naturaleza es infinitamente grande. Pero el resultado $E = \sigma/2\epsilon_0$ es una buena aproximación para puntos que estén

cerca de la lámina (en comparación con las dimensiones de ésta) y no demasiado cerca de los bordes. En tales puntos, el campo es casi uniforme y perpendicular al plano.

Ejemplo 22.8 Campo entre láminas conductoras paralelas y con cargas opuestas

Dos placas conductoras paralelas, grandes y planas tienen cargas de igual magnitud pero con signo contrario; la carga por unidad de área es $+\sigma$ para una y $-\sigma$ para la otra. Determine el campo eléctrico en la región entre las placas.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: El campo entre las placas y alrededor de éstas es aproximadamente el que se ilustra en la figura 22.21a. Puesto que las cargas opuestas se atraen, la mayor parte de la carga se acumula en las caras opuestas (interiores) de las placas. Una pequeña cantidad de carga reside en las superficies *exteriores* de las placas, y en sus extremos hay alguna dispersión del campo. Pero si las placas son muy grandes en comparación con la distancia que las separa, la cantidad de carga en las superficies exteriores se vuelve despreciable por pequeña, y la dispersión se ignora excepto cerca de los extremos. En este caso se puede suponer que el campo es uniforme en la región interior entre las placas, como se ilustra en la figura 22.21b, y que las cargas están distribuidas de manera uniforme en las superficies opuestas.

PLANTEAR: Para aprovechar esta simetría se emplean las superficies gaussianas sombreadas S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , que son cilindros con extremos de área A como el que se ilustra en perspectiva en la figura 22.20, y en vista lateral en la figura 22.21b. Un extremo de cada superficie está dentro de las placas conductoras.

EJECUTAR: Para la superficie S_1 , el extremo izquierdo está dentro de la placa 1 (la positiva). Como en condiciones electrostáticas el campo dentro de cualquier sólido conductor es igual a cero, no hay flujo eléctrico a través de ese extremo. El campo eléctrico entre las placas es perpendicular al extremo derecho, por lo que en ese extremo, $E_{\perp}$

es igual a E y el flujo es EA ; éste es positivo porque $\vec{E}$ está dirigido fuera de la superficie gaussiana. A través de las paredes laterales del cilindro no hay flujo, pues son paralelas a $\vec{E}$. Así que el flujo total en la ley de Gauss es EA . La carga neta encerrada por el cilindro es σA , por lo que la ecuación (22.8) da

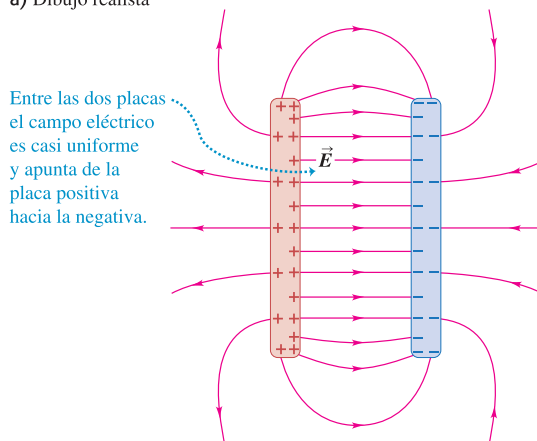
$$EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{campo entre placas conductoras con cargas opuestas})$$

El campo es uniforme y perpendicular a las placas, y su magnitud es independiente de la distancia desde cualquiera de las placas. Éste es el mismo resultado que se obtiene al usar la superficie gaussiana S_4 ; además, las superficies S_2 y S_3 pueden utilizarse para demostrar que $E = 0$ a la izquierda de la placa 1 y a la derecha de la placa 2. Se invita al lector a efectuar los cálculos respectivos (véase el ejercicio 22.27).

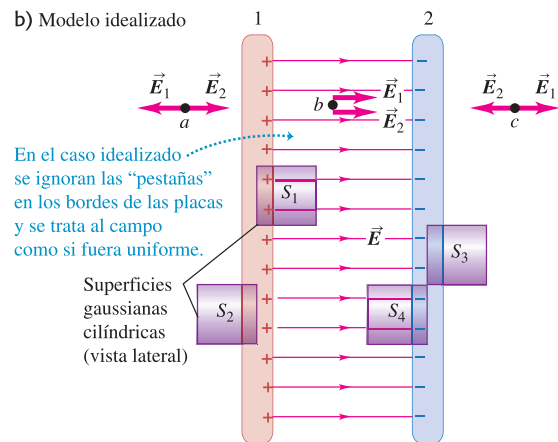
EVALUAR: Utilizando el principio de superposición de campos eléctricos se obtienen los mismos resultados en el ejemplo 21.13 (sección 21.5). Los campos que se deben a las dos láminas de carga (una en cada placa) son $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$; del ejemplo 22.7, ambas placas tienen magnitud $\sigma/2\epsilon_0$. El campo eléctrico total (resultante) en cualquier punto es la suma vectorial $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. En los puntos a y c en la figura 22.21b, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen direcciones opuestas y su resultante es igual a cero. Esto también se cumple en cada punto dentro del material de cada placa, lo que es congruente con el requerimiento de que con cargas en reposo no puede haber un campo dentro de un conductor sólido. En cualquier punto b entre las placas, $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ tienen la misma dirección; su resultante tiene magnitud $E = \sigma/\epsilon_0$, como se encontró antes utilizando la ley de Gauss.

22.21 Campo eléctrico entre placas paralelas con cargas opuestas.

a) Dibujo realista



b) Modelo idealizado



Ejemplo 22.9 Campo de una esfera con carga uniforme

Una carga eléctrica positiva Q está distribuida de manera uniforme *en todo el volumen* de una esfera aislante con radio R . Encuentre la magnitud del campo eléctrico en el punto P a una distancia r del centro de la esfera.

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Como se vio en el ejemplo 22.5, el sistema tiene simetría esférica, por lo que se pueden usar las conclusiones de ese ejemplo acerca de la dirección y la magnitud de $\vec{E}$.

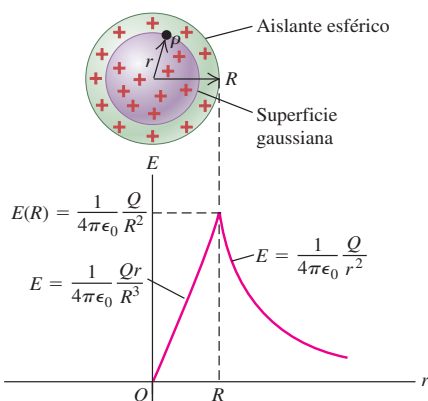
PLANTEAR: Para emplear la simetría se elige como superficie gaussiana una esfera con radio r , concéntrica con la distribución de la carga.

EJECUTAR: Por simetría, la magnitud E del campo eléctrico tiene el mismo valor en todos los puntos de la superficie gaussiana, y la dirección de $\vec{E}$ es radial en cada uno de ellos, por lo que $E_{\perp} = E$. Así, el flujo eléctrico total a través de la superficie gaussiana es el producto de E por el área total de la superficie $A = 4\pi r^2$, es decir, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

La cantidad de carga encerrada por la superficie gaussiana depende del radio r . Primero se calcula la magnitud del campo *dentro* de la esfera con carga de radio R ; la magnitud E se evalúa en el radio de la superficie gaussiana, por lo que se elige $r < R$. La densidad volumétrica de carga ρ es la carga Q dividida entre el volumen de la esfera con carga de radio R :

$$\rho = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$$

22.22 Magnitud del campo eléctrico de una esfera aislante con carga uniforme. Compare esto con el campo de una esfera conductora (figura 22.18).



El volumen V_{enc} encerrado por la superficie gaussiana es $\frac{4}{3}\pi r^3$, por lo que la carga total Q_{enc} contenida por la superficie es

$$Q_{\text{enc}} = \rho V_{\text{enc}} = \left(\frac{Q}{4\pi R^3/3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Con lo que la ley de Gauss, ecuación (22.8), se convierte en

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \quad \text{o bien,}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (\text{campo dentro de una esfera con carga uniforme})$$

La magnitud del campo es proporcional a la distancia r que hay entre el punto del campo y el centro de la esfera. En el centro ($r = 0$), $E = 0$.

Para calcular la magnitud del campo *fuera* de la esfera con carga se utiliza una superficie gaussiana esférica de radio $r > R$. Esta superficie encierra la totalidad de la esfera con carga, por lo que $Q_{\text{enc}} = Q$, y la ley de Gauss da

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad \text{o bien,}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (\text{campo dentro de una esfera con carga uniforme})$$

Para *cualquier* cuerpo esférico simétrico con carga, el campo eléctrico en su exterior es el mismo que si todo el cuerpo estuviera concentrado en el centro. (En el ejemplo 22.5 se hizo esta misma observación.)

La figura 22.22 presenta una gráfica de E como función de r para este problema. Para $r < R$, E es directamente proporcional a r , y para $r > R$, E varía según $1/r^2$. Si la carga es negativa y no positiva, $\vec{E}$ va radialmente *hacia dentro* y Q se interpreta como la magnitud (valor absoluto) de la carga.

EVALUAR: Observe que si se establece que $r = R$ en cualquiera de las dos expresiones para E (adentro o afuera de la esfera), se obtiene el mismo resultado $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ para la magnitud del campo en la superficie de la esfera. Esto se debe a que la magnitud E es una función *continua* de r . En contraste, para la esfera conductora con carga del ejemplo 22.5, la magnitud del campo eléctrico es *discontinua* en $r = R$ (salta de $E = 0$ apenas dentro de la esfera a $E = Q/4\pi\epsilon_0 R^2$ justo afuera de la esfera). En general, el campo eléctrico $\vec{E}$ es discontinuo en su magnitud, dirección o ambas en cualquier lugar en el que haya una *lámina* de carga, como en la superficie de una esfera conductora con carga (ejemplo 22.5), en la superficie de una lámina infinita con carga (ejemplo 22.7) o en la superficie de una placa conductora con carga (ejemplo 22.8).

La técnica general utilizada en este ejemplo se aplica a *cualquier* distribución de carga con simetría esférica, ya sea uniforme o no. Tales distribuciones de carga ocurren dentro de muchos átomos y núcleos atómicos, por lo que la ley de Gauss es una herramienta útil en la física atómica y nuclear.

Ejemplo 22.10 Campo de una esfera hueca con carga

Una esfera hueca de pared delgada y radio de 0.250 m tiene una cantidad desconocida de carga distribuida de manera uniforme en su superficie. A una distancia de 0.300 m desde el centro de la esfera, el campo eléctrico apunta directamente hacia el centro de la esfera y su magnitud es de 1.80×10^2 N/C. ¿Cuánta carga hay en la esfera?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: La distribución de carga tiene simetría esférica. Igual que en los ejemplos 22.5 y 22.9, se deduce que el campo eléctrico es radial en todo lugar, y su magnitud es función sólo de la distancia radial r desde el centro de la esfera.

PLANTEAR: Se utiliza otra vez una superficie esférica gaussiana concéntrica con la distribución de carga y que pase por el punto de interés en $r = 0.300$ m.

EJECUTAR: La distribución de carga es igual que si la carga estuviera sobre la superficie de una esfera conductora de 0.250 m de radio. Por ello es posible usar los resultados del ejemplo 22.5. Una diferencia clave con ese ejemplo es que como aquí el campo eléctrico está dirigido hacia la esfera, la carga debe ser *negativa*. Además, como el campo eléctrico se dirige hacia la superficie gaussiana, $E_{\perp} = -E$ y el flujo es $\oint E_{\perp} dA = -E(4\pi r^2)$.

Según la ley de Gauss, el flujo es igual a la carga q en la esfera (toda ella encerrada por la superficie de Gauss) dividida entre ϵ_0 . Al despejar q se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} q &= -E(4\pi\epsilon_0 r^2) = -(1.80 \times 10^2 \text{ N/C})(4\pi) \\ &\quad \times (8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(0.300 \text{ m})^2 \\ &= -8.01 \times 10^{-10} \text{ C} = -0.801 \text{ nC} \end{aligned}$$

EVALUAR: Para determinar la carga se tiene que conocer el campo eléctrico en *todos* los puntos de la superficie gaussiana con la finalidad de poder calcular la integral de flujo. Aquí esto fue posible porque la distribución de carga es muy simétrica. Sin embargo, si la distribución de carga fuera irregular o asimétrica, la ley de Gauss no resultaría muy útil para calcular la distribución de carga a partir del campo o viceversa.

Evalúe su comprensión de la sección 22.4 Se coloca una cantidad conocida de carga Q en el conductor de forma irregular que se ilustra en la figura 22.17. Si se conoce el tamaño y la forma del conductor, ¿es posible emplear la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico en una posición arbitraria fuera del conductor?

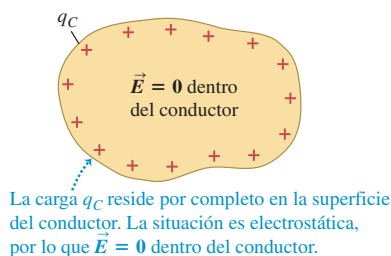
22.5 Cargas en conductores

Hemos aprendido que una situación electrostática (en la que no hay movimiento neto de la carga), el campo eléctrico en cada punto dentro de un conductor es igual a cero, y que el exceso de carga en un conductor sólido se localiza por completo en su superficie (figura 22.23a). Pero, ¿qué pasa si en el conductor hay una *cavidad* (figura 22.23b)? Si no hay carga dentro de la cavidad se puede utilizar una superficie gaussiana como A (que está por completo dentro del material del conductor) para demostrar que la carga *net*a en la *superficie de la cavidad* debe ser igual a cero, ya que $\vec{E} = \vec{0}$ en todo lugar de la superficie gaussiana. De hecho, en esta situación se puede probar que no hay ninguna carga *en ninguna parte* de la superficie de la cavidad. La demostración detallada de este enunciado se dejará para el capítulo 23.

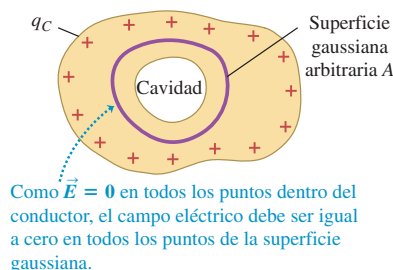
Suponga que se coloca un cuerpo pequeño con carga q dentro de una cavidad en el interior de un conductor (figura 22.23c). El conductor está descargado y aislado de la carga q . Otra vez, $\vec{E} = \vec{0}$ en todos los puntos de la superficie A , por lo que según la ley de Gauss la carga *total* dentro de esta superficie debe ser igual a cero. Por lo tanto, debe haber una carga $-q$ distribuida sobre la superficie de la cavidad, enviada ahí por la carga q en el interior de la cavidad. La carga *total* en el conductor debe ser igual a cero, por lo que debe haber una carga $+q$ ya sea en su superficie exterior o dentro del material. Pero en la sección 22.4 se demostró que en una situación electrostática no puede haber ninguna carga excedente dentro del material de un conductor. Así, se concluye que la carga $+q$ debe estar en la superficie externa. Con el mismo razonamiento, si el conductor tuviera originalmente una carga q_C , entonces la carga total en la superficie exterior debe ser $q_C + q$ después de que se insertó la carga q en la cavidad.

22.23 Cálculo del campo eléctrico dentro de un conductor con carga.

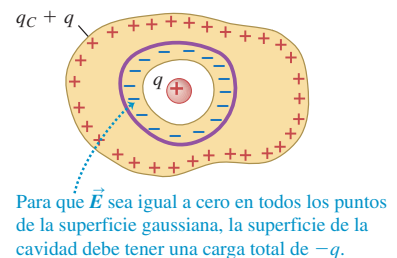
a) Conductor sólido con carga q_C



b) El mismo conductor con una cavidad interna



c) Se coloca en la cavidad una carga aislada q



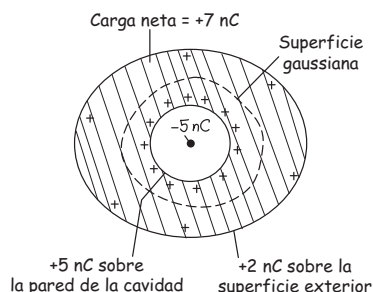
Ejemplo conceptual 22.11 Conductor con una cavidad

Un conductor sólido con una cavidad tiene una carga total de $+7 \text{ nC}$. Dentro de la cavidad, aislada del conductor, hay una carga puntual de -5 nC . ¿Cuánta carga hay en cada superficie (interna y externa) del conductor?

SOLUCIÓN

La figura 22.24 ilustra la situación. Si la carga en la cavidad es $q = -5 \text{ nC}$, la carga en la superficie de la cavidad interna debe ser $-q = -(-5 \text{ nC}) = +5 \text{ nC}$. El conductor lleva una carga *total* de $+7 \text{ nC}$, ninguno de los cuales se encuentra en el interior del material. Si en la superficie interna de la cavidad hay $+5 \text{ nC}$, entonces en la superficie externa del conductor debe haber $(+7 \text{ nC}) - (+5 \text{ nC}) = +2 \text{ nC}$.

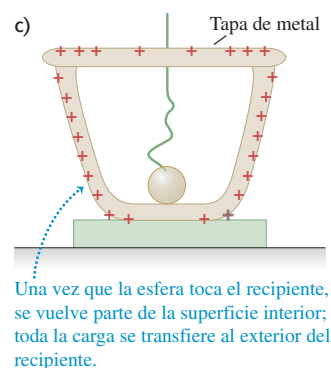
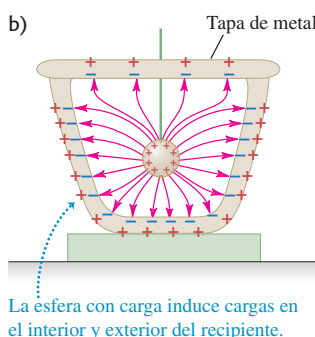
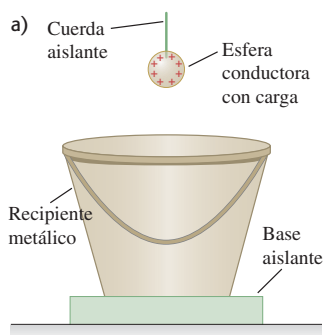
22.24 Ilustración del problema. Dentro de la masa del conductor hay un campo eléctrico igual a cero y, por lo tanto, un flujo de cero a través de la superficie gaussiana, por lo que la carga sobre la pared de la cavidad debe ser la opuesta de la carga puntual.

**Prueba experimental de la ley de Gauss**

Ahora se mostrará un experimento histórico, que se ilustra en la figura 22.25. Se monta un recipiente conductor, como una olla de metal con tapa, sobre una base aislante. Al principio el recipiente no tiene carga. Después se cuelga una esfera metálica con carga de un cordel aislante (figura 22.25a), se hace descender hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa (figura 22.25b). Se inducen cargas sobre las paredes del recipiente, como se ilustra. Luego se deja que la esfera *toque* la pared interior (figura 22.25c). La superficie de la esfera se convierte, en efecto, en parte de la superficie de la cavidad. La situación es ahora la misma que la de la figura 22.23b; si la ley de Gauss es correcta, la carga neta en la superficie de la cavidad debe ser igual a cero. Es decir, la esfera debe perder toda su carga. Por último, se extrae la esfera para constatar que en verdad ha perdido toda su carga.

Este experimento lo realizó en el siglo XIX el científico inglés Michael Faraday empleando una hielera de metal con tapa, y se conoce como el **experimento de la hielera de Faraday**. (Experimentos similares se llevaron a cabo en el siglo XVIII por parte de Benjamín Franklin en Estados Unidos y Joseph Priestley en Inglaterra, aunque con mucha menor precisión.) El resultado confirma la validez de la ley de Gauss y, por lo tanto, de la ley de Coulomb. El resultado de Faraday fue significativo porque el método experimental de Coulomb, quien usaba una balanza de torsión y dividía las cargas, no era muy preciso; es muy difícil confirmar con gran precisión la dependencia que tiene la fuerza electrostática del término $1/r^2$ con mediciones directas de la fuerza. En contraste, experimentos como el de Faraday prueban la validez de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la ley de Coulomb de un modo mucho más preciso.

22.25 a) Esfera conductora con carga suspendida de un cordel aislante afuera de un recipiente conductor apoyado en una base aislante. b) Se hace descender la esfera hacia el interior del recipiente, y se coloca la tapa. c) La esfera toca la superficie interior del recipiente.

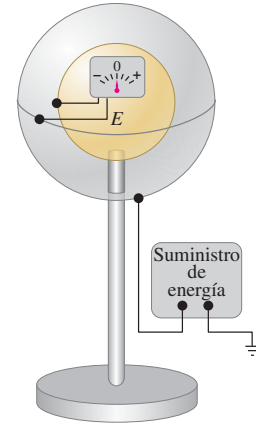


En la figura 22.26 se presenta una versión moderna del experimento de Faraday. Los detalles de la parte del dibujo que dice “Suministro de energía” no son importantes; su función es poner y quitar carga en la esfera exterior, según se desee. El dibujo en el interior con un medidor es un *electrómetro* sensible, un instrumento que detecta el movimiento de cantidades extremadamente pequeñas de cargas entre las esferas exterior e interior. Si la ley de Gauss es correcta, nunca puede haber ninguna carga en la superficie interior de la esfera exterior. Si así ocurriera, no debería haber flujo de carga entre las esferas cuando la esfera exterior se cargara y descargara. El hecho real es que no se observa ningún flujo, lo que constituye una confirmación muy sensible de las leyes de Gauss y de Coulomb. La precisión del experimento está limitada sobre todo por el electrómetro, que puede ser asombrosamente sensible. Los experimentos han demostrado que el exponente 2 en el término $1/r^2$ de la ley de Coulomb no difiere de 2, precisamente, en más de 10^{-16} . Así que no hay razón para sospechar que no es otro que 2, con exactitud.

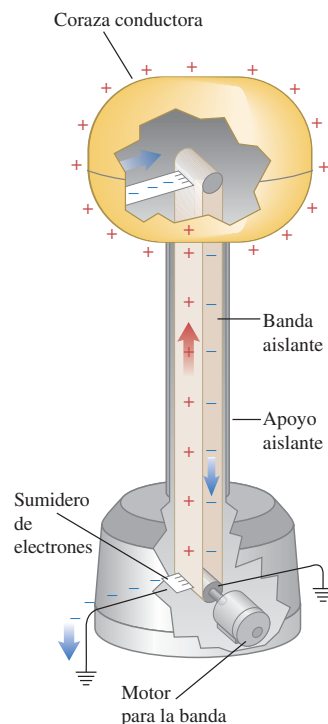
El mismo principio que subyace en el experimento de la hielera de Faraday es el que se utiliza en el *generador electrostático de Van de Graaff* (figura 22.27). La esfera conductora con carga de la figura 22.26 se reemplaza por una banda con carga que lleva carga de manera continua al interior de un casco conductor, sólo para que sea transportada a la superficie externa del casco. Como resultado, la carga en el casco y el campo eléctrico que lo rodea se hacen muy grandes con mucha rapidez. El generador Van de Graaff se utiliza como acelerador de partículas con carga y para demostraciones de física.

Este principio también forma la base del *blindaje electrostático*. Imagine que ? se tiene un instrumento electrónico muy sensible que deseamos proteger de los campos eléctricos dispersos que pudieran originar lecturas erróneas. Se rodea al instrumento con una caja conductora, o se recubren las paredes, piso y techo de la habitación con un material conductor como lámina de cobre. El campo eléctrico exterior redistribuye los electrones libres en el conductor, lo que deja en ciertas regiones de la superficie

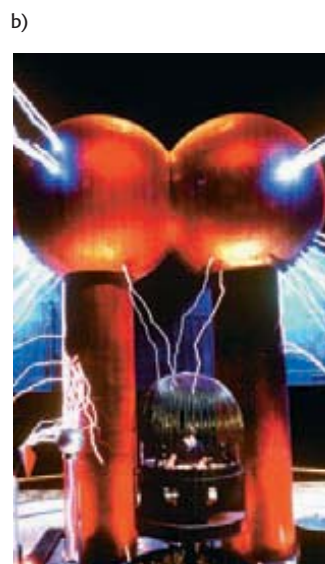
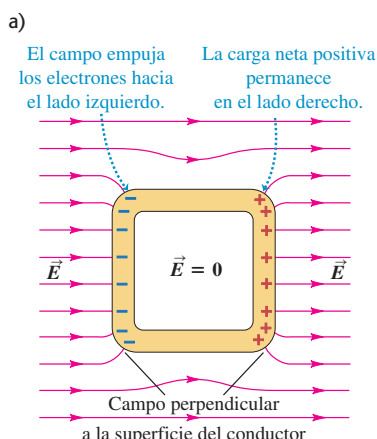
22.26 La coraza esférica se carga y descarga en forma alternada con la fuente de energía. Si hubiera algún flujo de carga entre las esferas interna y externa, sería detectado por el electrómetro dentro de la coraza interior.



22.27 Corte transversal de las partes esenciales de un generador electrostático Van de Graaff. El sumidero de electrones en la parte inferior los retira de la banda, lo que da a ésta una carga positiva; en la parte superior, la banda atrae electrones de la coraza conductora y le imparte una carga positiva.



22.28 a) Caja conductora (jaula de Faraday) inmersa en un campo eléctrico uniforme. El campo de las cargas inducidas sobre la caja se combina con el campo uniforme para dar un campo total igual a cero dentro de la caja.
b) El aislamiento electrostático protege de las descargas eléctricas peligrosas.



exterior una carga neta positiva, y negativa en otras (figura 22.28). Esta distribución de la carga ocasiona un campo eléctrico adicional de manera que el campo *total* en cada punto dentro de la caja sea igual a cero, como afirma la ley de Gauss. La distribución de la carga en la caja también altera las formas de las líneas del campo cerca de la caja, como se observa en la figura. Con frecuencia este arreglo se conoce como la *jaula de Faraday*. La misma física dice que uno de los lugares más seguros en que se puede estar durante una tormenta eléctrica es en el interior de un automóvil; si un relámpago azotara el vehículo, la carga tendería a permanecer en la carrocería de metal, y en el compartimiento de pasajeros habría poco o ningún campo eléctrico.

Campo en la superficie de un conductor

Por último, observe que hay una relación directa entre el campo $\vec{E}$ en un punto justo afuera de cualquier conductor y la densidad superficial de carga σ en ese punto. En general, σ varía de un punto a otro de la superficie. En el capítulo 23 se mostrará que en un punto así, la dirección de $\vec{E}$ siempre es *perpendicular* a la superficie (véase la figura 22.28a).

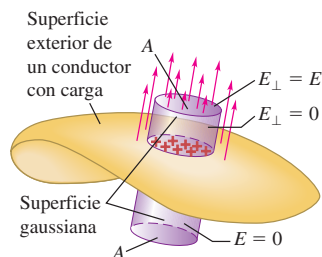
Para encontrar una relación entre σ en cualquier punto de la superficie y la componente perpendicular del campo eléctrico en ese punto se construye una superficie gaussiana en forma de pequeño cilindro (figura 22.29). La cara de uno de los extremos, con área A , queda dentro del conductor y la otra queda justo afuera. El campo eléctrico es igual a cero en todos los puntos dentro del conductor. Fuera de éste, la componente de $\vec{E}$ perpendicular a las paredes laterales del cilindro es igual a cero, y sobre la cara de los extremos la componente perpendicular es igual a $E_{\perp}$. (Si σ es positiva, el campo eléctrico apunta hacia fuera del conductor y $E_{\perp}$ es positiva; si σ es negativa, el campo eléctrico apunta hacia el interior y $E_{\perp}$ es negativa.) Así, el flujo total a través de la superficie es $E_{\perp}A$. La carga encerrada dentro de la superficie gaussiana es σA , por lo que a partir de la ley de Gauss,

$$E_{\perp}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{campo en la superficie de un conductor}) \quad (22.10)$$

Esto se puede comprobar con los resultados obtenidos para superficies esféricas, cilíndricas y planas.

En el ejemplo 22.8 se demostró que la magnitud del campo entre dos placas conductoras infinitas con cargas opuestas también es igual a σ/ϵ_0 . En este caso, la magnitud del campo es la misma en *todas* las distancias a partir de las placas, pero en todos los demás casos disminuye conforme aumenta la distancia a la superficie.

22.29 El campo inmediatamente afuera de un conductor con carga es perpendicular a la superficie, y su componente perpendicular $E_{\perp}$ es igual a σ/ϵ_0 .



Ejemplo conceptual 22.12 Campo en la superficie de una esfera conductora

Compruebe la ecuación (22.10) para una esfera conductora de radio R y carga total q .

SOLUCIÓN

En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) se demostró que el campo eléctrico inmediatamente afuera de la superficie es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

La densidad superficial de carga es uniforme e igual a q dividida entre el área superficial de la esfera:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$$

Al comparar estas dos expresiones se observa que $E = \sigma/\epsilon_0$, como se plantea en la ecuación (22.10).

Ejemplo 22.13 Campo eléctrico de la Tierra

La Tierra (un conductor) tiene una carga eléctrica neta. El campo eléctrico resultante cerca de la superficie puede medirse con instrumentos electrónicos sensibles; su valor medio es de alrededor de 150 N/C , dirigido hacia el centro de la Tierra. *a)* ¿Cuál es la densidad superficial de carga correspondiente? *b)* ¿Cuál es la carga superficial *total* de la Tierra?

SOLUCIÓN

IDENTIFICAR: Se da la magnitud del campo eléctrico en la superficie de la Tierra conductora, y se pide calcular la densidad superficial de carga en toda la superficie terrestre.

PLANTEAR: Dado el campo eléctrico perpendicular, se determina la densidad superficial de carga σ con la ecuación (22.10). La carga superficial total en la Tierra es el producto de σ por el área de la superficie terrestre.

EJECUTAR: *a)* De la dirección del campo se sabe que σ es negativa (lo que corresponde a $\vec{E}$ dirigido *hacia* la superficie, por lo que $E_{\perp}$ es negativa). De la ecuación (22.10),

$$\begin{aligned}\sigma = \epsilon_0 E_{\perp} &= (8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2)(-150 \text{ N/C}) \\ &= -1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2 = -1.33 \text{ nC/m}^2\end{aligned}$$

b) El área de la superficie de la Tierra es $4\pi R_E^2$, donde $R_E = 6.38 \times 10^6 \text{ m}$ es el radio terrestre (véase el apéndice F). La carga total Q es el producto $4\pi R_E^2 \sigma$, o

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 (-1.33 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2) \\ &= -6.8 \times 10^5 \text{ C} = -680 \text{ kC}\end{aligned}$$

EVALUAR: El resultado del inciso *b)* se puede comprobar con el que se obtuvo en el ejemplo 22.5. Al despejar Q , se encuentra que

$$\begin{aligned}Q &= 4\pi\epsilon_0 R^2 E_{\perp} \\ &= \frac{1}{9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2} (6.38 \times 10^6 \text{ m})^2 (-150 \text{ N/C}) \\ &= -6.8 \times 10^5 \text{ C}\end{aligned}$$

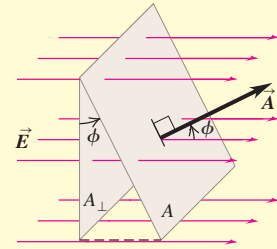
Un electrón tiene una carga de $-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$. Este excedente de carga eléctrica negativa corresponde a la existencia de $(-6.8 \times 10^5 \text{ C})/(-1.60 \times 10^{-19} \text{ C}) = 4.2 \times 10^{24}$ electrones excedentes en la Tierra, o cerca de 7 moles de electrones en exceso. Esto se compensa con una *deficiencia* igual de electrones en la atmósfera superior de nuestro planeta, por lo que la combinación de la Tierra con su atmósfera es eléctricamente neutra.

Evalúe su comprensión de la sección 22.5 Una esfera conductora hueca carece de carga neta. En el centro de la cavidad esférica dentro de la esfera hay una carga puntual positiva q . Se conecta un alambre conductor entre el exterior de la esfera y el terreno. ¿Se medirá un campo eléctrico fuera de la esfera?

CAPÍTULO 22 RESUMEN

Flujo eléctrico: El flujo eléctrico es una medida del “flujo” del campo eléctrico a través de una superficie. Es igual al producto de un elemento de área por la componente perpendicular de $\vec{E}$, integrada sobre una superficie. (Véanse los ejemplos 22.1 a 22.3.)

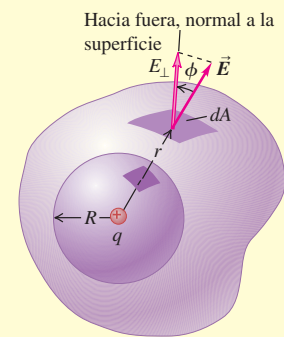
$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int E \cos \phi \, dA \\ &= \int E_{\perp} \, dA = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}\end{aligned}\quad (22.5)$$



Ley de Gauss: La ley de Gauss establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada, que se escribe como la integral de superficie de la componente de $\vec{E}$, que es normal a la superficie, es igual a una constante por la carga total Q_{enc} encerrada por la superficie. La ley de Gauss es un equivalente lógico de la ley de Coulomb, pero su uso simplifica mucho los problemas con un alto grado de simetría. (Véanse los ejemplos 22.4 a 22.10.)

Cuando se coloca carga en exceso en un conductor en reposo, ésta permanece toda en la superficie, y $\vec{E} = 0$ en todos los puntos del material del conductor. (Véanse los ejemplos 22.11 a 22.13.)

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint E \cos \phi \, dA \\ &= \oint E_{\perp} \, dA = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \\ &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}\end{aligned}\quad (22.8), (22.9)$$



Campo eléctrico de varias distribuciones simétricas de carga: En la siguiente tabla se listan los campos eléctricos generados por varias distribuciones simétricas de carga. En la tabla, q , Q , λ y σ se refieren a las *magnitudes* de las cantidades.

Distribución de la carga	Punto en el campo eléctrico	Magnitud del campo eléctrico
Una sola carga puntual	Distancia r desde q	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
Carga q en la superficie de una esfera conductora de radio R	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = 0$
Alambre infinito, carga por unidad de longitud λ	Distancia r desde el alambre	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
Cilindro conductor infinito con radio R , carga por unidad de longitud λ	Cilindro exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$
	Cilindro interior, $r < R$	$E = 0$
Esfera aislante sólida con radio R , carga Q distribuida de manera uniforme en todo el volumen	Esfera exterior, $r > R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
	Esfera interior, $r < R$	$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3}$
Placa infinita cargada con carga uniforme por unidad de área σ	Cualquier punto	$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$
Dos placas conductoras con cargas opuestas con densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$	Cualquier punto entre las placas	$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Términos clave

superficie cerrada, 751
flujo eléctrico, 752

integral de superficie, 755
ley de Gauss, 757

superficie gaussiana, 759
experimento de la hielera de Faraday, 768

Respuesta a la pregunta de inicio de capítulo ?

No. El campo eléctrico dentro de una cavidad interior de un conductor es igual a cero, por lo que no hay ningún efecto eléctrico en la niña. (Véase la sección 22.5.)

Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

22.1 Respuesta: iii) Cada elemento de la superficie de la caja estará tres veces más lejos de la carga $+q$, por lo que el campo eléctrico será $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ de la intensidad. Pero el área de la caja se incrementará en un factor de $3^2 = 9$. De ahí que el flujo eléctrico será multiplicado por un factor de $(\frac{1}{9})(9) = 1$. En otras palabras, el flujo no cambiará.

22.2 Respuestas: iv), ii), i), iii) En cada caso, el campo eléctrico es uniforme, por lo que el flujo es $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A}$. Se usan las relaciones para los productos escalares de vectores unitarios: $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$. En el caso i) se tiene $\Phi_E = (4.0 \text{ N/C})(6.0 \text{ m}^2)\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ (el campo eléctrico y el vector de área son perpendiculares, por lo que hay un flujo nulo). En el caso ii) se tiene $\Phi_E [(4.0 \text{ N/C})\hat{i} + (2.0 \text{ N/C})\hat{j}] \cdot (3.0 \text{ m}^2)\hat{j} = (2.0 \text{ N/C}) \cdot (3.0 \text{ m}^2) = 6.0 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$. De manera similar, en el caso iii) se tiene $\Phi_E [(4.0 \text{ N/C})\hat{i} - (2.0 \text{ N/C})\hat{j}] \cdot [(3.0 \text{ m}^2)\hat{i} + (7.0 \text{ m}^2)\hat{j}] = (4.0 \text{ N/C})(3.0 \text{ m}^2) - (2.0 \text{ N/C})(7.0 \text{ m}^2) = -2 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$, y en el caso iv) se tiene $\Phi_E [(4.0 \text{ N/C})\hat{i} - (2.0 \text{ N/C})\hat{j}] \cdot [(3.0 \text{ m}^2)\hat{i} - (7.0 \text{ m}^2)\hat{j}] = (4.0 \text{ N/C})(3.0 \text{ m}^2) + (2.0 \text{ N/C}) \cdot (7.0 \text{ m}^2) = 26 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$.

22.3 Respuestas: $S_2, S_5, S_4; S_1$ y S_3 (empate) La ley de Gauss afirma que el flujo a través de una superficie cerrada es proporcional a la can-

tidad de carga encerrada dentro de esa superficie, por lo que ordenar estas superficies según sus flujos es lo mismo que hacerlo según la cantidad de carga que encierran. La superficie S_1 no encierra carga, la superficie S_2 encierra $9.0 \mu\text{C} + 5.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) = 7.0 \mu\text{C}$, la superficie S_3 encierra $9.0 \mu\text{C} + 1.0 \mu\text{C} + (-10.0 \mu\text{C}) = 0$, la superficie S_4 encierra $8.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) = 1.0 \mu\text{C}$, y la superficie S_5 encierra $8.0 \mu\text{C} + (-7.0 \mu\text{C}) + (-10.0 \mu\text{C}) + (1.0 \mu\text{C}) + (9.0 \mu\text{C}) + (5.0 \mu\text{C}) = 6.0 \mu\text{C}$.

22.4 Respuesta: no Tal vez usted estuviera tentado a dibujar una superficie gaussiana que fuera una versión grande del conductor, con la misma forma y colocada de manera que lo encerrara por completo. Si bien se conoce el flujo a través de esta superficie gaussiana (según la ley de Gauss, es $\Phi_E = Q/\epsilon_0$), la dirección del campo eléctrico no necesita ser perpendicular a la superficie y tampoco es necesario que la magnitud del campo sea la misma en todos los puntos de la superficie. No es posible realizar la integral de flujo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$, por lo que no se puede calcular el campo eléctrico. La ley de Gauss es útil para obtener el campo eléctrico sólo cuando la distribución de la carga es *muy* simétrica.

22.5 Respuesta: no Antes de conectar el alambre con la esfera, la presencia de la carga puntual induciría una carga $-q$ en la superficie interior de la esfera hueca y una carga q en la superficie exterior (la carga neta en la esfera es igual a cero). Habrá un campo eléctrico fuera de la esfera que se debe a la carga en la superficie exterior. Sin embargo, una vez que el alambre conductor toque la esfera, los electrones fluirán de la tierra a la superficie exterior de la esfera para neutralizar la carga ahí presente (véase la figura 21.7c). Como resultado, la esfera no tendrá carga en su superficie externa, ni tampoco campo eléctrico en el exterior.

PROBLEMAS

Para las tareas asignadas por el profesor, visite www.masteringphysics.com



Preguntas para análisis

P22.1. Un globo de caucho tiene en su interior una carga puntual. ¿El flujo eléctrico a través del globo depende de si está inflado por completo o no? Explique su razonamiento.

P22.2. Suponga que en la figura 22.15 las dos cargas son positivas. ¿Cuáles serían los flujos a través de cada una de las cuatro superficies del ejemplo?

P22.3. En la figura 22.15, suponga que se coloca una tercera carga puntual fuera de la superficie gaussiana de color púrpura C . ¿Afectaría esto el flujo eléctrico a través de cualquiera de las superficies A , B , C o D en la figura? ¿Por qué?

P22.4. Cierta región del espacio limitada por una superficie imaginaria cerrada no contiene carga. ¿El campo eléctrico siempre es igual a cero en todos los puntos de la superficie? Si no es así, ¿en qué circunstancias sería cero en la superficie?

P22.5. Una superficie gaussiana esférica encierra una carga puntual q . Si la carga puntual se desplaza del centro de la esfera a un punto alejado de ahí, ¿cambia el campo eléctrico en un punto de la superficie? ¿Cambia el flujo total a través de la superficie gaussiana? Explique su respuesta.

P22.6. Usted encuentra una caja cerrada ante su puerta. Sospecha que contiene varias esferas de metal con carga y empacadas en un material

aislante. ¿Cómo podría determinar la carga neta total dentro de la caja sin abrirla? ¿O no es posible hacer eso?

P22.7. Durante el flujo de una corriente eléctrica en un alambre conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse a lo largo del alambre, en forma parecida a como el agua fluye por un tubo. ¿Esperaría encontrar un campo eléctrico fuera de un alambre que condujera ese flujo tan estable de electrones? Explique su respuesta.

P22.8. Si el campo eléctrico de una carga puntual fuera proporcional a $1/r^3$ en vez de $1/r^2$, ¿seguiría siendo válida la ley de Gauss? Explique su razonamiento. (*Sugerencia:* considere una superficie gaussiana esférica centrada en una sola carga puntual.)

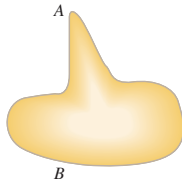
P22.9. Suponga que el disco del ejemplo 22.1 (sección 22.2), en vez de tener su vector normal orientado a sólo dos o tres ángulos particulares con respecto al campo eléctrico, comenzara a girar continuamente de manera que su vector normal primero fuera paralelo al campo, luego perpendicular y después opuesto a él, y así sucesivamente. Construya una gráfica del flujo eléctrico resultante contra el tiempo, para una rotación completa de 360° .

P22.10. En un conductor, uno o más electrones de cada átomo tienen libertad para moverse por todo el volumen del conductor. ¿Contradice esto el enunciado de que cualquier carga en exceso en un conductor sólido debe permanecer en su superficie? ¿Por qué?

P22.11. Usted carga el generador Van de Graaff que se muestra en la figura 22.27, y luego le acerca una esfera conductora hueca idéntica, pero sin carga y sin dejar que las dos esferas se toquen. Elabore un diagrama de la distribución de cargas en la segunda esfera. ¿Cuál es el flujo neto a través de la segunda esfera? ¿Cuál es el campo eléctrico dentro de la segunda esfera?

P22.12. La magnitud de $\vec{E}$ en la superficie de un sólido conductor de forma irregular debe ser máxima en las regiones en las que hay formas agudas, como el punto A de la figura 22.30, y debe ser mínima en las regiones planas, como el punto B de la misma figura. Explique por qué debe ser así considerando la manera en que las líneas de campo eléctrico deben acomodarse cerca de una superficie conductora. ¿Cómo cambia la densidad superficial de carga en los puntos A y B? Explique su respuesta.

Figura 22.30
Pregunta P22.12.



P22.13. Un pararrayos es una varilla de cobre redondeada que se monta en la parte alta de los edificios y va soldada a un cable grueso, también de cobre, que llega al suelo. Los pararrayos se utilizan para proteger casas y graneros de los relámpagos; la corriente de los relámpagos corre por el cable y no por el edificio. ¿Por qué? ¿Por qué el extremo de la varilla debe estar redondeado? (Sugerencia: la respuesta a la pregunta para análisis P22.12 le resultará de ayuda.)

P22.14. Un conductor sólido tiene una cavidad en su interior. ¿Afectaría la presencia de una carga puntual dentro de la cavidad al campo eléctrico fuera del conductor? ¿Por qué? ¿La presencia de una carga puntual fuera del conductor afectaría el campo eléctrico en el interior de la cavidad? De nuevo, ¿por qué?

P22.15. Explique el siguiente enunciado: “en una situación estática el campo eléctrico en la superficie de un conductor podría no tener ninguna componente paralela a la superficie, ya que esto violaría la condición de que las cargas en la superficie están en reposo”. ¿Este mismo enunciado sería válido para el campo eléctrico en la superficie de un aislante? Explique su respuesta y la razón de cualesquiera diferencias entre los casos de un conductor y un aislante.

P22.16. Una esfera sólida de cobre tiene una carga neta positiva distribuida de manera uniforme sobre la superficie de la esfera; el campo eléctrico en el interior de la esfera es igual a cero. Después, una carga puntual negativa fuera de la esfera se acerca a la superficie de la esfera. ¿Toda la carga neta en la esfera seguirá en la superficie? De ser así, ¿se distribuirá de manera uniforme? Y si no fuera uniforme, ¿cómo se distribuirá? ¿El campo eléctrico dentro de la esfera seguiría siendo igual a cero? Explique su respuesta para cada caso.

P22.17. Algunos aviones modernos están hechos principalmente de materiales compuestos que no conducen la electricidad. La U.S. Federal Aviation Administration requiere que tales aviones tengan conductores bajo sus superficies para que los protejan cuando vuelen en medio de tormentas. Explique la física que sustenta este requerimiento.

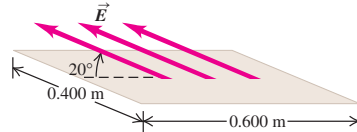
Ejercicios

Sección 22.2 Cálculo del flujo eléctrico

22.1. Una delgada hoja de papel tiene un área de 0.250 m^2 y está orientada de tal modo que la normal a la hoja forma un ángulo de 60° con un campo eléctrico uniforme de magnitud 14 N/C . a) Calcule la magnitud del flujo eléctrico a través de la hoja. b) ¿La respuesta al inciso a) depende de la forma de la hoja? ¿Por qué? c) Para qué ángulo ϕ entre la normal a la hoja y el campo eléctrico, la magnitud del flujo a través de la hoja es: i) máxima y ii) mínima? Explique sus respuestas.

22.2. Una lámina plana tiene forma rectangular con lados de longitud 0.400 m y 0.600 m . La lámina está inmersa en un campo eléctrico uniforme de magnitud 75.0 N/C dirigido a 20° con respecto al plano de la lámina (figura 22.31). Encuentre la magnitud del flujo eléctrico a través de la lámina.

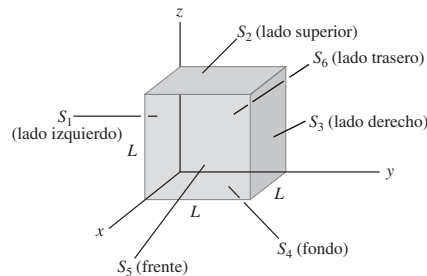
Figura 22.31 Ejercicio 22.2.



22.3. Se mide un campo eléctrico de $1.25 \times 10^6 \text{ N/C}$ a una distancia de 0.150 m de una carga puntual. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una esfera a esas distancia de la carga? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

22.4. Un cubo tiene lados con longitud $L = 0.300 \text{ m}$. Se coloca con una esquina en el origen, como se muestra en la figura 22.32. El campo eléctrico no es uniforme, pero está dado por $\vec{E} = (-5.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})x\hat{i} + (3.00 \text{ N/C} \cdot \text{m})z\hat{k}$. a) Calcule el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 . b) Determine cuál es la carga eléctrica total dentro del cubo.

Figura 22.32 Ejercicios 22.4 y 22.6; Problema 22.32.



22.5. Una superficie hemisférica con radio r en una región de campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ tiene su eje alineado en forma paralela con la dirección del campo. Calcule el flujo a través de la superficie.

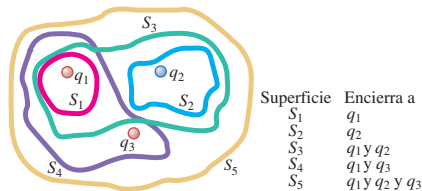
22.6. El cubo de la figura 22.32 tiene lados con longitud $L = 10.0 \text{ cm}$. El campo eléctrico es uniforme, tiene magnitud $E = 4.00 \times 10^3 \text{ N/C}$ y es paralelo al plano xy con un ángulo de 36.9° medido a partir del eje $+x$ hacia el eje $+y$. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras del cubo, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 ? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico total a través de todas las caras del cubo?

22.7. En el ejemplo 21.11 (sección 21.5) se demostró que el campo eléctrico debido a una línea infinita de carga es perpendicular a ésta y su magnitud es $E = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Considere un cilindro imaginario con radio $r = 0.250 \text{ m}$ y longitud $l = 0.400 \text{ m}$ que tiene una línea infinita de carga positiva que va a lo largo de su eje. La carga por unidad de longitud en la línea es $\lambda = 6.00 \mu\text{C/m}$. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través del cilindro debido a esta línea infinita de carga? b) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su radio se incrementa a $r = 0.500 \text{ m}$? c) ¿Cuál es el flujo a través del cilindro si su longitud aumenta a $l = 0.800 \text{ m}$?

Sección 22.3 Ley de Gauss

22.8. Las tres esferas pequeñas que se muestran en la figura 22.33 tienen cargas $q_1 = 4.00 \text{ nC}$, $q_2 = -7.80 \text{ nC}$ y $q_3 = 2.40 \text{ nC}$. Calcule el flujo eléctrico neto a través de cada una de las siguientes superficies cerradas que se ilustran en sección transversal en la figura: a) S_1 ; b) S_2 ; c) S_3 ; d) S_4 ; e) S_5 . f) Las respuestas para los incisos a) a e), ¿dependen de la manera en que está distribuida la carga en cada esfera pequeña? ¿Por qué?

Figura 22.33 Ejercicio 22.8.



22.9. Se rocía una capa muy delgada y uniforme de pintura con carga sobre la superficie de una esfera de plástico cuyo diámetro es de 12.0 cm, para dar una carga de $-15.0 \mu\text{C}$. Encuentre el campo eléctrico a) apenas dentro de la capa de pintura; b) inmediatamente afuera de la capa de pintura; c) 5.00 cm afuera de la superficie de la capa de pintura.

22.10. Una carga puntual $q_1 = 4.00 \text{ nC}$ se localiza sobre el eje x en $x = 2.00 \text{ m}$, y una segunda carga puntual $q_2 = -6.00 \text{ nC}$ está en el eje y en $y = 1.00 \text{ m}$. ¿Cuál es el flujo eléctrico total debido a estas dos cargas a través de una superficie esférica con centro en el origen y con radio de a) 0.500 m, b) 1.50 m, c) 2.50 m?

22.11. En cierta región del espacio, el campo eléctrico $\vec{E}$ es uniforme. a) Use la ley de Gauss para demostrar que esa región debe ser eléctricamente neutra; es decir, la densidad volumétrica de carga ρ debe ser igual a cero. b) Lo contrario, ¿es verdadero? Es decir, en una región del espacio donde no hay carga, ¿ $\vec{E}$ debe ser uniforme? Explique su respuesta.

22.12. a) En cierta región del espacio, la densidad volumétrica de carga ρ tiene un valor positivo uniforme. En esa región, ¿ $\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique su respuesta. b) Suponga que en esa región de ρ positiva y uniforme hay una “burbuja” dentro de la cual $\rho = 0$. En el interior de la burbuja, ¿ $\vec{E}$ puede ser uniforme? Explique.

22.13. Una carga puntual de $9.60 \mu\text{C}$ está en el centro de un cubo con lados cuya longitud mide 0.500 m. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una de las seis caras del cubo? b) ¿Cómo cambiaría su respuesta al inciso a) si los lados midieran 0.250 m? Dé una explicación.

22.14. Campos eléctricos en un átomo. Los núcleos de los átomos grandes, como el del uranio, con 92 protones, se modelan como esferas simétricas de carga. El radio del núcleo de uranio mide aproximadamente $7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$. a) ¿Cuál es el campo eléctrico que produce este núcleo justo afuera de su superficie? b) ¿Qué magnitud de campo eléctrico produce a la distancia de los electrones, que es alrededor de $1.0 \times 10^{-10} \text{ m}$? c) Los electrones se modelan como si formaran una capa uniforme de carga negativa. ¿Qué campo eléctrico producen en el sitio en que se ubica el núcleo?

22.15. Una carga puntual de $+5.00 \mu\text{C}$ se localiza en el eje x en $x = 4.00 \text{ m}$, cerca de una superficie esférica de radio 3.00 m con centro en el origen. a) Calcule la magnitud del campo eléctrico en $x = 3.00 \text{ m}$. b) Determine la magnitud del campo eléctrico en $x = -3.00 \text{ m}$. c) De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo neto a través de la esfera es igual a cero porque no contiene carga. Pero el campo debido a la carga exterior es mucho más fuerte en el lado cercano a la esfera (por ejemplo, en $x = 3.00 \text{ m}$) que en el lado alejado (en $x = -3.00 \text{ m}$). Entonces, ¿cómo puede ser igual el flujo hacia la esfera (en el lado cercano) que el flujo hacia fuera de ella (en el lado lejano)? Dé una explicación; un diagrama será de utilidad.

Sección 22.4 Aplicaciones de la ley de Gauss y Sección 22.5 Cargas en conductores

22.16. Una esfera metálica sólida con radio de 0.450 m tiene una carga neta de 0.250 nC . Determine la magnitud del campo eléctrico a) en un punto a 0.100 m fuera de la superficie, y b) en un punto dentro de la esfera, a 0.100 m bajo la superficie.

22.17. En un día húmedo, basta un campo eléctrico de $2.00 \times 10^4 \text{ N/C}$ para producir chispas de una pulgada de largo. Suponga que en su clase de física un generador Van de Graaff (véase la figura 22.27), con una esfera de radio de 15.0 cm, está produciendo chispas de 6 pulgadas de largo. a) Use la ley de Gauss para calcular la cantidad de carga almacenada en la superficie de la esfera antes de que usted, con valentía, la descargue con su mano. b) Suponga que toda la carga se localiza en el centro de la esfera, y utilice la ley de Coulomb para calcular el campo eléctrico en la superficie de la esfera.

22.18. Algunos astrónomos han sugerido que Marte tiene un campo eléctrico parecido al de la Tierra y que se produce un flujo eléctrico neto de $3.63 \times 10^{16} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}$ en la superficie de Marte. Calcule a) la carga eléctrica total sobre el planeta; b) el campo eléctrico en la superficie del planeta (consulte los datos astronómicos en la tercera de forros); c) la densidad de carga en Marte si se supone que toda la carga se distribuye de manera uniforme en su superficie.

22.19. ¿Cuántos electrones excedentes deben agregarse a un conductor esférico aislado de 32.0 cm de diámetro para producir un campo eléctrico de 1150 N/C apenas fuera de su superficie?

22.20. El campo eléctrico a 0.400 m de una línea uniforme y muy larga de carga es de 840 N/C . ¿Cuánta carga está contenida en una sección de 2.00 cm de la línea?

22.21. Una línea uniforme y muy larga de carga tiene $4.80 \mu\text{C}/\text{m}$ por unidad de longitud y se ubica a lo largo del eje x . Una segunda línea uniforme de carga tiene una carga por unidad de longitud de $-2.40 \mu\text{C}/\text{m}$ y está situada paralela al eje x en $y = 0.400 \text{ m}$. ¿Cuál es el campo eléctrico neto (magnitud y dirección) en los siguientes puntos sobre el eje y : a) $y = 0.200 \text{ m}$ y b) $y = 0.600 \text{ m}$?

22.22. a) A una distancia de 0.200 cm del centro de una esfera conductora con carga y radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C . ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del centro de la esfera? b) A una distancia de 0.200 cm del eje de un cilindro conductor muy largo con radio de 0.100 cm, el campo eléctrico es de 480 N/C . ¿Cuál es el campo eléctrico a 0.600 cm del eje del cilindro? c) A una distancia de 0.200 cm de una lámina grande con carga uniforme, el campo eléctrico es de 480 N/C . ¿Cuál es el campo eléctrico a 1.20 cm de la lámina?

22.23. Una esfera hueca, conductora, con radio exterior de 0.250 m y radio interior de 0.200 m tiene una densidad superficial de carga de $+6.37 \times 10^{-6} \text{ C}/\text{m}^2$. Se introduce una carga de $-0.500 \mu\text{C}$ en la cavidad interna de la esfera. a) ¿Cuál es la nueva densidad de carga apenas afuera de la esfera? b) Calcule la intensidad del campo eléctrico justo fuera de la esfera. c) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de una superficie esférica apenas dentro de la superficie interior de la esfera?

22.24. Una carga puntual de $-2.00 \mu\text{C}$ se localiza en el centro de una cavidad esférica de radio 6.50 cm dentro de un sólido aislante con carga. La densidad de carga en el sólido es de $\rho = 7.35 \times 10^{-4} \text{ C}/\text{m}^3$. Calcule el campo eléctrico dentro del sólido a una distancia de 9.50 cm del centro de la cavidad.

22.25. El campo eléctrico a una distancia de 0.145 m de la superficie de una esfera sólida aislante con radio de 0.355 m, es de 1750 N/C . a) Suponiendo que la carga de la esfera se distribuye con uniformidad, ¿cuál es la densidad de carga en su interior? b) Calcule el campo eléctrico dentro de la esfera a una distancia de 0.200 m del centro.

22.26. Un conductor con una cavidad interna, como el que se ilustra en la figura 22.23c, tiene una carga total de $+5.00 \text{ nC}$. La carga dentro de la cavidad, aislada del conductor, es de -6.00 nC . ¿Cuánta carga hay en a) la superficie interior del conductor, y b) la superficie exterior del conductor?

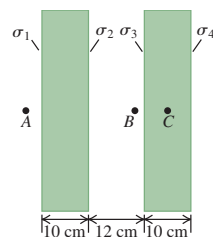
22.27. Aplique la ley de Gauss a las superficies gaussianas S_2 , S_3 y S_4 en la figura 22.21b, para calcular el campo eléctrico entre las placas y fuera de ellas.

22.28. Una lámina aislante y cuadrada con lado de 80.0 cm se encuentra en posición horizontal. La lámina tiene una carga de 7.50 nC distribuida de manera uniforme sobre su superficie. a) Calcule el campo eléctrico en un punto localizado a 0.100 nm sobre el centro de la lámina. b) Estime el campo eléctrico en un punto a 100 m sobre el centro de la lámina. c) ¿Serían diferentes las respuestas para los incisos a) y b) si la lámina estuviera hecha de un material conductor? ¿Por qué?

22.29. Un conductor cilíndrico de longitud infinita tiene un radio R y densidad superficial de carga uniforme σ . a) En términos de σ y R , ¿cuál es la carga por unidad de longitud λ para el cilindro? b) En términos de σ , ¿cuál es la magnitud del campo eléctrico producido por el cilindro con carga a una distancia $r > R$ de su eje? c) Exprese el resultado del inciso b) en términos de λ y demuestre que el campo eléctrico fuera del cilindro es el mismo que si toda la carga estuviera sobre el eje. Compare su resultado con el que se obtuvo para una línea de carga en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

22.30. Dos láminas de plástico no conductoras, muy grandes, cada una con espesor de 10.0 cm, tienen densidades de carga uniforme σ_1 , σ_2 , σ_3 y σ_4 en sus superficies, como se ilustra en la figura 22.34. Estas densidades de carga superficial tienen los valores $\sigma_1 = -6.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $\sigma_2 = +5.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$, $\sigma_3 = +2.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$ y $\sigma_4 = +4.00 \mu\text{C}/\text{m}^2$. Use la ley de Gauss para encontrar la magnitud y dirección del campo eléctrico en los puntos siguientes, lejos de los bordes de las láminas: a) punto A, a 5.00 cm de la cara izquierda de la lámina de la izquierda; b) punto B, a 1.25 cm de la superficie interior de la lámina de la derecha; c) punto C, a la mitad de la lámina de la derecha.

Figura 22.34
Ejercicio 22.30.



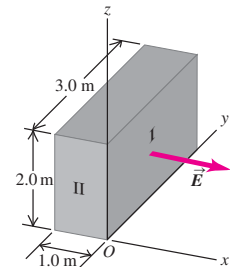
22.31. Una carga negativa $-Q$ se localiza dentro de la cavidad de un sólido metálico hueco. El exterior del sólido tiene contacto con la tierra por medio de la conexión de un alambre conductor. a) ¿Hay alguna carga excedente inducida sobre la superficie interior de la pieza de metal? Si así fuera, determine su signo y magnitud. b) ¿Hay algún exceso de carga sobre el exterior del elemento de metal? ¿Por qué? c) ¿Hay algún campo eléctrico en la cavidad? Explique. d) ¿Hay algún campo eléctrico dentro del metal? Explique por qué. e) Alguien situado fuera del sólido mediría un campo eléctrico debido a la carga $-Q$. ¿Es razonable decir que el conductor a tierra tiene aislada la región de los efectos de la carga $-Q$? En principio, ¿podría hacerse lo mismo para la gravedad? ¿Por qué?

Problemas

22.32. Un cubo tiene lados de longitud L . Está situado con una arista en el origen, como se ilustra en la figura 22.32. El campo eléctrico es uniforme y está dado por $\vec{E} = -B\hat{i} + C\hat{j} - D\hat{k}$, donde B , C y D son constantes positivas. a) Determine el flujo eléctrico a través de cada una de las seis caras de los cubos S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 y S_6 . b) Calcule el flujo eléctrico a través de todo el cubo.

22.33. El campo eléctrico $\vec{E}$ en la figura 22.35 es paralelo en todo lugar al eje x , por lo que las componentes E_y y E_z son iguales a cero. La componente x del campo E_x depende de x , pero no de y ni de z . En los puntos del plano yz (donde $x = 0$), $E_x = 125 \text{ N/C}$. a) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie I en la figura 22.35? b) ¿Cuál es el flujo eléctrico a través de la superficie II? c) El volumen que se ilustra en la figura es una pequeña sección de un bloque muy grande aislante de 1.0 m de espesor. Si dentro de ese volumen hay una carga total de -24.0 nC , ¿cuáles son la magnitud y dirección de $\vec{E}$ en la cara opuesta a la superficie I? d) El campo eléctrico, ¿es producido sólo por cargas dentro del bloque, o también se debe a cargas fuera del bloque? ¿Cómo saberlo?

Figura 22.35
Problema 22.33.



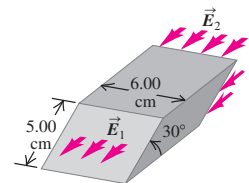
22.34. Una superficie cuadrada y plana, con lados de longitud L , está descrita por las ecuaciones

$$x = L \quad (0 \leq y \leq L, 0 \leq z \leq L)$$

a) Dibuje este cuadrado y muestre los ejes x , y y z . b) Calcule el flujo eléctrico a través del cuadrado debido a una carga puntual positiva q localizada en el origen ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). (Sugerencia: piense que el cuadrado forma parte de un cubo con centro en el origen.)

22.35. El campo eléctrico $\vec{E}_1$ en toda la cara de un paralelepípedo es uniforme y se dirige hacia fuera de la cara. En la cara opuesta, el campo eléctrico $\vec{E}_2$ también es uniforme en toda ella y se dirige hacia esa cara (figura 22.36). Las dos caras en cuestión están inclinadas 30.0° con respecto de la horizontal, en tanto que $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ son horizontales; $\vec{E}_1$ tiene una magnitud de $2.50 \times 10^4 \text{ N/C}$, y $\vec{E}_2$ tiene una magnitud de $7.00 \times 10^4 \text{ N/C}$. a) Suponiendo que ninguna otra línea de campo eléctrico cruza las superficies del paralelepípedo, determine la carga neta contenida dentro. b) ¿El campo eléctrico sólo es producido por las cargas en el interior del paralelepípedo o también se debe a las que están fuera de éste? ¿Cómo podría saberse?

Figura 22.36
Problema 22.35.



22.36. Una línea larga tiene una densidad lineal de carga uniforme de $+50.0 \mu\text{C}/\text{m}$ que corre paralela y a 10.0 cm de la superficie de una lámina de plástico plana y grande que tiene una densidad superficial de carga uniforme de $-100 \mu\text{C}/\text{m}^2$ en un lado. Encuentre la ubicación de todos los puntos en los que una partícula α no recibiría ninguna fuerza debido a este arreglo de objetos con carga.

22.37. Cable coaxial. Un cable coaxial largo consiste en un conductor cilíndrico interior con radio a , y un cilindro exterior con radio interior b y radio exterior c . El cilindro exterior está montado en apoyos aislantes y no tiene carga neta. El cilindro interior tiene carga positiva uniforme por unidad de longitud λ . Calcule el campo eléctrico a) en cualquier punto entre los cilindros a una distancia r del eje, y b) en cualquier punto fuera del cilindro exterior. c) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de la distancia r desde el eje del cable, de $r = 0$ a $r = 2c$. d) Determine la carga por unidad de longitud en las superficies interna y externa del cilindro exterior.

22.38. Un tubo conductor muy largo (un cilindro hueco) tiene radio interior a y radio exterior b . Conduce una carga por unidad de longitud $+\alpha$, donde α es una constante positiva con unidades de C/m . Sobre el

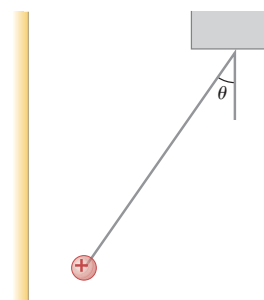
eje del tubo se encuentra una línea de carga, con carga por unidad de longitud de $+\alpha$. a) Calcule el campo eléctrico en términos de α y la distancia r desde el eje del tubo para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $r > b$. Muestre en una gráfica los resultados de E como función de r . b) ¿Cuál es la carga por unidad de longitud sobre i) la superficie interior del tubo, y ii) la superficie exterior del tubo?

22.39. Repita el problema 22.38, sólo que ahora el tubo conductor tiene una carga por unidad de longitud de $-\alpha$. Igual que en el problema 22.38, la línea de carga tiene $+\alpha$ como carga por unidad de longitud.

22.40. Un cilindro sólido y muy largo, con radio R , tiene carga positiva distribuida de manera uniforme, con carga por unidad de volumen de ρ . a) Obtenga la expresión para el campo eléctrico dentro del volumen a una distancia r del eje del cilindro en términos de la densidad de carga ρ . b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto afuera del volumen en términos de la carga por unidad de longitud λ en el cilindro? c) Compare las respuestas a los incisos a) y b) para $r = R$. d) Elabore una gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r , de $r = 0$ a $r = 3R$.

22.41. Una esfera pequeña con masa de 0.002 g tiene una carga de $5.00 \times 10^{-8}\text{ C}$ y cuelga de un cordel cerca de una lámina muy grande, conductora y con carga positiva, como se ilustra en la figura 22.37. La densidad de carga en la lámina es de $2.50 \times 10^{-9}\text{ C/m}^2$. Encuentre el ángulo que forma el cordel.

Figura 22.37
Problema 22.41.

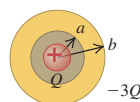


22.42. Esfera dentro de otra esfera. Una esfera sólida conductora tiene una carga q y radio a . Se encuentra dentro de una esfera hueca concéntrica, con radio interior b y radio exterior c . La esfera hueca no tiene carga neta. a) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico en términos de la distancia r desde el centro para las regiones $r < a$, $a < r < b$, $b < r < c$ y $r > c$. b) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r , de $r = 0$ a $r = 2c$. c) ¿Cuál es la carga en la superficie interior de la esfera hueca? d) ¿Y en la superficie exterior? e) Represente la carga de la esfera pequeña mediante cuatro signos positivos. Elabore un diagrama de las líneas de campo del sistema dentro de un volumen esférico de radio $2c$.

22.43. Una esfera sólida conductora con radio R que tiene carga positiva Q es concéntrica con una coraza aislante muy delgada de radio $2R$ que también tiene una carga Q . La carga Q está distribuida de manera uniforme en la coraza aislante. a) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. b) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico como función de r .

22.44. Una coraza esférica conductora, con radio interior a y radio exterior b , tiene una carga puntual positiva Q localizada en su centro. La carga total en la coraza es $-3Q$, y está aislada de su ambiente (figura 22.38). a) Obtenga expresiones para la magnitud del campo eléctrico, en términos de la distancia r desde el centro, para las regiones $r < a$, $a < r < b$ y $r > b$. b) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie interior de la coraza conductora? c) ¿Cuál es la densidad superficial de carga en la superficie exterior de la coraza conductora? d) Elabore un diagrama de las líneas de campo y la localización de todas las cargas. e) Grafique la magnitud del campo eléctrico como función de r .

Figura 22.38
Problema 22.44.



22.45. Corazas esféricas concéntricas. Una coraza esférica conductora pequeña con radio interior a y radio exterior b es concéntrica respecto a otra coraza conductora esférica más grande cuyo radio inte-

rior es c y radio exterior d (figura 22.39). La coraza interior tiene una carga total $+2q$, y la exterior tiene carga de $+4q$. a) Calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en términos de q y la distancia r a partir del centro común de las dos corazas para i) $r < a$; ii) $a < r < b$; iii) $b < r < c$; iv) $c < r < d$; v) $r > d$. Muestre sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r . b) ¿Cuál es la carga total en i) la superficie interior de la coraza pequeña; ii) la superficie exterior de la coraza pequeña; iii) la superficie interior de la coraza grande; iv) la superficie exterior de la coraza grande?

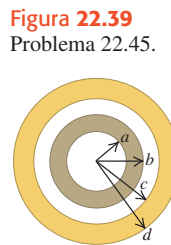


Figura 22.39
Problema 22.45.

22.46. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza exterior tiene carga $-2q$. Como en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

22.47. Repita el problema 22.45, pero ahora considere que la coraza externa tiene carga $-4q$. Igual que en el problema 22.45, la coraza interior tiene carga $+2q$.

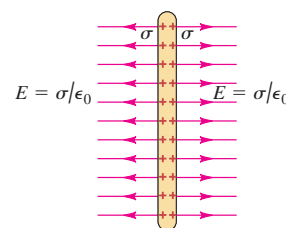
22.48. Una esfera conductora sólida con radio R tiene una carga total positiva Q . La esfera está rodeada por una coraza aislante con radio interior R y radio exterior $2R$. La coraza aislante tiene una densidad de carga uniforme ρ . a) Encuentre el valor de ρ de manera que la carga neta de todo el sistema sea igual a cero. b) Si ρ tiene el valor obtenido en el inciso a), calcule el campo eléctrico (magnitud y dirección) en cada una de las regiones $0 < r < R$, $R < r < 2R$ y $r > 2R$. Presente sus resultados en una gráfica de la componente radial de $\vec{E}$ como función de r . c) Como regla general, el campo eléctrico es discontinuo sólo en lugares en que hay una lámina delgada de carga. Explique el modo en que concuerdan con esta regla sus resultados para el inciso b).

22.49. Sobre la superficie de una coraza esférica aislante de radio R , está distribuida con uniformidad una carga negativa $-Q$. Calcule la fuerza (magnitud y dirección) que ejerce la coraza sobre una carga puntual positiva q ubicada a una distancia a) $r > R$ del centro de la coraza (fuera de la coraza), y b) $r < R$ del centro de la coraza (dentro de la coraza).

22.50. a) ¿Cuántos electrones en exceso deben distribuirse de manera uniforme dentro del volumen de una esfera de plástico aislada de 30.0 cm de diámetro, para producir un campo eléctrico de 1150 N/C justo afuera de la superficie? b) ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto que está 10.0 cm fuera de la superficie de la esfera.

22.51. Una placa conductora grande y aislada (figura 22.40) tiene una carga por unidad de área σ sobre su superficie. Como la placa es conductora, el campo eléctrico en su superficie es perpendicular a la superficie y su magnitud es $E = \sigma/\epsilon_0$. a) En el ejemplo 22.7 (sección 22.4) se demostró que el campo generado por una lámina grande, con carga uniforme y con carga por unidad de área σ tiene una magnitud de $E = \sigma/2\epsilon_0$, exactamente la mitad de una placa conductora con carga. ¿Por qué hay esta diferencia? b) Recuerde que la distribución de carga en la placa conductora es como si hubiera dos láminas de carga (una en cada superficie), cada una con carga por unidad de área de σ ; use el resultado del ejemplo 22.7 y el principio de superposición para demostrar que $E = 0$ dentro de la placa, y que $E = \sigma/\epsilon_0$ fuera de la placa.

Figura 22.40 Problema 22.51.



22.52. Modelo atómico de Thomson. En los primeros años del siglo xx, un modelo líder de la estructura del átomo era el del físico inglés J. J. Thomson (el descubridor del electrón). En el modelo de Thomson, un átomo consistía en una esfera de material con carga positiva en el que estaban inmersos electrones con carga negativa, como

chispas de chocolate en una bola de masa de galleta. Tome en cuenta que un átomo así consistía en un electrón con masa m y carga $-e$, que puede considerarse una carga puntual, y una esfera con carga uniforme de carga $+e$ y radio R . a) Explique por qué la posición de equilibrio del electrón está en el centro del núcleo. b) En el modelo de Thomson se suponía que el material positivo ofrecía poca o ninguna resistencia al movimiento del electrón. Si el electrón se aparta del equilibrio una distancia menor que R , demuestre que el movimiento resultante del electrón sería armónico simple, y calcule su frecuencia de oscilación. (Sugerencia: repase la definición del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si puede demostrarse que la fuerza neta sobre el electrón es de esta forma, entonces se infiere que el movimiento es armónico simple. A la inversa, si la fuerza neta sobre el electrón no tiene esta forma, el movimiento no es armónico simple. c) En la época de Thomson se sabía que los átomos excitados emitían ondas de luz sólo de ciertas frecuencias. En su modelo, la frecuencia de la luz emitida es la misma que la frecuencia de oscilación del electrón o electrones en el átomo. En el modelo de Thomson, ¿cuál tendría que ser el radio de un átomo para que produjera luz roja de frecuencia 4.57×10^{14} Hz? Compare su respuesta con los radios de átomos reales, que son del orden de 10^{-10} m (consulte el apéndice F para datos sobre el electrón). d) Si el electrón se desplazara del equilibrio una distancia mayor que R , ¿oscilaría? ¿Este movimiento sería armónico simple? Explique su razonamiento. (Nota histórica: en 1910 se descubrió el núcleo atómico, lo que probó que el modelo de Thomson era incorrecto. La carga positiva de un átomo no estaba distribuida en su volumen, como suponía Thomson, sino que se concentraba en el diminuto núcleo de radio de 10^{-14} a 10^{-15} m.)

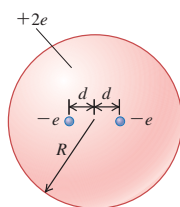
22.53. Modelo atómico de Thomson (continúa). Utilizando el modelo de Thomson (actualmente caduco) que se describió en el problema 22.52, considere un átomo que consiste en dos electrones, cada uno con carga $-e$, inmersos en una esfera de carga $+2e$ y radio R . En el equilibrio, cada electrón está a una distancia d del centro del átomo (figura 22.41). Calcule la distancia d en términos de las demás propiedades del átomo.

22.54. Bloque con carga uniforme. Un bloque de material aislante tiene un espesor $2d$ y está orientado de forma que sus caras quedan paralelas al plano yz y dado por los planos $x = d$ y $x = -d$. Las dimensiones y y z del bloque son muy grandes en comparación con d y pueden considerarse esencialmente infinitas. El bloque tiene una densidad de carga positiva uniforme ρ . a) Explique por qué el campo eléctrico debido al bloque es igual a cero en el centro del bloque ($x = 0$). b) Con base en la ley de Gauss, encuentre el campo eléctrico debido al bloque (magnitud y dirección) en todos los puntos del espacio.

22.55. Bloque con carga no uniforme. Repita el problema 22.54, pero ahora la densidad de carga del bloque está dada por $\rho(x) = \rho_0(x/d)^2$, donde ρ_0 es una constante positiva.

22.56. ¿Las fuerzas eléctricas solas dan un equilibrio estable? En el capítulo 21 se dieron varios ejemplos de cálculo de la fuerza que ejercían varias cargas puntuales del ambiente sobre una carga puntual en las cercanías. a) Considere una carga puntual positiva $+q$. Dé un ejemplo de cómo se colocarían otras dos cargas puntuales de su elección, de manera que la fuerza neta sobre la carga $+q$ fuera igual a cero. b) Si la fuerza neta sobre la carga $+q$ es igual a cero, entonces esa carga está en equilibrio. El equilibrio será *estable* si cuando la carga $+q$ se desplaza suavemente en *cualquier* dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza neta sobre la carga la regresa a la posición de equilibrio. Para que éste sea el caso, ¿cuál debe ser la dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ debido a las otras cargas en puntos que rodean la posición de equilibrio de $+q$? c) Imagine que la carga $+q$ se mueve muy lejos, y que hay una pequeña superficie gaussiana con centro en la posición

Figura 22.41
Problema 22.53.



en que $+q$ estaba en equilibrio. Aplicando la ley de Gauss a esta superficie, demuestre que es *imposible* satisfacer la condición para la estabilidad descrita en el inciso b). En otras palabras, una carga $+q$ no puede mantenerse en equilibrio estable sólo con fuerzas electrostáticas. Este resultado se conoce como *teorema de Earnshaw*. d) Los incisos a) a c) se refieren al equilibrio de una carga puntual positiva $+q$. Demuestre que el teorema de Earnshaw también se aplica a una carga puntual negativa $-q$.

22.57. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene la densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \rho_0 (1 - r/R) & \text{para } r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R\end{aligned}$$

donde $\rho_0 = 3Q/\pi R^3$ es una constante positiva. a) Demuestre que la carga total contenida en la distribución de carga es Q . b) Demuestre que el campo eléctrico en la región $r \geq R$ es idéntico al que produce una carga puntual Q en $r = 0$. c) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \leq R$. d) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r . e) Encuentre el valor de r para el que el campo eléctrico es máximo, y calcule el valor de ese campo máximo.

22.58. Una distribución de carga no uniforme, pero con simetría esférica, tiene una densidad de carga $\rho(r)$ dada como sigue:

$$\begin{aligned}\rho(r) &= \rho_0 (1 - 4r/3R) & \text{para } r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R\end{aligned}$$

donde ρ_0 es una constante positiva. a) Encuentre la carga total contenida en la distribución de carga. b) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \geq R$. c) Obtenga una expresión para el campo eléctrico en la región $r \leq R$. d) Elabore la gráfica de la magnitud del campo eléctrico E como función de r . e) Calcule el valor de r en el que el campo eléctrico es máximo, y obtenga el valor de este campo máximo.

22.59. La ley de Gauss de la gravitación. La fuerza gravitatoria entre dos masas puntuales separadas por una distancia r es proporcional a $1/r^2$, igual que la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales. A causa de esta similitud entre las interacciones gravitatorias y eléctricas, también hay una ley de Gauss para la gravitación. a) Sea $\vec{g}$ la aceleración debida a la gravedad ocasionada por una masa puntual m en la región, de manera que $\vec{g} = -(Gm/r^2)\hat{r}$. Considere una superficie gaussiana esférica con radio r centrada en esa masa puntual, y demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de esta superficie está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi Gm$$

b) Con los mismos pasos lógicos que se siguieron en la sección 22.3 con la finalidad de obtener la ley de Gauss para el campo eléctrico, demuestre que el flujo de $\vec{g}$ a través de *cualquier* superficie cerrada está dado por

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{A} = -4\pi GM_{\text{enc}}$$

donde M_{enc} es la masa total encerrada por la superficie cerrada.

22.60. Aplicación de la ley de Gauss de la gravitación. Con base en la ley de Gauss para la gravitación [obtenida en el inciso b) del problema 22.59], demuestre que los siguientes enunciados son verdaderos: a) Para cualquier distribución de masa con simetría esférica con masa total M , la aceleración debida a la gravedad fuera de la distribución es la misma que si toda la masa estuviera concentrada en el centro. (Sugerencia: véase el ejemplo 22.5 en la sección 22.4.) b) En cualquier punto dentro de una coraza de masa simétricamente esférica, la aceleración debida a la gravedad es igual a cero. (Sugerencia: véase el ejemplo 22.5.) c) Si se pudiera perforar un agujero a través

de un planeta con simetría esférica respecto de su centro, y si la densidad fuera uniforme, se encontraría que la magnitud de $\vec{g}$ es directamente proporcional a la distancia r del centro. (Sugerencia: véase el ejemplo 22.9 en la sección 22.4.) En la sección 12.6 se probaron estos resultados mediante un análisis extenuante; las demostraciones con la ley de Gauss para la gravitación son *mucho* más fáciles.

22.61. a) Una esfera aislante con radio a tiene una densidad de carga uniforme ρ . La esfera no está centrada en el origen, sino en $\vec{r} = \vec{b}$. Demuestre que el campo eléctrico en el interior de la esfera está dado por $\vec{E} = \rho(\vec{r} - \vec{b})/3\epsilon_0$. b) Una esfera aislante de radio R tiene un agujero esférico de radio a ubicado dentro de su volumen y con centro a una distancia b del centro de la esfera, donde $a < b < R$ (en la figura 22.42 se muestra una sección transversal de la esfera).

La parte sólida de la esfera tiene una densidad volumétrica de carga uniforme ρ . Obtenga la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. [Sugerencia: use el principio de superposición y el resultado del inciso a).]

22.62. Un cilindro aislante sólido, muy largo, con radio R tiene un agujero cilíndrico con radio a perforado a lo largo de toda su longitud. El eje del agujero está a una distancia b del eje del cilindro, donde $a < b < R$ (figura 22.43). El material sólido del cilindro tiene densidad volumétrica de carga uniforme ρ . Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ dentro del agujero, y demuestre que $\vec{E}$ es uniforme en todo el agujero. (Sugerencia: véase el problema 22.61.)

22.63. Una carga positiva Q está distribuida de manera uniforme sobre cada uno de dos volúmenes esféricos con radio R . Una esfera de carga está centrada en el origen, y la otra en $x = 2R$ (figura 22.44). Encuentre la magnitud y dirección del campo eléctrico neto debido a estas dos distribuciones de carga en los siguientes puntos sobre el eje x : a) $x = 0$; b) $x = R/2$; c) $x = R$; d) $x = 3R$.

22.64. Repita el problema 22.63, pero ahora la esfera de la izquierda tiene carga positiva Q y la de la derecha carga negativa $-Q$.

22.65. Campo eléctrico dentro de un átomo de hidrógeno. Un átomo de hidrógeno está constituido por un protón de carga $+Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C y un electrón de carga $-Q = -1.60 \times 10^{-19}$ C. El protón puede considerarse como una carga puntual en $r = 0$, el centro del átomo. El movimiento del electrón ocasiona que su carga se “disperse” hacia una distribución esférica alrededor del protón, por lo que el electrón es equivalente a una carga por unidad de volumen de

$$\rho(r) = -\frac{Q}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0}$$

Figura 22.42

Problema 22.61.

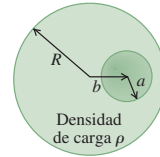


Figura 22.43

Problema 22.62.

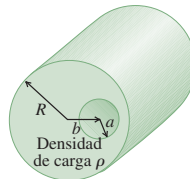
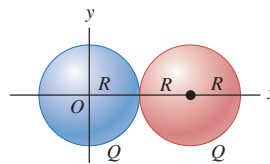


Figura 22.44 Problema 22.63.



donde $a_0 = 5.29 \times 10^{-11}$ m se llama *radio de Bohr*. a) Encuentre la cantidad total de la carga del átomo de hidrógeno encerrada dentro de una esfera con radio r centrado en el protón. Demuestre que cuando $r \rightarrow \infty$, la carga encerrada tiende a cero. Explique este resultado. b) Encuentre el campo eléctrico (magnitud y dirección) causado por la carga del átomo de hidrógeno como función de r . c) Grafique la magnitud del campo eléctrico E como función de r .

Problemas de desafío

22.66. Una región del espacio contiene una carga total positiva Q distribuida como esfera de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \alpha & \text{para } r \leq R/2 \\ \rho(r) &= 2\alpha(1 - r/R) & \text{para } R/2 \leq r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R \end{aligned}$$

Aquí α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3 . a) Determine α en términos de Q y R . b) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud de $\vec{E}$ como función de r . Haga esto para las tres regiones por separado. Expresé sus respuestas en términos de la carga total Q . Asegúrese de comprobar que los resultados concuerden en las fronteras de las regiones. c) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $r \leq R/2$? d) Si un electrón con carga $q' = -e$ oscila de ida y vuelta alrededor de $r = 0$ (el centro de la distribución) con una amplitud menor que $R/2$, demuestre que el movimiento es armónico simple. (Sugerencia: repase el análisis del movimiento armónico simple en la sección 13.2. Si, y solo si, la fuerza neta sobre el electrón es proporcional a su desplazamiento del equilibrio, entonces el movimiento es armónico simple.) e) ¿Cuál es el periodo del movimiento en el inciso d)? f) Si la amplitud del movimiento descrito en el inciso e) es mayor que $R/2$, ¿el movimiento es armónico simple? ¿Por qué?

22.67. Una región en el espacio contiene una carga total positiva Q que está distribuida en forma esférica de manera que la densidad volumétrica de carga $\rho(r)$ está dada por

$$\begin{aligned} \rho(r) &= 3\alpha r/(2R) & \text{para } r \leq R/2 \\ \rho(r) &= \alpha[1 - (r/R)^2] & \text{para } R/2 \leq r \leq R \\ \rho(r) &= 0 & \text{para } r \geq R \end{aligned}$$

Aquí, α es una constante positiva que tiene unidades de C/m^3 . a) Determine α en términos de Q y R . b) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico como función de r . Realice esto por separado para las tres regiones. Expresé sus respuestas en términos de la carga total Q . c) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $R/2 \leq r \leq R$? d) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = R/2$? e) Si un electrón con carga $q' = -e$ se libera desde el reposo en cualquier punto de alguna de las tres regiones, el movimiento resultante será oscilatorio pero no armónico simple. ¿Por qué? (Véase el problema de desafío 22.66.)